Augustin Pánek

O ustanovení vzorce pro ploský obsah trojúhelníku, jsou-li dány strany jeho

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 9 (1880), No. 4, 152--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109299`

Souřadnice středu jsou:

$$x = \frac{-3F}{5\sqrt[3]{A^2D}}, \quad y = \frac{-3F}{5\sqrt[3]{AD^2}} \qquad (18')$$

Rovnice týkající se ostatních dvou šestibodových kuželo-
seček obdržíme, nahradíme-li $\sqrt[3]{\frac{A}{D}}$ ostatními dvěma hodnotami této třetí odmocniny.

---

# O ustanovení vzorce pro ploský obsah trojúhelníku, jsou-li dány strany jeho.

Napsal

**Augustin Pánek.**

Známý vzorec pro vyjádření obsahu trojúhelníkového

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)s-c)$$

lze též vyvoditi na základě poučky součtové a sice takto:

Platí-li podmínečná rovnice

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi, \qquad (1)$$

jest

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma,$$

nebo vyjádříme-li *sinus kosinusem*, též

$$\sin\alpha - \sin\beta\sqrt{1-\sin^2\gamma} - \sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\beta} = 0. \qquad (2)$$

Rovnici tuto lze uvésti na tvar

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = 0,$$

kteráž ve formě změrné čili racionální zní

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.^{*)}$$

Položíme-li tedy

$$x_1 = \sin^2\alpha,\ x_2 = \sin^2\beta(1-\sin^2\gamma),\ x_3 = \sin^2\gamma(1-\sin^2\beta),$$

obdrží rovnina (2) dle posledního vzorce tvar

---

*) Chceme-li rovnici tuto psáti ve tvaru determinantu, uveďme ji nejprve na tvar

$$(x_1 + x_2 - x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) - 2x_1(-x_1 + x_2 - x_3) = 0,$$

načež bude žádaný determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_3, & -x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 & , & -x_1 + x_2 + x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\gamma$$
$$- 2\sin^2\beta\sin^2\gamma + 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 0, \quad (3_1)$$

anebo po snadné redukci též

$$4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)(-\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$
$$(\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma)\ (\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma).\text{*)} \quad (3_2)$$

Jak povědomo, možno takový součin, jaký se jeví na pravé straně této rovnice, psáti ve tvaru souměrného determinantu čtvrtého stupně s příčkou prázdnou, tudíž jest

$$4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = -\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\beta & \sin\gamma & 0 & \sin\alpha \\ \sin\gamma & \sin\beta & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}. \quad (3_3)$$

Ale poněvadž bezprostředně z příslušného obrazce plyne

---

Zvýšíme-li stupeň determinantu tohoto o jednu, obdržíme

$$\begin{vmatrix} 1, & -x_2 & x_1 - x_2 \\ 0 & x_1 + x_2 - x_3, & -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 2x_2\ , & -x_1 + x_2 + x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Přičetše první řádek ke druhému a třetímu, budeme míti

$$\begin{vmatrix} 1, & -x_2 & x_1 - x_2 \\ 1 & x_1 - x_3, & -x_3 \\ 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

nebo když determinant tento v jiný stupně čtvrtého proměníme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & -x_2 & x_1 - x_2 \\ x_3 & 1 & x_1 - x_3 & -x_3 \\ 0 & 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

anebo přičtením prvního sloupce ke třetímu a čtvrtému

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & x_1 \\ x_3 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

takže konečně výměnou čtvrtého sloupce za druhý sloupec nabudeme determinantu s příčkou prázdnou

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & x_1 & 1 \\ 0 & x_3 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

vyčíslíme-li tento determinant podlé známého pravidla, obdržíme výraz původní.

*) Vzorec tento viz: *Baltzer* „Die Elemente der Mathematik". II. 3. vydání, str. 306.

$$sin\,\alpha = \frac{a}{d},\quad sin\,\beta = \frac{b}{d},\quad sin\,\gamma = \frac{c}{d},$$

a mimo to pak dále

$$2\Delta = \frac{abc}{d},$$

kdež $d$ průměr kruhu trojúhelníku opsaného a $\Delta$ ploský obsah jeho značí, obdržíme konečně, dosadivše tyto hodnoty do ($3_2$),

$$16\Delta^2 = (a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c), \quad (4_1)$$

anebo dle vzorce ($3_3$) též

$$16\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.\text{[3]} \qquad (4_2)$$

**Poznámka redakce.**

Jedná se tedy jen o to, jak převésti determinant ($4_2$) na tvar součinu s počátku postaveného. A tu nevypadá věc tak snadně, jak by se na první pohled zdálo, o čemž se nejlépe přesvědčíme, obrátíme-li se ku příslušným spisům pro poučení.

Nejlépe si tu vede *Günther*,[4]) uváděje nepřímý spůsob Möbiusův, jak se determinant tento uvede v poměr ke zmíněnému součinu, z čehož patrno, že tu vyskytuje se mezera v nauce o determinantech čili že tu užíti dlužno neznámé jakési vlastnosti determinantu, která se zakládá ve zvláštním jeho transformování.

Poněvadž jsem ve svých přednáškách „O determinantech“ na tuto nesrovnalost narazil, snažil jsem se zvláštní tu záhadu řešiti, při čemž jsem objevil příslušnou vlastnost determinantů na zvláštním jich transformování založenou, o níž zde jen v jednoduchých případech budiž učiněna zmínka, jelikož deduktivní odůvodnění jinde bylo podáno.[5])

Jak známo, nemění se hodnota determinantu, připojí-li se algebraicky ku prvkům některé řady multipla jiné řady rovno-

---

[3]) Srovnej: *Studnička*, „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech“. Časopis pro pěst. mathem. a fys. Ročník II., p. 194.

[4]) „Lehrbuch der Determinanten-Theorie“ II. Aufl. pag. 148.

[5]) *Studnička* „Über eine neue Determinanteneigenschaft“ Sitzungsb. d. k. b. Ges. d. Wiss. vom 5. März 1880.

běžné; z čehož plyne, že se nezmění i tehdáž, když se ku prvkům jednoho řádku připočítají prvky všech ostatních řádků. Jinak se má však věc, opakujeme-li tento postup vícekráte, při čemž arci nutno algebraický součet prvků všech řádků — a co platí o řádcích, platí i o sloupcích — pokaždé jinak sestavovati, t. j. bráti hodnoty jistých a to vždy jiných prvků se znamením negativním.

Při determinantu stupně druhého.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

obdržíme tu snadno, připočteme-li ku prvkům řádku prvního prvky řádku druhého a odečteme-li současně od prvků řádku druhého prvky řádku prvního,

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 + a_2, & b_1 + b_2 \\ a_2 - a_1, & b_2 - b_1 \end{vmatrix},$$

takže na př. platí

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Při determinantu stupně třetího

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

obdržíme, sestavujeme-li prvky podlé vzorce

$$a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 + a_2 - a_3, \quad a_1 - a_2 + a_3,$$

jakož snadno se přesvědčiti možná,

$$\Delta = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3, & b_1 + b_2 + b_3, & c_1 + c_2 + c_3 \\ a_1 + a_2 - a_3, & b_1 + b_2 - b_3, & c_1 + c_2 - c_3 \\ a_1 - a_2 + a_3, & b_1 - b_2 + b_3, & c_1 - c_2 + c_3 \end{vmatrix},$$

takže na př. platí

$$\begin{vmatrix} 4, & 2, & 3 \\ 3, & 5, & 2 \\ 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 9, & 10, & 9 \\ 3, & 0, & 5 \\ 5, & 4, & 1 \end{vmatrix}.$$

Podobně se obdrží při determinantu stupně čtvrtého

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix},$$

sečítají-li se tu prvky všech řádků algebraicky podlé vzorce

$$a_1+a_2+a_3+a_4, \quad -a_1+a_2+a_3-a_4, \quad -a_1+a_2-a_3+a_4,$$
$$-a_1-a_2+a_3+a_4,$$

hodnota jeho původní absolutně šestnáctekráte větší, takže na př. platí

$$\varDelta=\begin{vmatrix}1, & 1, & 1, & 1\\ 1, & -1, & -1, & 1\\ 1, & -1, & 1, & -1\\ 1, & 1, & -1, & -1\end{vmatrix}=\frac{-1}{16}\begin{vmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=16,$$

o čemž se tuto snadno přesvědčíme, vyčíslíme-li daný determinant jiným spůsobem, dejme tomu podlé vzorce (2 pag. 99), podlé něhož se obdrží

$$\varDelta=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=16.$$

Vrátíme-li se tedy ke vzorci ($4_2$) a přeměníme-li determinant v něm obsažený podlé vzorce předcházejícího, obdržíme

$$\begin{vmatrix}a+b+c, & a+b+c, & a+b+c, & a+b+c\\ a+b-c, & -(a+b-c), & -(a+b-c), & a+b-c\\ a-b+c, & -(a-b+c), & a-b+c, & -(a-b+c)\\ -a+b+c, & -a+b+c), & -(-a+b+c), & -(-a+b+c)\end{vmatrix}=16^2\varDelta^2;$$

a vyloučíme-li tu společné činitele, bude dále

$$16^2\varDelta^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\begin{vmatrix}1, & 1, & 1, & 1\\ 1, & -1, & -1, & 1\\ 1, & -1, & 1, & -1\\ 1, & 1, & -1, & -1\end{vmatrix},$$

takže vyčíslíme-li tento determinant a zavedeme-li známé označení

$$a+b+c=2s,$$
$$a+b-c=2(s-c),$$
$$a-b+c=2(s-b),$$
$$-a+b+c=2(s-a),$$

konečně se doděláme vzorce s počátku uvedeného

$$\varDelta^2=s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Na příkladě tomto, provede-li se od počátku, velmi dobře lze viděti plastičnost tvaru determinantního, jenž co Proteus stále se měně ku konci hledané podoby nabývá.