Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

O geometrickém významu modulů umělých soustav logaritmických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 3, 119--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109277

O geometrickém významu modulů umělých soustav logaritmických.

Napsal

Vilém Jung v Pardubicích.

Kvadraturou hyperboly stejnostranné v osové soustavě asymptot dospíváme k logaritmům přirozeným, libovolné pak hyperboly v osové soustavě asymptot dávají logaritmy soustav umělých *), jichž moduly jsou určitou funkcí úhlu asymptot.

Objasnění souvislosti této budiž předmětem této kratičké poznámky.

Rovnice hyperboly, stažené na asymptoty co osy souřadné, zní $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$, kde a b značí poloosy hyperboly; $\frac{a}{b} = tg\,\alpha$ kde 2α je úhel obou asymptot a zároveň

$$OA_m = a,\ AC_m = b \text{ (obr. 1.)}$$

Tu možno při hledání obsahu $A_m\ BPM_m$ (obr. 1,) pokračovati buď způsobem elementárným (obdobně jak v Č. I. R. VII. vyvozena kvadratura stejnostranné hyperboly) neb pomocí vzorce integračního.

Užijeme cesty kratší, píšíce:

$$P_x = A_m\ BPM_m = sin\ 2\alpha \int_{\overline{OB}}^{\overline{OP}=x} y.\ dx = \int_{\overline{OB}}^{\overline{OP}=x} \frac{a^2 + b^2}{4}\ sin\ 2\alpha\ \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4}\ sin\ 2\alpha\ \{l\ x - l\ \overline{OB}\}$$

Je-li $\overline{OB} = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, pak $a = b = {}^1/_2\ \sqrt{2}$ (obr. 2)

Pak $(P_x)_1 = l\ x$.

Tu nám bezprostředně počet kvadratických jedniček plochy $(P_x)_1$ udává přirozený logaritmus čísla, jež vyznačuje počet délkových jedniček úsečky x.

Není-li toho případu, pak položme

$$OB = \frac{a}{2\ cos\ \alpha} = 1,\ \text{proto } a = 2\ cos\ \alpha,\ b = 2\ sin\ \alpha,\ \text{načež}$$

*) Klügel, 3 Band, Pag. 492.

$$P_x = 4\,\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{4}\,\sin 2\alpha\, l x$$

$$= \sin 2\alpha\, l x = \log_m x = \frac{1}{l m}\, l x, \text{ z toho } M = \frac{1}{l m}\sin 2\alpha.$$

Počet kvadratických jedniček plochy P_x při libovolné hyperbole, kde $a = 2\cos.\alpha$ $b = 2\sin\alpha$ (2α úhel asymptot), stažené na asymptoty co osy souřadné, udává nám logaritmy čísel, jež vyznačují počet jedniček délkových úsečky x, v soustavě, jejíž modul jest $1.\sin 2\alpha$. Patrno, že úhel asymptot 2α nesmí překročiti mez π, aniž se státi negativným, neboť by tu hyberbola nebyla možnou.

Proto M se bude nalezati mezi O a 1, tedy m mezi e a ∞, jelikož pro 2α od $\frac{\pi}{2}$ do π dostaneme tytéž hodnoty jak pro 2α od $\frac{\pi}{2}$ do O, neboť $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$.

Z toho patrno, že jsou základy soustav logaritmických od e do ∞ nejpřirozenější.

Ponechéme-li jednu asymptotu stálou a měníme polohu druhé příslušným způsobem, dostaneme hyperboly, odpovídající možným soustavám, při čemž jednička $\overline{OB}$, úsečka to vrcholu hyperboly se nemění (obr. 3).

Pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$ dostaneme $M = 1$, $m = e$, čemuž odpovídá soustava přirozených logaritmů.

Hyperboly, jichž realné osy jsou symmetricky položeny k ose realné hyperboly stejnostranné, odpovídají téže soustavě t. j. jich kvadratury pro stejné x jsou stejné.

Veškeré vrcholy A_m hyperbol nalézají se v půlkruhu v 1 kvadrantu o středu B a poloměru $\overline{OB} = 1$, kdežto druhé vrcholy $A^1{}_m$ se nalézají v půlkruhu třetího kvadrantu o středu B' a poloměru $OB' = 1$.

Vztahujeme-li totiž bod A_m na soustavu pravoúhlou, platící pro specialný případ rovnostranné hyperboly, pak

$$\eta = L_m A_m,\ \xi = OL_m \text{ (obr. 3)}$$

$$\xi = 1 + \cos 2\alpha,\ \eta = \sin 2\alpha$$

t. j. $(\xi - 1)^2 + \eta^2 = 1$, rovnice onoho kruhu.

V B sestrojíme normalu na stálou asymptotu, učiníme $BH = lm$ (lm vyčteme z tabulek). $OJ \perp OH$, čímž $BJ = u$, Chceme-li sestrojiti hyperbolu pro soustavu o základě m, opíšeme nad OB půlkruh, jakož i nad OD (obr. 4).

neboť $\overline{OB}^2 = 1\ BH.JB.\ JB = \frac{1}{BH} = \frac{1}{lm} = M.$ Dále učiníme $BK = BJ$ obloukem. Bodem B vedeme rovnoběžku s OK, až protne kruh větší, čímž dostaneme vrchol A_m, OA_m je osou realnou hyperboly odpovídající soustavě m.

Pořadnice y hyperbol jsou stejné, $x = OP$ též stejné, proto se nalézají body hyperbol pro úsečku $x = \overline{OB}$ v půlkruhu, opsaném ze středu P poloměrem PM, který se rovná pořadnic pro specialný případ rovnostranné hyperboly. Užijeme-li této věty, můžeme snadno z hyperboly rovnostranné odvodit body hyperboly o vrcholu A_m a ose realně OA_m.

V obrazci 4. je věc provedena pro soustavu Briggickou, tu je $\sin 2\alpha_{10} = 0{\cdot}434294 \ldots = u$ tedy $2\alpha_{10} = 25^0 44' 24''4$.

Tím je zajímavý význam geometrický modulů logaritmických soustav objasněn.

Řešení rovnic VII. stupně

tvaru $x^7 \pm 7p\,x^5 + 14p^3 x^3 \pm 7p^3 x + q = 0.$

Sepsal

Vojtěch Jäger v Něm. Brodě.

1. Srovnáme-li identickou rovnici

$$[\alpha_1 + \alpha_2)^7 - 7\alpha_1 \alpha_2 [\alpha_1 + \alpha_2]^5 + 14\alpha_1^2 \alpha_2^2 [\alpha_1 + \alpha_2]^3$$
$$- 7\alpha_1^3 \alpha_2^3 [\alpha_1 + \alpha_2] - (\alpha_1^7 + \alpha_2^7) = 0$$

s hořejší danou, platí pro

$$x = \alpha_1 + \alpha_2$$

podmínky

$$-\alpha_1 \alpha_2 = \pm p \quad \text{čili } \alpha_1^7 \alpha_2^7 = \mp p^7$$
$$-(\alpha_1^7 + \alpha_2^7) = q \quad \text{„} \quad \alpha_1^7 + \alpha_2^7 = -q$$

z nichž následuje, jak patrno