Bohumil Bydžovský

Řešení zvláštního problému projektivnosti a jeho užití

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 43 (1914), No. 3-4, 273--290

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109243

# Řešení zvláštního problému projektivnosti a jeho užití.

Píše Bohumil Bydžovský.

Chasles-ův známý *problém projektivnosti*[1]) lze zobecniti tím způsobem, že hledané svazky paprsků nahradí se svazky kuželoseček. Nechávaje stranou obecný problém, jenž by se tu naskytl, podám řešení problému zvláštního, formulovaného takto:

*V útvaru prvého řádu je dána skupina prvků* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$*; v rovině je dána skupina stejného počtu bodů* $A_1, \ldots, A_k$*. Jest určiti svazek kuželoseček o basi* $X_1, X_2, X_3, X_4$ *tak, aby byla vyplněna projektivnost vyjádřená vztahem*

$$[X_1, X_2, X_3, X_4]\,(A_1, \ldots, A_k) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$$

kde symbol na levé straně značí kuželosečky svazku určené postupně body $A_1, \ldots, A_k$.

Tato úloha počíná pro $k = 4$ a končí případem $k = 11$; neboť k určení svazku kuželoseček je třeba osmi podmínek a k určení projektivnosti tří, celkem jedenácti.

Úloha byla formulována a řešena pro $k = 4$ až $k = 9$ H. Kortumem.[2]) Zvolil jsem k řešení způsob odlišný od Kortumova; řešení vypadlo tak značně stručněji. Mimo to jsem počal hned s případem $k = 5$ a postupoval až k případu $k = 11$. Ř e š e n í p r o v e d l j s e m v e s k r z e l i n e á r n ě, určuje příslušný svazek kuželoseček, nikoliv jeho basi.

---

[1]) V. Ed. Weyr: Projektivná geometrie atd., str. 97. Řešení problému je udáno na př. v knize R. Sturm: „Die Lehre von den geom. Verwandtschaften" sv. I. str. 348 — 366.

[2]) H. Kortum: „Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades". Bonn 1869 (Práce poctěná cenou Steinerovou v r. 1868), str. 34. až 58. Kortum řeší tyto úlohy kvadraticky, ač to není nutné. V. dále v textu.

Jakožto zajímavou applikaci této úlohy provedl jsem v dalším *lineární konstrukci rovinné křivky pátého stupně* určené dvaceti jednoduchými body.

Vlastnímu řešení obou úloh předesílám řadu lineárních konstrukcí pomocných, jež i samy o sobě jsou zajímavy.

## I. Konstrukce pomocné.

1. *Jsou dány dvě kuželosečky o známých dvou průsečících; oběma neznámými průsečíky a třemi body jest položiti kuželosečku.*

Úloha řeší se takto: spojnici $p$ obou neznámých průsečíků lze určiti lineárně [3]; rovněž lineárně lze na $p$ sestrojiti polární involuci, jež přísluší všem kuželosečkám, jež protínají tuto přímku v týchž bodech jako kuželosečky dané. Avšak sestrojení kuželosečky, jejíž tři body jsou dány a jež indukuje na dané přímce známou involuci, je známo a provede se lineárně. [4])

2. *Jsou dány dvě dvojice kuželoseček; pro každou dvojici jsou známy dva průsečíky. Oběma dvojicemi neznámých průsečíků a jedním bodem jest položiti kuželosečku.*

Tato úloha řeší se lineárně, neboť se převede týmž způsobem, jako úloha předcházející, na konstrukci kuželosečky, jež prochází daným bodem a indukuje na dvou daných přímkách známé involuce. [5])

3. *Jsou dány dvě kuželosečky $K_1$, $K_2$; žádný jejich průsečík není znám. Jest sestrojiti kuželosečku $K$ určenou těmito čtyřmi průsečíky a bodem $P$.*

Hledaná kuželosečka náleží do svazku $[K_1, K_2]$ určeného kuželosečkami $K_1$, $K_2$. Poláry bodu $P$ vzhledem k oběma kuželosečkám sestrojí se lineárně; budiž $P'$ jejich průsečík. Tímto bodem procházejí poláry bodu $P$ vzhledem ke všem kuželosečkám

---

[3]) V. F. Enriques: Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig 1903. Str. 269.

[4]) V. E. Weyr, v knize uv., str. 12?. V konstrukci tam prováděné předpokládá se, že involuce je elliptická; platí ovšem táž konstrukce i pro involuci hyperbolickou.

[5]) E. Weyr, v knize uv., str. 127. Srov. předcházející pozn.

svazku; je tedy $\overline{PP'}$ tečna hledané kuželosečky $K$ v bodě $P$. Buďtež $A_1, A_2, \ldots$ body určující kuželosečku $K_1$; $B_1, B_2, \ldots$ body určující kuželosečku $K_2$. Na spojnici $\overline{A_1B_1}$ určuje svazek involuci $i_1$ o dvojicích $A_1, A_1'$; $B_1, B_1'$; . . . ; na spojnici $\overline{A_2B_2}$ involuci $i_2$ o dvojicích $A_2, A_2''$; $B_2, B_2''$; . . . Obě lze sestrojiti lineárně. Tyto dvě involuce jsou sdruženy projektivně tak, že si odpovídají dvojice vyťaté touž kuželosečkou svazku. Je-li $M$ průsečík spojnic $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, pak příslušné dvojice obou involucí $M, M'$; $M, M''$ si v této projektivnosti rovněž odpovídají, ježto jsou vyťaty kuželosečkou svazku určenou bodem $M$. Sestrojme kuželosečky $K_1'$, $K_2'$ určené body $P$, $A_1, A_1', A_2, A_2''$; $P, B_1, B_1', B_2, B_2''$; svazek $[K_1', K_2']$ vytíná na obou spojnicích tytéž dvě involuce $i_1$, $i_2$ a sdružuje je touž projektivností, jako prvý svazek. Kuželosečka $K$ náleží tedy také do tohoto druhého svazku. Sestrojme — lineárně — pomocný svazek kuželoseček o známé basi, jenž vytíná rovněž involuci $i_1$ [6]); tento svazek je projektivně sdružen se svazkem $[K_1', K_2']$ tak, že si odpovídají kuželosečky protínající se v téže dvojici involuce $i_1$. Tuto projektivnost lze sestrojiti (na př. užitím svazků tečen ve známém bodu base), neboť známe tři dvojice kuželoseček sobě odpovídajících, určených resp. bodem $A_1$; $B_1$; $M$. Pro kuželosečku svazku $[K_1', K_2']$ určenou bodem $M$ známe ovšem jen čtyři body $P, M, M', M''$; lze však určiti její tečnu v bodě $M$ týmž způsobem, jako jsme učinili pro kuželosečku $K$ v bodě $P$. Tím je zjednána projektivnost mezi pomocným svazkem kuželoseček a svazkem tečen v bodě $P$ ke kuželosečkám svazku $[K_1', K_2']$. Kuželosečka prvého svazku příslušná tečné $\overline{PI''}$ určuje na $\overline{A_1B_1}$ tutéž dvojici involuce $i_1$ jako hledaná kuželosečka $K$; lze tedy — lineárně — sestrojiti polární involuci, kterou $K$ indukuje na $\overline{A_1B_1}$. Ježto tutéž úvahu lze opakovati pro $\overline{A_2B_2}$, jest úloha původní převedena na tutéž konstrukci, jako úloha 2. Konstrukce je veskrze lineární.

4. *Jsou dány dvě kuželosečky; jeden jejich průsečík $P_1$ je znám. Jest sestrojiti kuželosečku určenou těmito čtyřmi průsečíky a bodem $P$.*

---

6) E. Weyr, o knize uv., str. 141.

Tato úloha je zvláštním případem předcházející a řeší se právě tak jako ona; involuci $i_2$ lze však nahraditi řadou bodovou na paprsku bodem $P_1$, čímž se konstrukce zjednoduší.

5. *Jest dán svazek kuželoseček* $[K]$ *a paprsek* $p$. *K libovolnému bodu* $X$ *tohoto paprsku jest sestrojiti bod* $X'$, *jenž s ním tvoří dvojici involuce, v níž* $p$ *protíná svazek* $[K]$.

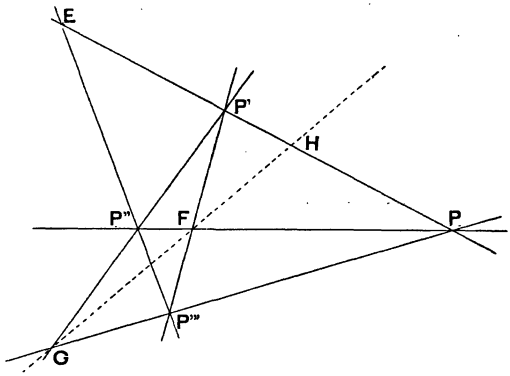
Bod $X'$ sestrojí se jako druhý průsečík paprsku $p$ s tou kuželosečkou svazku $[K]$, jež je určena bodem $X$. Dle předchozích úloh dovedeme tuto kuželosečku sestrojiti lineárně, ať je base svazku známa, anebo úplně neznáma, anebo známa jen částečně. Lze tedy celou konstrukci provésti lineárně.

6. *Jsou dány dvě kubické křivky* $K_1^3$, $K_2^3$ *o známých třech průsečících* $E$, $F$, $G$. *Jest sestrojiti křivku* $K^3$, *jež s nimi náleží do téhož svazku a je určena libovolným bodem* $P$.

Na spojnici $\overline{PE}$ vytíná svazek $[K_1^3, K_2^3]$ kvadratickou involuci $i$; dovedeme sestrojiti lineárně svazek kuželoseček, jenž tuto involuci vytíná. Neboť vytvoříme-li $K_1^3$ svazkem paprsků o středu $E$ a projektivním svazkem kuželoseček (což je úloha lineární), protíná kuželosečka příslušná paprsku $\overline{EP}$ tento paprsek v týchž dvou bodech jako $K_1^3$. Právě tak sestrojíme lineárně kuželosečku, jež protíná $\overline{EP}$ v týchž dvou bodech jako $K_2^3$. Dle předchozího odstavce dovedeme lineárně sestrojiti bod $P'$, jenž bodu $P$ odpovídá v involuci $i$. To je třetí průsečík paprsku $\overline{EP}$ s hledanou $K^3$. Právě tak určíme třetí průsečíky $P''$, $P'''$ této křivky s paprsky $\overline{FP}$, $\overline{GP}$. Totéž opakujeme pak pro body $P'$, $P''$, $P'''$ atd., až máme dostatečný počet bodů pro určení křivky. Tím je tato křivka lineárně sestrojena.

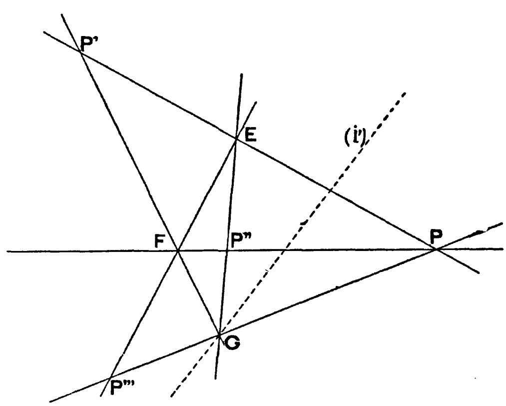
V jediném případě by tato konstrukce nevedla k cíli: kdyby poloha bodů $P'$, $P''$, $P'''$ byla taková, že by všechny další spojnice s body $E$, $F$, $G$ procházely body již známými. Pak by bylo třeba zjednati si další bod křivky $K^3$ jiným způsobem, což lze provésti lineárně takto:

a) V případě vyznačeném na obr. 1. budiž $H$ průsečík spojnic $\overline{EP}$, $\overline{GF}$. Křivka $K_1^3$ protne $\overline{GF}$ v bodě $E_1$, křivka $K_2^3$ v bodě $E_2$; oba tyto body sestrojí se lineárně. Křivka svazku $K_3^3$ určená bodem $H$ protne spojnici $\overline{EP}$ v bodě $H'$, jenž bodu $H$ odpovídá v involuci $i$. Řada bodů $E_1$, $E_2$, $H$ je projektivně sdružena s involucí i svazkem $[K_1^3, K_2^3]$; tuto projektivnost lze sestrojiti užitím pomocného svazku kuželoseček o známé basi, jenž vytíná involuci $i$. Bod $Q$ řady jenž odpovídá dvojici




Obr. 1.

$P$, $P'$ v involuci $i$, je třetí průsečík přímky $\overline{GF}$ s $K^3$. Jestliže k bodu $Q$ určíme bod $Q'$, jako k bodu $P$ jsme určili $P'$, je známo devět bodů křivky $K^3$ a je tedy křivka určena.




Obr. 2.

b) Případ vyznačený na obr. 2. řešil by se podobně, ale užilo by se projektivnosti involuce $i$ a involuce $i'$ na paprsku vedeném bodem $G$. Pro obě involuce by se dle předešlého určily dva pomocné svazky kuželoseček. Dvojice involuce $i'$ příslušná hledané křivce $K^3$ byla by určena kuželosečkou jednoho svazku. Pak dovedeme lineárně sestrojiti kuželosečku, jež obsahuje tuto dvojici a tři známé body křivky $K^3$. Zbývající průsečík této kuželosečky s křivkou určí se lineárně. Křivka je tím již určena; chceme-li však míti skutečně devět lineárně určených bodů křivky, opakujeme tutéž konstrukci pro jiný paprsek bodem $G$ vedený. — Jiné případy výjimečné nemohou nastati.

7. *Je dána kubická křivka $K_1^3$ a kuželosečka $K_2$. Jest sestrojiti kubickou křivku $K^3$, jež obsahuje tři dané body $E$, $F$, $G$ a mimo to všech šest (neznámých) průsečíků obou křivek daných.*

Buďtež $A$, $B$, $C$, $D$ čtyři z bodů, jimiž je určena křivka $K_1^3$. Sestrojíme svazek kuželoseček $[A, B, C, D]$ a projektivní s ním svazek paprsků $[S]$, jež vytvoří tuto křivku. První svazek vytíná na $K_2$ involuci čtvrtého, druhý involuci druhého stupně; samodružné body obou těchto projektivních involucí jsou průsesečíky křivek $K_1^3$, $K_2$. Paprsku $\overline{SE}$ odpovídá určitá kuželosečka svazku $[A, B, C, D]$; sestrojíme kuželosečku bodem $E$, jež obsahuje průsečíky této kuželosečky svazku s $K_2$ (odst. 3.). Právě tak sestrojíme kuželosečku bodem $F$, jež obsahuje průsečíky $K_2$ s tou kuželosečkou svazku, jež odpovídá paprsku $\overline{SF}$. Obě kuželosečky nově nalezené určují svazek $[K]$, jenž vytíná na $K_2$ tutéž involuci, jako svazek $[A, B, C, D]$, ježto involuce je určena dvěma svými skupinami. Sdružíme pak svazek $[K]$ se svazkem $[S]$ projektivně tak, aby každému paprsku svazku $[S]$ odpovídala kuželosečka, jež protíná $K_2$ v týchž čtyřech bodech, jako ta kuželosečka svazku $[A, B, C, D]$, jež odpovídá témuž paprsku v projektivnosti výše zmíněné. Svazky $[K]$ a $[S]$ takto sdružené vytvoří kubickou křivku, jež protne $K_2$ v týchž šesti bodech jako $K_1^3$, a jež obsahuje body $E$, $F$, ježto paprsku $\overline{SE}$ odpovídá kuželosečka obsahující bod $E$; právě tak pro bod $F$. Tato nově nalezená kubická křivka a rozpadající se křivka $[K_2, \overline{EF}]$ určují svazek; dva body base jsou $E$, $F$, třetí $F'$ sestrojí se lineárně jako třetí průsečík paprsku $E$, $F$ s křivkou kubickou. Znajíce tři body base, dovedeme dle předchozího odstavce sestrojiti křivku svazku určenou bodem $G$. To je hledaná křivka $K^3$; její konstrukce je veskrze lineární.

*Poznámka.* Projektivnost mezi svazky $[K]$ a $[S]$ lze sestrojovati přímo, jako projektivnost svazku $[S]$ s involucí, kterou $[K]$ vytíná na libovolném paprsku; tuto projektivnost pak sestrojíme užitím pomocného svazku kuželoseček o známé basi, jako se stalo při úl. 3.

## II. Řešení problému projektivnosti.

### a) $k = 5$

8. *Je dáno pět pevných bodů* $A_1, \ldots, A_5$ *a skupina prvků* $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ *v útvaru prvního řádu; ke třem daným bodům* $E, F, X$ *je určiti bod* $X'$ *tak, aby platil vztah*

$$[E, F, X, X'](A_1, \ldots, A_5) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$$

O svazku kuželoseček $[F, F, X, X']$ pravíme, že řeší „úlohu pětibodovou" pro body $A_1, \ldots, A_5$. Sestrojí pak se bod $X'$ lineárně takto: určíme bod $P$ tak, aby platil vztah

$$[P](A_1, \ldots, A_5) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_5)^{7)}$$

I musí platiti také

$$[E, F, X, X'](A_1, \ldots, A_5) \barwedge [P](A_1, \ldots, A_5);$$

ale to znamená, že body

$$E, F, X, P, A_1, \ldots, A_5, X'$$

leží na kubické křivce, totiž té, jež je vytvořena svazkem kuželoseček $[E, F, X, X']$ a svazkem paprsků $[P]$. Tato křivka je prvými devíti body určena; bod $X'$ nalezne se na ní lineárně z podmínky, že bod $P$ je korresiduální s body $E, F, X, X'$. Sestrojí se na př. průsečík $A_1'$ křivky se spojnicí $\overline{PA_1}$; kuželosečka určená body $E, F, A_1, A_1', X$ protne křivku po šesté v hledaném bodu $X'$.

Konstrukce stane se neurčitou jen, když bod $X$ splyne s některým z bodů

$$E, F, P, A_1, \ldots, A_5, Q,$$

kde $Q$ je devátý bod base svazku kubických křivek, jejž ozna-

---

7) E. Weyr, v uved. knize, str. 97. Elementy $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ jsou tam paprsky svazku, což však není obecnosti konstrukce bodu $P$ nijak na újmu.

číme $[K^3]$. V tom případě totiž devět bodů svrchu zmíněných neurčuje jedinou kubickou křivku, nýbrž celý svazek; na každé křivce svazku leží jeden bod $X'$. Pro takový bod $X$ existuje tedy nekonečně mnoho bodů $X'$, které s ním a s body $E$, $F$ řeší úlohu pětibodovou. Pro bod $X \equiv P$ je geometrické místo těchto bodů spojnice $\overline{EF}$; neboť svazek kuželoseček $[E, F, P, P']$ je totožný se svazkem paprsků $[P]$, je-li $P'$ bod na $\overline{EF}$; ale svazek $[P]$ pětibodovou úlohu řeší.

$b)$ $k = 6$.

9. Zvolme libovolný bod $X$ a určeme k němu $X'$ dle předchozího; body

$$E^2, F^2; A_1, \ldots, A_5, X, X'$$

(t. j. body $E$, $F$ dvojnásobnými; $A_1$ atd. jednoduchými) je určen svazek křivek čtvrtého stupně. Dvojice bodové na kterékoli z nich, korresiduální s dvojicí $X$, $X'$, mají tutéž vlastnost, jako právě tato dvojice. Je-li totiž $Y$ libovolný jiný bod na křivce, existuje k němu jediný $Y'$ takový, že oba svazky kuželoseček $[E, F, X, X']$, $[E, F, Y, Y']$ projektivně vhodně sdružené vytvoří tuto křivku; ale pak platí

$$[E, F, Y, Y'] (A_1, \ldots, A_5) \barwedge [E, F, X, X'] (A_1, \ldots, A_5) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$$

t. j. $Y$, $Y'$, dvojice s $X$, $X'$ korresiduální, řeší s body $E$, $F$ úlohu pětibodovou. Budeme označovati každé dva body, jež mají vlastnost dvojice $X$, $X'$, týmž písmenem, jež pro jeden z nich budeme čárkovati.

Všechny křivky tohoto svazku mají ještě jeden bod společný; tomu odpovídá nekonečně mnoho bodů, jež s ním a s body $E$, $F$ řeší úlohu pětibodovou, totiž na každé křivce jeden. Dle předchozího odstavce může tento bod býti jeden z bodů $P$, $Q$. Bod $P$ to však býti nemůže; neboť body $P'$ jemu odpovídající leží na $\overline{EF}$ a tedy nikoliv na křivkách svazku, jež $\overline{EF}$ mimo body $E$, $F$ neprotínají. Je to tedy bod $Q$.

Z toho plyne: *každá křivka čtvrtého stupně procházející body*

$$E^2, F^2; A_1, \ldots, A_5$$

*a obsahující jednu dvojici* (a tedy nekonečně mnoho dvojic)

*$X$, $X'$, prochází bodem $Q$; a obráceně: každá křivka čtvrtého stupně sítě určené body*

$$E^2,\ F^2;\ A_1, \ldots, A_5,\ Q$$

*skládá se z dvojic $X$, $X'$.*

Zvolme totiž na takové křivce dva body $Y$, $Z$, jež spolu s ostatními ji určují; křivka určená body

$$E^2,\ F^2;\ A_1, \ldots, A_5,\ Y,\ Y,\ Z$$

skládá se z dvojic $X$, $X'$; avšak dle prvé věty prochází bodem $Q$ a je tedy totožna s křivkou danou.

10. Budiž dán další bod $A_6$ a prvek jemu odpovídající $\alpha_6$. Určíme bod $P_1$ tak, aby

$$[P_1]\,(A_1, \ldots, A_4, A_6) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \alpha_6)$$

a bod $Q_1$ tak, aby body

$$E,\ F,\ P_1,\ A_1, \ldots, A_4,\ A_6,\ Q_1$$

tvořily basi svazku kubických křivek $[K_1^3]$. Podle předchozího je body

$$E^2,\ F^2;\ A_1, \ldots, A_4,\ A_6,\ Q_1$$

opět určena síť křivek čtvrtého stupně, z nichž každá sestává z dvojic $X$, $X''$, pro něž platí

$$[E,\ F,\ X,\ X'']\,(A_1, \ldots, A_4, A_6) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \alpha_6)$$

Určeme bod $A_6'$, jenž s body $E$, $F$, $A_6$ řeší pětibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_5$. Požadavkem, aby platilo

$$[E,\ F,\ A_6,\ A_6']\,(A_1, \ldots, A_4, A_5, A_6) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

je určena kuželosečka svazku $[E, F, A_6, A_6']$ promítající bod $A_6$ žádaným způsobem. Každá křivka sítě, nalezené v předchozím odstavci, obsahující bod $A_6$, obsahuje také bod $A_6'$; jediná z nich, kterou označíme $K_7^4$, dotýká se v bodě $A_6$ nalezené kuželosečky. Na této křivce řeší dvojice $A_6$, $A_6'$ s body $E$, $F$ úlohu šestibodovou pro body $A_1, \ldots A_6$, ježto svazek $[E, F, A_6, A_6']$ promítá žádaným způsobem všech šest bodů. Ježto tedy na křivce existuje jedna dvojice bodů, jež s body $E$, $F$ řeší šestibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots A_6$ a křivka těchto šest bodů obsahuje, mají tutéž vlastnost všechny dvojice s dvojicí $A_6$, $A_6'$ korresiduální, což se dokáže, jako se stalo výše. Poněvadž pak úloha šestibodová pro body $A_1, \ldots, A_6$ zahrnuje v sobě úlohu pětibodovou pro body $A_1, \ldots, A_4, A_6$, náleží tato křivka také do druhé nalezené sítě a prochází bodem $Q_1$.

I máme výsledek:

*Geometrické místo dvojic $X, X'$, pro něž platí*

$$[E, F, X, X'](A_1, \ldots, A_6) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_6),$$

*je křivka čtvrtého stupě $K^4_7$, určená body*

$$E^2, F^2; A_1, \ldots, A_6, Q, Q_1.$$

c) $k = 7$.

11. Geometrické místo dvojic bodových $X, X''$, pro něž platí

$$[E, F, X, X''](A_1, \ldots, A_5, A_7) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_5, \alpha_7),$$

je tedy opět křivka stupně čtvrtého $K^4_6$, určená body

$$E^2, F^2; A_1, \ldots, A_5, A_7, Q, Q_2,$$

kde $Q_2$ je bod analogický bodu $Q$ při úloze pětibodové pro body $A_1, \ldots, A_4, A_7$. Křivky $K^4_6$, $K^4_7$ protnou se mimo body $E$, $F$, $A_1, \ldots, A_5$, $Q$ ještě ve dvou bodech. Budiž $X$ jeden z nich; ježto to není bod $Q$, přísluší mu jediný bod $X'$, jenž s ním a s body $E$, $F$ řeší pětibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_5$. Tento bod $X'$ ovšem leží na obou křivkách, jak lze snadno uvážiti, a je to tedy druhý průsečík. Ježto tedy dvojice $X$, $X'$ řeší dvě úlohy šestibodové, řeší také sedmibodovou, t. j. *zbývající dva průsečíky $X$, $X'$ křivek $K^4_6$, $K^4_7$ řeší úlohu danou vztahem*

$$[E, F, X, X'](A_1, \ldots, A_7) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$$

12. Určení dvojice $X$, $X'$ vyžaduje ovšem konstrukce kvadratické. Lze však sestrojiti svazek kuželoseček, jenž tuto úlohu řeší, aniž sestrojíme body $X$, $X'$. Kuželosečka určená body $E$, $F$, $Q$, $A_6$, $A_6'$ (v odst. 10.) protne $K^4_7$ ještě v jednom bodu $R$, jejž sestrojíme lineárně, nejjednodušeji tak, že na př. k bodu $A_1$ určíme bod $A_1'$, který s ním a s body $E$, $F$ řeší pětibodovou úlohu pro body $A_2, \ldots, A_6$. Oba svazky kuželoseček

$$[E, F, A_6, A_6'], [E, F, A_1, A_1']$$

lze sdružiti projektivně tak, že vytvoří $K_7^4$; obě kuželosečky určené bodem $Q$ si odpovídají a protnou se mimo to v hledaném bodu $R$. Svazek $[E, F, Q, R]$ vytíná na $K_7^4$ dvojice korresiduální s $A_6, A_6'$, t. j. dvojice řešící úlohu šestibodovou; jedna kuželosečka svazku obsahuje tedy hledanou dvojici $X, X'$. Kuželosečka určená body $E, F, Q, A_7\ A_7'$ (kde $A'_7$ je bod, jenž s body $E, F, A_7$ řeší pětibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_5$) protne $K_6^4$ ještě v jednom bodu $S$, jejž sestrojíme lineárně právě tak, jako bod $R$; svazek kuželoseček $[E, F, Q, S]$ obsahuje jednu kuželosečku, na níž leží hledaná dvojice $X, X'$. V každém z obou svazků existuje tedy jedna kuželosečka obsahující dvojici $X, X'$; obě tyto kuželosečky jsou totožné, ježto mají pět bodů společných. Obsahuje tedy kuželosečka určená body $E, F, Q, R, S$ body $X, X'$. Provedeme-li tutéž konstrukci znovu pro některý jiný společný bod obou křivek, jímž nahradíme bod $Q$, obdržíme druhou kuželosečku, jež obsahuje body $E, F, X, X'$. *Tím je nalezen svazek kuželoseček, jenž řeší úlohu sedmibodovou pro body*

$$A_1, \ldots\ldots, A_7.$$

*Všechny konstrukce spojené s jeho nalezením jsou lineární.*

$d)$ $k = 8$.

13. Je-li dán libovolný bod $P \equiv F$, dovedeme dle předchozího určiti svazek kuželoseček, jehož další dva body base označíme $P', P''$, pro který platí

$$[E, P, P', P''] (A_1, \ldots, A_7) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$$

Trojici takových bodů, jako je $P, P', P''$, budeme vždy označovati týmž písmenem a rozlišovati je čárkováním.

Body $\quad E^2, A_1, \ldots, A_7, P, P'\ P''$

je určen svazek křivek stupně čtvrtého; každá křivka skládá se z trojic $X, X', X''$; jsou to trojice korresiduální s trojicí $P, P', P''$. Všechny křivky protínají se mimo dané body ještě ve dvou bodech $M_1, M_2$. Libovolná křivka čtvrtého stupně obsahující body

$$E^2, A_1, \ldots, A_7, M_1, M_2$$

protne libovolnou křivku svazku mimo body právě napsané ještě ve třech bodech, jež ovšem tvoří skupinu korresiduální se skupinou $P$, $P'$, $P''$, t. j. je to trojice $X$, $X'$, $X''$. Obsahuje tedy ona křivka zvolená mimo svazek jednu trojici $X$, $X'$, $X''$ a tedy nekonečně mnoho. To znamená: *všechny křivky čtvrtého stupně sítě určené body*

$$E^2, A_1, \ldots, A_7, M_1, M_2$$

*skládají se z trojic* $X$, $X'$, $X''$.

Obráceně: *každá křivka obsahující body*

$$E^2, A_1, \ldots, A_7$$

*a skládající se z trojic* $X$, $X'$, $X''$ *náleží do této sítě.* Zvolme na ní totiž dva body $X_1$, $X_2$; křivka sítě těmito dvěma body určená obsahuje trojice $X_1$, $X_1'$, $X_1''$; $X_2$, $X_2'$, $X_2''$, jež leží také na křivce dané. Obě křivky mají společných sedmnáct průsečíků (jak se snadno spočítá) a jsou tedy totožné.

Opakujeme-li tutéž úvahu pro sedm bodů

$$A_1, \ldots, A_6, A_8,$$

nalezneme dva body $N_1$, $N_2$ takové, že každá křivka sítě určené body

$$E^2, A_1, \ldots, A_6, A_8, N_1, N_2$$

skládá se z trojic bodových $X$, $X_1$, $X_2$, jež s bodem $E$ řeší sedmibodovou úlohu pro napsané body $A_i$.

14. Určí-li se k bodu $A_8$ další dva body $A_8'$, $A_8''$, jež s ním a bodem $E$ řeší sedmibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_7$, lze docíliti toho, aby platilo

$$[E, A_8, A_8', A_8''] \, (A_1, \ldots, A_7, A_8) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_7, \alpha_8);$$

neboť posledním požadavkem, jenž se týká prvku $\alpha_8$, je určena kuželosečka $K_8$ svazku $[E, A_8, A_8', A_8'']$, jež promítá bod $A_8$ žádaným způsobem. Každá křivka prvé sítě procházející bodem $A_8$ obsahuje také body $A_8'$, $A_8''$; uvažujme tu z nich, jež v $A_8$ se dotýká kuželosečky $K_8$. Na té svazek $[E, A_8, A_8', A_8'']$ promítá body $A_1, \ldots, A_8$ dle napsané projektivnosti; řeší tedy body $A_8$, $A_8'$, $A_8''$ s bodem $E$ úlohu osmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_8$. Všechny skupiny korresiduální se skupinou $A_8, A_8', A_8''$ mají ovšem tutéž vlastnost; ježto tedy každá tato skupina řeší také úlohu sedmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_6, A_8$, obsahuje tato křivka body $N_1$, $N_2$ a náleží do druhé sítě. I nabyli jsme tohoto výsledku:

*Body*

$$E^2, A_1, \ldots, A_8, M_1, M_2, N_1, N_2$$

*leží na křivce čtvrtého stupně $K_9^4$, jež je jimi určena; tato křivka je geometrické místo trojic, jež řeší s bodem $E$ osmibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_8$.*

*e)* $k = 9$

15. Určíme právě tak křivku $K_8^4$, jež je geometrickým místem trojic bodových, jež s bodem $E$ řeší úlohu osmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_7, A_9$. Tato křivka obsahuje také body $M_1$, $M_2$ a protne křivku $K_9^4$ mimo body $E, A_1, \ldots, A_7, M_1, M_2$ ještě ve třech bodech, jež označíme $X', X'', X'''$. Body, jež s oběma body $E, X'$ řeší sedmibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_7$, leží na obou křivkách, jsou to tedy body $X''$, $X'''$. Z toho plyne, že *body $E, X', X'', X'''$ řeší úlohu devítibodovou pro body*

$$A_1, \ldots, A_9.$$

16. Sestrojíme svazek kuželoseček, jehož base je $E, X', X'', X'''$, aniž sestrojíme poslední tři body. Dle odst. 12. dovedeme sestrojiti lineárně svazek kuželoseček $[E, A_8, A_8', A_8'']$. Kuželosečka tohoto svazku určená bodem $A_1$ protne $K_9^4$ ještě ve dvou bodech $B_1$, $C_1$; svazek kuželoseček $[E, A_1, B_1, C_1]$ protíná křivku $K_9^4$ ve skupinách bodů korresiduálních s $A_8, A_8', A_8''$ a řešících tedy úlohu osmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_8$. Tento svazek sestrojíme lineárně, aniž určíme body $B_1$, $C_1$. Dovedeme totiž lineárně sestrojiti také svazek $[E, A_7, A_7', A_7'']$, jenž řeší sedmibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_6, A_8$, a tedy také osmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_8$. Ježto skupiny $A_8, A_8', A_8''$; $A_7, A_7', A_7''$ jsou korresiduální, protne kuželosečka tohoto svazku určená bodem $A_1$ křivku $K_9^4$ rovněž v bodech $B_1$, $C_1$. Tak tedy známe dvě kuželosečky svazku $[E, A_1, B_1, C_1]$, čímž je určen. Sestrojíme podobně svazek kuželoseček, jehož basi tvoří body $E, A_1$ a dva neznámé body $B_1', C_1'$, a jenž na křivce $K_8^4$ vytíná skupiny bodů, jež spolu s bodem $E$ řeší úlohu osmibodovou pro body $A_1, \ldots, A_7, A_9$. V každém z nalezených svazků existuje kuželosečka obsahující body $X', X'', X'''$; obě kuželo-

sečky jsou totožné, majíce mimo to ještě společné body $E$, $A_1$. Tato společná kuželosečka obou svazků sestrojí se lineárně na př. dle úl. 2. v odst. 2.

Opakujeme-li tytéž konstrukce pro bod $A_2$, obdržíme druhou kuželosečku obsahující body $X'$, $X''$, $X'''$. Tím je *lineárně sestrojen svazek kuželoseček o basi* $E$, $X'$, $X''$, $X'''$, *jenž řeší devítibodovou úlohu pro body* $A_1, \ldots, A_9$.

$f)\ k = 10$

17. Je-li dán libovolný bod $P \equiv E$, dovedeme dle předchozího určiti svazek kuželoseček, jehož další tři body base jsou $P'$, $P''$, $P'''$, pro který platí

$$[P, P', P'', P'''] (A_1, \ldots, A_9) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_9)$$

Body $\qquad A_1, \ldots, A_9, P, P', P'', P'''$

je určen svazek křivek stupně čtvrtého; každá křivka skládá se ze skupin $X$, $X'$, $X''$, $X'''$, majících tutéž vlastnost jako skupina $P$, $P'$, $P''$, $P'''$; jsou to skupiny s touto korresiduální. Všechny křivky protínají se mimo dané body ještě ve třech bodech $M_1$, $M_2$, $M_3$. Platí pak věta, kterou dokážeme právě tak, jako byla dokázána analogická věta v případě $k = 8$, totiž:

*Všechny křivky čtvrtého stupně sítě určené body*

$$A_1, \ldots, A_9, M_1, M_2, M_3$$

*skládají se ze skupin* $X$, $X'$, $X''$, $X'''$, *jež řeší úlohu devítibodovou pro body* $A_1, \ldots, A_9$; *a obráceně.*

Právě tak nalezne se síť určená body

$$A_1, \ldots, A_8, A_{10}, N_1, N_2, N_3,$$

jejíž každá křivka skládá se ze skupin $X$, $X_1$, $X_2$, $X_3$, jež řeší devítibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_8$, $A_{10}$.

Lze konečně dokázati opět týmž způsobem, jako se stalo pro $k = 8$, že obě sítě mají společnou křivku $K^4_{11}$, na níž leží body

$$A_1, \ldots, A_{10}, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3;$$

*tato křivka je geometrické místo skupin bodových, jež řeší desítibodovou úlohu pro body* $A_1, \ldots, A_{10}$.

*g*) $k = 11$

18. Určíme právě tak křivku $K^4_{10}$, jež je geometrickým místem čtveřin bodových, které řeší úlohu desítibodovou pro body $A_1, \ldots, A_9, A_{11}$. Tato křivka obsahuje také body $M_1$, $M_2$, $M_3$ a protne křivku $K^4_{11}$ mimo body $A_1, \ldots, A_9$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ ještě ve čtyřech bodech $X$, $X'$, $X''$, $X'''$. Tyto čtyři body řeší úlohu jedenáctibodovou pro body $A_1, \ldots, A_{11}$, t. j., pro ně platí

$$[X, X', X'', X'''] (A_1, \ldots, A_{11}) \barwedge (\alpha_1, \ldots, \alpha_{11})$$

19. Sestrojíme svazek kuželoseček $[X, X', X'', X''']$. Dle odst. 16. dovedeme sestrojiti lineárně svazek $[A_{10}, A'_{10}, A''_{10}, A'''_{10}]$, jenž řeší úlohu devítibodovou pro body $A_1, \ldots, A_9$. Kuželosečka tohoto svazku určená bodem $A_1$ protne $K^4_{11}$ ještě ve třech bodech $B_1$, $C_1$, $D_1$; svazek kuželoseček $[A_1, B_1, C_1, D_1]$ vytíná na $K^4_{11}$ skupiny bodů korresiduální se skupinou $A_{10}, \ldots, A_{10}'''$ a řešících tedy úlohu desítibodovou pro body $A_1, \ldots, A_{10}$. Dovedeme sestrojiti také svazek $[A_9, A_9', A_9'', A_9''']$, jenž řeší devítibodovou úlohu pro body $A_1, \ldots, A_8, A_{10}$ a tedy také desítibodovou pro body $A_1, \ldots, A_{10}$. Ježto skupiny $A_{10}, \ldots, A_{10}'''$; $A_9, \ldots, A_9'''$ jsou korresiduální, protne kuželosečka tohoto svazku určená bodem $A_1$ křivku $K^4_{11}$ rovněž v bodech $B_1$, $C_1$, $D_1$; známe tedy dvě kuželosečky svazku $[A_1, B_1, C_1, D_1]$; tím je určen. Sestrojíme podobně svazek kuželoseček, jehož basi tvoří bod $A_1$ a tři neznámé body $B_1'$, $C_1'$, $D_1'$, a jenž na křivce $K^4_{10}$ vytíná skupiny bodů, jež řeší úlohu desítibodovou pro body $A_1, \ldots, A_9, A_{11}$. V každém z nalezených svazků existuje kuželosečka obsahující hledané body $X$, $X'$, $X''$, $X'''$; obě kuželosečky jsou totožné, majíce mimo to ještě společný bod $A_1$. Tato společná kuželosečka obou svazků sestrojí se lineárně takto: na libovolném paprsku $p$ určují oba svazky dvě involuce, jež dovedeme sestrojiti lineárně dle odst. 5.; společná dvojice obou involucí leží na hledané kuželosečce. Tato společná dvojice je dána involucí adjungovanou k oběma daným[8]), jež se sestrojí lineárně. Je tedy známa polární involuce kuželosečky na paprsku $p$. Opakujeme-li totéž pro jiný paprsek $p'$, máme pak pro určení kuželosečky bod $A_1$ a dvě polární involuce; další konstrukce je lineární (v úl. 2.).

---

[8]) E. Weyr, v uved. knize, str. 133.

Opakujeme-li tytéž konstrukce pro bod $A_2$, obdržíme druhou kuželosečku obsahující body $X$, $X'$, $X''$, $X'''$; *tím je lineárně sestrojen svazek kuželoseček* $[X, X', X'', X''']$, *jenž řeší úlohu jedenáctibodovou, nejobecnější možnou.*

## III. Konstrukce rovinné křivky stupně pátého.

20. Řešení obsaženého v předchozí kapitole lze užíti k *lineární konstrukci rovinné křivky stupně pátého*, a to tím způsobem, že se přímo určí svazek kuželoseček a projektivní s ním svazek křivek kubických, jenž s prvým svazkem křivku vytvoří.[9])

Křivka stupně pátého je určena dvacíti body, jež označíme

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ A_1,\ \ldots,\ A_{13}.$$

Vynecháme kterýkoliv z nich, na př. $A_{13}$, a uvažujeme svazek křivek pátého stupně $K^5$ určený ostatními devatenácti. Jednu křivku tohoto svazku sestrojíme takto: body

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ A_{12}$$

je určen svazek kubických křivek; budiž $A'_{12}$ devátý bod jeho base. Určíme pak svazek kuželoseček o (neznámé) basi $X, X', X'', X'''$ takový, jenž hoví vztahu

$$[X, X', X'', X'''] (A_1, \ldots, A_{11}) \barwedge [A, \ldots, G, A_{12}, A'_{12}] (A_1, \ldots, A_{11})$$

To lze provésti lineárně dle odst. 19.; svazek kubických křivek nahradíme při tom na př. svazkem tečen v jednom bodu base. Sdružíme projektivně oba svazky naznačeným způsobem; konstrukce této projektivnosti provede se tak, že se sdruží zmíněný svazek tečen projektivně s involucí, kterou svazek kuželoseček vytíná na libovolném paprsku $p$ (v. pozn. k odst. 7.).

Svazek kuželoseček $[X, X', X'', X''']$ a svazek kubických křivek vytvoří křivku stupně pátého, jež obsahuje všech

---

[9]) V tomto způsobu, pokud je mi známo, tato konstrukce dosud provedena nebyla. Jinak ovšem lineární konstrukce této křivky je známa, jsouc obsažena jako zvláštní případ v obecné konstrukci křivky $n$-ho st., při níž se užívá $n$ svazků paprsků v $n$-árně lineárním vztahu. V. Kötter: „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven" 1888 (práce poctěná cenou Steinerovou). Str. 231 a další.

dvacet bodů mimo $A_{13}$. Když bod $A_{12}$ nahražujeme postupně jiným a jiným bodem z řady $A_1, \ldots, A_{11}$, obdržíme další křivky $K^5$ svazku.

21. Na kuželosečce $K^2_{13}$ určené body $A, B, C, D, A_{13}$ vytíná svazek křivek $K^5$ involuci šestého stupně. Sestrojíme lineárně svazek kubických křivek, jenž tuto involuci vytíná a do jehož base náleží body $E, F, G$. Vezměme jednu z křivek $K^5$ hořejšího svazku, kterou dovedeme sestrojiti. Ona je vytvořena svazkem křivek kubických, jenž na zvolené kuželosečce vytíná kvadratickou involuci o středu $S$ (tento střed sestrojí se lineárně; lze snadno uvážiti, jak), a svazkem kuželoseček o (neznámé) basi $X, X', X'', X'''$. Tento svazek a svazek paprsků $[S]$ jsou projektivní a vytvoří kubickou křivku, dostatečně určenou, jež protne kuželosečku $K^2_{13}$ v týchž šesti bodech, jako příslušná $K^5$. Podle odst. 7. sestrojíme lineárně křivku kubickou obsahující týchž šest bodů a mimo to body $E, F, G$. Opakujeme-li totéž pro jinou křivku $K^5$ svazku, obdržíme další křivku kubickou určenou body $E, F, G$ a šesti body, v nichž tato $K^5$ protne kuželosečku $K^2_{13}$. Obě křivky třetího stupně určují hledaný svazek kubických křivek. V tomto svazku sestrojme — dle odst. 6. — tu křivku $K^3_{13}$, jež je určena bodem $A_{13}$; ta protne $K^2_{13}$ v těch šesti bodech ($A_{13}$ v to počítaje), v nichž ji mimo $A, B, C, D$ protne křivka svazku $K^5$ určená bodem $A_{13}$, t. j. právě hledaná křivka určená danými dvacíti body. Křivka $K^3_{13}$ protne tuto $K^5$ mimo $E, F, G$ a šest bodů na $K^2_{13}$ ještě v šesti bodech, jež spolu s $E, F, G$ tvoří skupinu korresiduální se skupinou $A, B, C, D$.

22. Vynecháme z daných dvaceti bodů některý jiný, na př. bod $A_{12}$; uvažujeme svazek křivek $K^5$ určený zbývajícími devatenácti body, jakož i involuci šestého stupně, kterou tento svazek vytíná na kuželosečce $K^2_{12}$ určené body $A, B, C, D, A_{12}$, o níž lze vždy předpokládati, že není totožna s $K^2_{13}$ (neboť na této kuželosečce může ležeti nanejvýše šest bodů $A_i$; některý z dalších vezmeme za $A_{12}$). Dovedeme sestrojiti křivku kubickou $K^3_{12}$, jež prochází body $E, F, G$ a protíná $K^2_{12}$ v týchž šesti bodech ($A_{12}$ v to počítaje), jako křivka $K^5$ určená danými dvaceti body. Křivka $K^3_{12}$ protne tuto $K^5$ ještě v dalších šesti bodech,

jež spolu s body $E$, $F$, $G$ tvoří skupinu korresiduální se skupinou $A$, $B$, $C$, $D$. Ježto tato skupina korresiduální je určena třemi svými body, je tato skupina táž, jako pro křivku $K^3_{13}$. Obě tyto kubické křivky určují tedy svazek, jehož body base vesměs leží na $K^5$. Další křivky tohoto svazku, jehož tři body base $E$, $F$, $G$ známe, lze lineárně sestrojovati dle odst. 6. Sdružíme tento svazek projektivně se svazkem kuželoseček $[A, B, C, D]$ tak, aby si odpovídaly křivky určené resp. body $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$. Oba svazky vytvoří křivku pátého stupně, jež má s hledanou $K^5$ společné body: $A, B, C, D, E, F, G, A_{11}, A_{12}, A_{13}$, dalších šest, jež náleží do base svazku kubických křivek, a deset dalších průsečíků s kuželosečkami $K^2_{12}$, $K^2_{13}$, celkem dvacet šest bodů, a je s ní tedy totožna.

*Tím je provedena lineární konstrukce této křivky, neboť o každém bodu roviny lze lineárně rozhodnouti, zdali ke křivce náleží čili nic.*

---

# O racionálních křivkách šestého stupně.

Napsal Dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

Každá racionální křivka $k$-tého stupně v prostoru $m$-rozměrném může býti pokládána za průmět racionální křivky $n$-tého stupně prostoru $n$-rozměrného (pro $k \leqq n$, $m < n$) [1]. Zejména racionální křivky stupně $n$-tého lze s výhodou pojímati jako projekce racionální normální křivky téhož stupně v prostoru $n$-rozměrném. Touto methodou možno hravě odvoditi řadu vlastností uvedených křivek, protože racionální normální křivka je útvar jednoduchý. Také z racionálních křivek $n$-tého stupně v prostoru $p$-rozměrném ($p < n$) lze vyvozovati vlastnosti křivek $k$-tého stupně a speciálně křivek $n$-tého stupně v prostoru $m$-rozměrném.

---

[1]) *G. Veronese*, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Mathem. Annalen 19. (1882) pp. 161—234., spec. p. 208.