Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O nových spůsobech stanoviti hodnoty Laisantiny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 2, 66--70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109234

O nových spůsobech stanoviti hodnotu Laisantiny.

Napsal

prof. Dr. F. J. Studnička.*)

V XVI. ročníku tohoto časopisu jsem v pojednání *„O hyperbolické obdobě Ludolfiny“* vyložil, že nutno voliti $^1/_2\,\Pi$ za argument hyperbolického sinusu, majícího hodnotu 1, a nikoli Π, jak učinil *Laisant* ve svém pojednání „Essai sur les fonctions hyperboliques“, kdež poprvé zavedl tuto novou konstantu.

O číselném její vyjádření pak praví na str. 22. „En le calculant directement par les tables de logarithmes, au moyen de la valeur approchée $\sqrt{2} = 1{\cdot}41421356\ldots$, on trouve

$$\Pi = 0{\cdot}8813735870\ldots,$$

z čehož plyne, že naše Laisantina, jsouc jednou tak velkou, na 10 míst desetinných přesně jest vyjádřena číslem

$$\Pi = 1{\cdot}7627471740\ldots$$

Při tom položen za základ vzorec

$$\Pi = 2\,l(1+\sqrt{2}), \qquad (1)$$

kterýž však možná jiným nahraditi, užijeme-li známé identičnosti

$$l(1+\sqrt{2}) = l\,\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,l\,2 + l\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

a známého vzorce logarithmického

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots;$$

obdržímeť tu, spojujíce positivní členy pro sebe a negativní taktéž pro sebe, po krátké redukci

$$\Pi = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.16} + \ldots\right], \qquad (2)$$

což *Laisant* odvozuje pomocí vzorce

---

*) Vyňato z II. dílu „Algebraické analyse“ do tisku právě chystané.

$$u = \mathfrak{T}\, u + \frac{1}{3}\mathfrak{T}^3 u + \frac{1}{5}\mathfrak{T}^5 u + \ldots *),$$

založeného na vzorci

$$u = tg\, u - \frac{1}{3} tg^3 u + \frac{1}{5} tg^5 u - \ldots.$$

Jak patrno ze složení a vzorce (1) a (2), není počítání podlé nich dosti pohodlné, jde-li o to, aby se rychle stanovil větší počet míst desetinných pro Π, takže nutno vyhledati jiné k tomu cíli cesty. A tu nejpřiměřenějším spůsobem vidí se býti buď počítání podlé nekonečné řady rychleji konvergující anebo podlé přibližných hodnot řetězce, což tuto budiž ukázáno.

I.

Abychom si zjednali řadu místo (2), kteráž by rychlej konvergovala, užijme známého vzorce

$$lx = \frac{1}{2} l(x+1) + \frac{1}{2} l(x-1) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2x^2-1)^{2k+1}}$$

a položme tu se zřetelem ke vzorci (1)

$$x = 1 + \sqrt{2},$$

načež bude patrně

$$x + 1 = \sqrt{2}(1+\sqrt{2}), \quad x - 1 = \sqrt{2}, \quad 2x^2 - 1 = 5 + 4\sqrt{2};$$

těmito hodnotami přemění se vzorec uvedený v

$$l(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2} l\, 2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{(5+4\sqrt{2})^{2k+1}},$$

a zavedeme-li sem naše Π, konečně v

---

*) Samostatně možná jej obrácením závislosti vyvinouti z výměru

$$\mathfrak{T}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\Pi = l\,2 + 4\left[\frac{1}{5+4\sqrt{2}} + \frac{1}{3(5+4\sqrt{2})^3} + \frac{1}{5(5+4\sqrt{2})^5} + \dots\right], \qquad (3)$$

kterážto řada velmi rychle konverguje, jelikož tu

$$5 + 4\sqrt{2} = 10{\cdot}656854\dots$$

Poskytujeť již 5 členů prvních pro Π správně deset míst desetinných, kdežto vzorec (2) teprve 29 členy vede k téže přesnosti, při čemž budiž uvedeno, že hodnota Laisantiny dle mého výpočtu jest na 20 míst přesně

$$\Pi = 1{\cdot}762\ 747\ 174\ 039\ 086\ 046\ 91\dots,$$

jakož snadno se možná o tom přesvědčiti.

II.

Abychom si zjednali příslušný tvar řetězcový, uvažme, že*)

$$\sqrt{2} = 1 + {}^1/_{2\dot{+}},$$

takže bude podlé toho

$$1 + \sqrt{2} = 2 + {}^1/_{2\dot{+}}.$$

A poněvadž podlé známého vzorce**) platí pro n-tou přibližnou hodnotu periodického řetězce tohoto, jelikož tu $a = 2$,

$$P_n = \frac{2^{n-1} + (n-2)_1\, 2^{n-3} + (n-3)_2\, 2^{n-5} + \dots}{2^n + (n-1)_1\, 2^{n-2} + (n-2)_2\, 2^{n-4} + \dots},$$

obdržíme,***) uvedeme-li číslo 2 na tohoto jmenovatele a spojíme-li stejné členy činitele podle známého vzorce

---

*) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol st ředních“ I. vyd. pag. 160.

**) Vzorec tento všeobecný jsem poprvé uveřejnil v Časop. p. p. math. a fys. R. III. pag. 69.

***) Jak patrno, bylo by možná řetězec tento vyjádřiti řadou

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70} - \dots.$$

$$(n)_k + (n)_{k+1} = (n+1)_{k+1},$$

pro součet $(1+\sqrt{2})$ a tedy podlé vzorce (1) i pro Laisantinu zvláštní výraz konečný, takže bude přibližně vyjádřené Π čili

$$\Pi_n = 2\,l\,\frac{2^{n+1} + (n)_1\, 2^{n-1} + (n-1)_2\, 2^{n-3} + \ldots}{2^n + (n-1)_1\, 2^{n-2} + (n-2)_2\, 2^{n-4} + \ldots}. \quad (4)$$

Vyčíslení zlomku zde obsaženého možná i postupně provésti pomocí známého schematu

2	2	2	2	2	2	2	2	...
$\frac{5}{2}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{29}{12}$	$\frac{70}{29}$	$\frac{169}{70}$	$\frac{408}{169}$	$\frac{985}{408}$	$\frac{2378}{985}$	....

Obdržíme tu na př. pro $n = 8$ již 6 míst desetinných správně

$$\Pi_8 = 1{\cdot}76274688 < \Pi.$$

Poznamenání.

Možná sice na základě identičnosti dřívější

$$\Pi = l2 + 2l\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

položiti a zároveň řadu

$$l\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2\sqrt{2}} - \frac{1}{4.4} + \ldots$$

podlé Eulerova transformačního vzorce*) uvésti ve tvar rychleji konvergující a to tím snadněji, jelikož tu platí všeobecně

$$\triangle^n u_k = \frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}}}\left[\frac{2^{\frac{n}{2}}}{k} - (n)_1\,\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{1+k} + (n)_2\,\frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{2+k} - \ldots \pm \frac{1}{n+k}\right];$$

avšak i takto upravená řada neposkytuje praktickému vyčíslení

*) Viz *Studnička* „O Eulerově vzorci . . .“ Časop. p. p. math. a fys. R. I. pag. 33.

mnoho výhod.*) I nezbývá nežli dvěma směry, vzorcem (3) a (4) naznačenými domáhati se praktického výsledku co možná mnohočíslicového, aby i tato nová konstanta, *Laisantinou* od nás zvaná, zaujala vedlé Ludolfíny i počtem číslic svých postavení více vynikající.

Glossy k učební látce fysiky na středních školách.

Sděluje

Dr. A. Seydler.

Věda jest povahou svou eminentně pokroková, jest odkázána na pokrok a pokrokem jen žije, bez něho pak zakrsává. Pokrok ten děje se někdy velkolepými výzkumy, jež v celé dosavádní ekonomii vědy způsobují ohromné převraty, někdy stejnoměrným, mohutným proudem uvědoměle ku předu postupujícím, někdy pozvolnými, nepatrnými změnami, jež teprv po dlouhé době tvářnosť vědy mění; avšak pokrok tu nezvratně jest, pokud se věda seriosně pěstuje. Instituce naproti tomu, jichž úkolem jest vymoženosti vědy co důležité elementy kulturního vychování mládeži sdělovati, jsou a do jisté míry musí býti konservativné. Do školy nepatří spory o nejnovější, dosud neřešené otázky; jen co nepopíratelným vědy jest majetkem, to může býti předmětem solidního vyučování, jemuž více jde o jádro než o vnější lesk. Avšak tato o sobě tak uznání hodná

---

*) Sečítají-li se řady z těchto členů vzniklé mající tvar

$$S = a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \dots,$$

kdež řada čísel součinitelových

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

představuje čísla obrazcová, obdrží se pomocí vzorce

$$S = a_1 \frac{q}{1-q} + \triangle a_1 \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 + \triangle^2 a_1 \left(\frac{a}{1-q}\right)^2 + \dots$$

zase původní řada logarithmická, z čehož vysvítá podstata transformace této.