August Seydler

Poznámka o výpočtu čísla: $l(1 + sqrt2)$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 2, 89--94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109233

buji, že by přijetím a prováděním návrhů zde daných vždy více a více se uskutečňovalo to, co nám všem, kteří jsme učiteli fysiky, musí býti hlavním cílem, aby totiž vyučování *experimentální* stále se zdokonalovalo, aby tím zájem pro fysiku u žáků se zvýšoval a aby zájem ten *trval* i tehdá, kdy žák opustí ústav a věnuje se studiu odbornému.

Poznámka o výpočtu čísla: $l(1+\sqrt{2})$.

Sděluje

dr. A. Seydler.

Logarithmus: $l(1+\sqrt{2})$, neb ještě lépe jeho dvojnásobná hodnota

$$\Pi = 2l(1+\sqrt{2})$$

má v theorii hyperbolických funkcí podobný význam, jako číslo π v theorii funkcí cyklických. Má tudíž snadný výpočet onoho čísla jakousi důležitosť. Nežli k takovému výpočtu přikročíme, musíme se ovšem určitě dohodnouti o tom, co jest nám *dáno.* Předpokládáme-li, že *známe* přirozené logarithmy celých čísel*) s tou přesností, kterou chceme při výpočtu čísla Π docíliti, sestrojíme si snadno libovolný počet vzorků, určujících toto číslo pomocí oněch logarithmů a pomocí řad velmi konvergentních. Poslouží nám k tomu známý vzorec:

$$lx = \frac{1}{2}l(x+1) + \frac{1}{2}l(x-1) + S(2x^2-1) \qquad (1)$$

píšeme-li zde a v následujícím pro krátkosť $S(u)$ místo řady:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5} + \frac{1}{7u^7} + \dots$$

Položme:

$$y = 1+\sqrt{2}, \qquad y^m = P_m + Q_m\sqrt{2}, \qquad (2)$$

---

*) Neb alespoň několika prvních kmenných čísel: 2, 3, 5, 7, ...

tak že platí relace:

$$P_{m+1} = P_m + 2Q_m, \quad Q_{m+1} = P_m + Q_m; \tag{3}$$

čísla P_m a Q_m jsou patrně čítatele a jmenovatele *m*té přibližné hodnoty řetězce

$$\sqrt{2} = 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$$

Shledáme tudíž snadno:

$$P_m^2 - 2Q_m^2 = (-1)^m \tag{4}$$

a následkem toho i:

$$y^{2m} + (-1)^m = 2P_m y^m, \quad y^{2m} - (-1)^m = 2\sqrt{2}\,Q_m y^m. \tag{5}$$

Kladouce tudíž v základním vzorci y^{2m} místo x, obdržíme patrně:

$$2mly = m\Pi = \frac{5}{2}\,l2 + l(P_m Q_m) + 2S(2y^{4m} - 1), \tag{6}$$

z kterého vzorku si zjednáme, kladouce $m = 1, 2, 3, \ldots$ libovolný počet výrazů pro Π; praktické upotřebení, jde-li na př. o výpočet na 20 míst, bude závislé na objemu daných tabulek přirozených logarithmů.*) První čtyry výrazy jsou (s rozvedením logarithmů součinů na logarithmy čísel kmenných):

$$\left.\begin{aligned}
\Pi &= \frac{5}{2}\,l2 + 2\,S(33 + 24\sqrt{2}),\\
2\Pi &= \frac{7}{2}\,l2 + l3 + 2\,S(1\,153 + 816\,\sqrt{2}),\\
3\Pi &= \frac{5}{2}\,l2 + l5 + l7 + 2\,S(39201 + 27720\sqrt{2}),\\
4\Pi &= \frac{9}{2}\,l2 + l3 + l17 + 2\,S(1331713 + 941664\sqrt{2}).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

---

*) *Houël* ve svém cenném Recueil de formules et de tables numériques sděluje na *jediné* stránce tabulku k vypočítání přirozených logarithmů na 20 míst, jež pro $m = 1, 2, 3, 4$ potřebné logarithmy čísel P_m a Q_m přímo poskytuje, avšak i pro větší čísla výpočet velmi snadným činí.

Pomocí obou posledních vzorků nalezeno souhlasně

$$\Pi = 1{\cdot}7627\,4717\,4039\,0860\,5045$$

a výpočet kontrollován ještě vzorkem:

$$6\Pi = \frac{7}{2}l2 + 2l3 + l5 + l7 + l11 + 2\mathrm{S}(1536796801 + 1086679440\sqrt{2}).$$

V posledních dvou řadách stačí při výpočtu 20místném úplně první člen řady; také lze jak snadno poznáme, v řadách

$$\mathrm{S}(2y^{4m} - 1) = \mathrm{S}(2\mathrm{P}_{4m} - 1 + 2\mathrm{Q}_{4m}\sqrt{2})$$

klásti s chybou, která jest malou veličinou *třetího* stupně, pokládáme-li reciprokou hodnotu argumentu řady za malou veličinu stupně *prvního*,

$$4\mathrm{P}_{4m} - 1 \quad \text{místo:} \quad 2\mathrm{P}_{4m} - 1 + 2\mathrm{Q}_{4m}\sqrt{2},$$

tak že si na př. v poslední řadě úplně uspoříme výpočet druhé odmocniny $\sqrt{2}$, t. j. až na 20 míst přesně můžeme klásti

$$6\,\Pi = \frac{7}{2}l2 + 2l3 + l5 + l7 + l11 + \frac{2}{3073593603}.$$

Rovnice (6) byla odvozena pomocí kombinace obou rovnic (5), můžeme si však zjednati výrazy pro ly též pomocí jediné z těchto rovnic, klademe-li ve vzorci (1) y^m místo x. Je-li m sudé $= 2n$, upotřebíme rovnice druhé, a obdržíme patrně:

$$2nly = n\Pi = \frac{3}{2}l2 + l\mathrm{Q}_{2n} + 2\mathrm{S}\,(2y^{4n} - 1), \qquad (8)$$

kterážto rovnice se však od rovnice (6) v podstatě neliší, jen že z ní plyne nová relace:

$$\mathrm{Q}_{2n} = 2\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n \qquad (9)$$

k níž však můžeme pomocí rovnice (5) též snadno dospěti. Je-li však m liché $= 2n + 1$, obdržíme na základě první rovnice (5) nové výrazy pro ly, totiž:

$$(2n+1)\,ly = \frac{2n+1}{2}\Pi = l2 + l\mathrm{P}_{2n+1} + 2\mathrm{S}\,(2y^{4n+2} - 1). \qquad (10)$$

Z tohoto vzorku zjednáme si podobně jako ze vzorků (6) neb (8), řadu výrazů pro ly neb pro Π, jež obsahují, vedle logarithmů celých čísel, řady S tím více sbíhající, čím větší n jsme zvolili. Tak obdržíme

$$\begin{aligned} \Pi &= 2l2 + 4S(5 + 4\sqrt{2}) \\ 3\Pi &= 2l2 + 2l7 + 4S(197 + 140\sqrt{2}) \qquad (11) \\ 5\Pi &= 2l2 + 2l41 + 4S(6725 + 4756\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Dle toho, které logarithmy celých čísel nám jsou dány, užijeme výrazu poskytujícího řadu S největší konvergence. Předpokládáme-li, že jest nám pouze $l2$ dán, musíme se ovšem spokojiti první rovnicí soustavy (11) aneb výhodněji první rovnicí soustavy (7).

Nepředpokládáme-li však — což vlastně jest důslednější — známosť logarithmů čísel celých, t. j. chceme-li číslo Π vypočítati samostatně, vyskytují se větší obtíže. Chceme-li upotřebiti rovnic (6), musíme z nich eliminovati logarithmy větších čísel uvedením jich (pomocí základního vzorku 1) na logarithmy čísel nejmenších, na př. pouze čísla 2, neb čísel 2 a 3, a potom z potřebného počtu rovnic odstraněním zbývajících logarithmů zjednati si Π. Tu se však vyskytuje okolnosť zcela zvláštní; z pravidla při eliminování logarithmů vymizí též číslo Π, a zbývá pouhá relace mezi řadami S.

Vezměme na př. první dvě rovnice (7). Klademe-li v druhé rovnici

$$l3 = \frac{3}{2} l2 + S(17)$$

a vyloučíme-li z obou $l2$, obdržíme

$$S(17) + 2S(1153 + 816\sqrt{2}) = 4S(33 + 24\sqrt{2}). \qquad (12)$$

Podobně zjednáme si z druhé, třetí a čtvrté rovnice:

$$\begin{aligned} 2S(2449) = S(1153 + 816\sqrt{2}) &- 2S(39201 + 27720\sqrt{2}) \\ &+ S(1331713 + 941664\sqrt{2}). \qquad (13) \end{aligned}$$

Vyloučíme-li však $l35$ z třetí rovnice (7) pomocí relace

$$l35 = \frac{15}{2} l2 - \frac{3}{2} l3 + S(4801) + 2S(449)$$

plynoucí z rovnic:

$$l15 = \frac{1}{2} l16 + \frac{1}{2} l14 + S(449)$$

$$l49 = \frac{1}{2} l50 + \frac{1}{2} l48 + S(4801)$$

a násobíme-li na to první rovnici na 61, druhou na -15 a třetí na -10, obdržíme sčítáním:

$$\begin{aligned} \Pi = {} & 122\, S(33 + 24\sqrt{2}) - 30\, S(1153 + 816\sqrt{2}) \\ & - 20\, S(39201 + 27720\sqrt{2}) - 20\, S(449) - 10\, S(4801). \quad (14) \end{aligned}$$

Tato rovnice vyjadřuje tudíž číslo Π pomocí 5 řad vesměs velmi sbíhavých; chceme-li míti na př. Π na 6 míst, stačí u všech řad člen první, vyjímajíc řadu první, z které se musí vzíti též člen druhý.

Na podobné obtíže narážíme, chceme-li si zjednati pomocí rovnic (10) neb kombinováním obou soustav (6) a (10) výraz pro Π, logarithmů celých čísel prostý, i tu vymizí z pravidla při eliminování těchto logarithmů též i číslo Π a zbývá vztah mezi řadami S. Příčina toho zajisté vězí ve vlastnostech čísel P_m a Q_m; v některých případech lze dokonce snadným způsobem odvoditi všeobecnou relaci mezi oněmi řadami. Pomocí rovnic (3) a (4) snadno dokážeme, že jest:

$$P_{2n+1}^2 - 1 = 2 Q_{2n} Q_{2n+2}. \quad (15)$$

Klademe-li nyní v rovnici (8) $n + 1$ místo n a utvoříme-li součet původní a této nové rovnice, nahradíme-li dále v rovníci (10) lP_{2n+1} hodnotou, plynoucí z rovnic (1) a (15):

$$lP_{2n+1} = \frac{1}{2} l2 + \frac{1}{2} lQ_{2n} + lQ_{2n+2} + S(2P_{2n+1}^2 - 1),$$

obdržíme srovnáním výsledků zajímavý vztah:

$$S(2P_{2n+1}^2 - 1) = S(2y^{4n} - 1) - 2S(2y^{4n+2} - 1) + S(2y^{4n+4} - 1). \quad (16)$$

Podobně zjednáme si na základě relace, plynoucí z rovnic (3), (4) a (15):

$$4(P_n^2 Q_n^2 - 1) = Q_{2n-2} Q_{2n+2} \quad (17)$$

vhodnou kombinací rovnic (6) a (8) vztah:

$$2S(2P_n^2Q_n^2-1)=S(2y^{4n-4}-1)-2S(2y^{4n}-1)+S(2y^{4n+4}-1), \quad (18)$$

jehož jest rovnice (13) zvláštním případem. Není pochyby, že bychom podrobnějším studiem rovnic (6), (8), (10) ještě mnohé zajímavé relace objevili; k dalším, skrytějším vztahům poukazuje možnosť, vyjádřiti v některých případech číslo Π přece pouhými řadami S, jako na př. pomocí rovnice (14). Spojíme-li první rovnice soustav (7) a (11), obdržíme Π vyjádřené pouze dvěma řadami S, tedy formalně nejjednodušší výraz pro Π:

$$\Pi=20S(5+4\sqrt{2})-8S(33+24\sqrt{2}). \quad (19)$$

Jednoduchosť ta jest však vykoupena menší konvergencí první řady výrazu tohoto. Celkem lze říci, že vzorek (19) vyžaduje výpočet menšího počtu členů nežli vzorek (14); při přesnosti 20místné na př. nutno počítati 16 členů rovnice (19), 18 členů rovnice (14), při přesnosti 100místné 77, resp. 88 členů. Z druhé strany poskytne rovnice (14) některé výhody zejmena při výpočtu vzdálenějších členů, jež rovnice (19) nepodává v téže míře.

Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti.*)

Studujícím napsal

Augustin Pánek.

Úlohu tu podáváme v rouše tomto: *Dva členové „Jednoty českých mathematiků“ se umluví, že v určitý den se sejdou ve svých místnostech, nestanovíce přesněji času schůzky, toliko to, že má se konati mezi 5. a 6. hodinou odpolední, a že každý z nich jest ochoten, přijde-li dříve, čekati na druhého 10 minut. Pokládajíc, že všechny okamžiky v ustanovené pro schůzku době mají stejnou pravděpodobnosť, stanoviti jest všeobecným řešením pravděpodobnosť, že schůzka bude.*

---

*) *H. Laurent, Traité du calcul des probabilités.* Paříž, 1873, str. 67. Přesné řešení úlohy té podal angličan *Miller* r. 1880.