Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vladimír Mašek

# O ploše kardiodicko-šroubové. [II.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 43 (1914), No. 5, 539--549

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109216

však překročiti maximální hodnotu $h_{max} = -\frac{11}{4} = -2{\cdot}75$. Pro libovolnou hmotu $m_2 \gtreqless 1$ platí rovnice (3) a (6). Rovnice (3) nazývá se také Jacobiho integrál asteroidického problému tří těles; pro rychlosti obecné jest jím rovnice (1), kde nutno dosaditi za $p_1$ a $p_2$ obecné hodnoty.

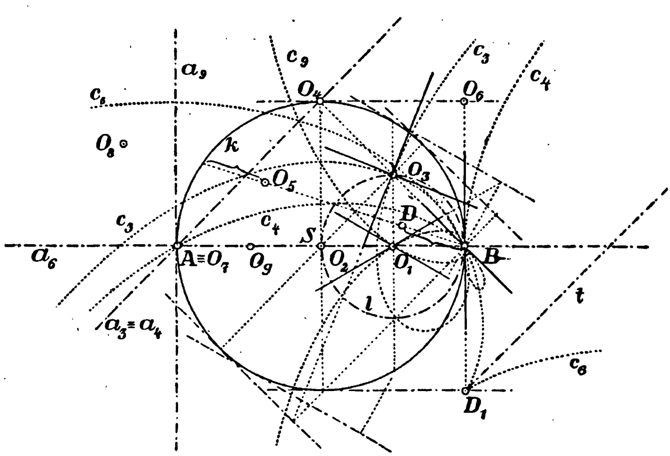
---

# O ploše kardioidicko-šroubové.

Napsal **Vladimír Mašek**, assistent české techniky v Brně.

(Dokončení.)

Dospěli jsme ku konstrukci unikursálných cirkulárných křivek 3. řádu přímo z tečen i bodů dotyku. Je-li dána základní kružnice $k$ nad průměrem $\overline{AB}$ (obr. 6.) a myslíme-li si kardi-



Obr. 6.

oidu $s$ co úpatnici této kružnice pro pól $A$, můžeme rozděliti křivky, které naší konstrukcí pro různé polohy pólu $O$ dostaneme, v následující skupiny:

*a*) Nachází-li se pól $O$ uvnitř kardioidy $s$, dostaneme křivky s reálným dvojným bodem. Pro polohu pólu $O_1$ dostali jsme trisekční křivku Mac-Laurinovu. Stotožní-li se pól $O$ se středem $S$ kružnice $k$ $(O_2)$, dostaneme *přímou strofoidu.* Pro póly ležící na kružnici $l$ nad průměrem $SB$ (na př. $O_3$) dostaneme *šikmé strofoidy* (na př. křivka $c_3$), při nichž dvojný bod se stotožňuje vždy s příslušným pólem. Tečny v dvojném bodu plynou přímo z konstrukce, použijeme-li ku sestrojení tečen křivky tečny kružnice $k$ v koncových bodech průměru spojujícího příslušný pól se středem $S$. Pro póly ležící na kružnici $k$ (na př. $O_4$) dostaneme křivky zvané *ophiuridy* (křivka $c_4$). Jich dvojný bod stotožňuje se s bodem $B$ a příslušná tečna kolmá ku asymptotě křivky jest spojnice pólu s bodem $B$. Pro libovolnou polohu pólu $O$ uvnitř kardioidy $s$ (na př. $O_5$), dostaneme příslušný dvojný bod $D$ vytvořené křivky, spojíme-li pól $O_5$ s bodem $B$ a naneseme-li vzdálenost pólu $O_5$ od průsečíku této přímky s kružnicí $k$ na touž přímku od bodu $B$ týmž směrem do bodu $D$. Tečny v bodu $D$ dostaneme, použijeme-li ku konstrukci tečen kružnice v průsečných bodech přímky jdoucí bodem $D$ kolmo ku $O_5B$ s kružnicí $k$. Každá z těchto uvedených křivek má ještě reálnou tečnu inflexní, která se dá určiti, vedeme-li z příslušného pólu tečnu ku kardioidě $s$, dotyčný bod spojíme s bodem vratu $B$ a vyhledáme průsečík této spojnice s kardioidou $s$; tečna kardioidy $s$ v tomto průsečíku jest inflexní tečnou příslušné křivky. Důkaz jest samozřejmý, neboť uvedenou konstrukcí jsme vyhledali onu oskulační rovinu prostorové křivky, jež jest ku příslušným šikmo-promítacím paprskům rovnoběžná.

*b*) Pro póly ležící na kardioidě $s$ (na př. $O_6$) dostáváme křivky s bodem vratu $D_1$ na této kardioidě (křivka $c_6$). Bod vratu $D_1$ jest vždy průsečíkem spojnice pólu a bodu $B$ s kardioidou $s$ a příslušnou tečnou vratu $t$ jest tečna kardioidy $s$ v tomto bodu, neboť jest tato stopou oné roviny oskulační křivky $k_3$, v níž ležící tečna se promítá co bod vratu. Křivky tyto jsou *šikmé cissoidy,* a zapadne-li pól do bodu $A$, dostaneme *cissoidu Diocletovu.* Tečnu inflexní obdržíme jako dříve.

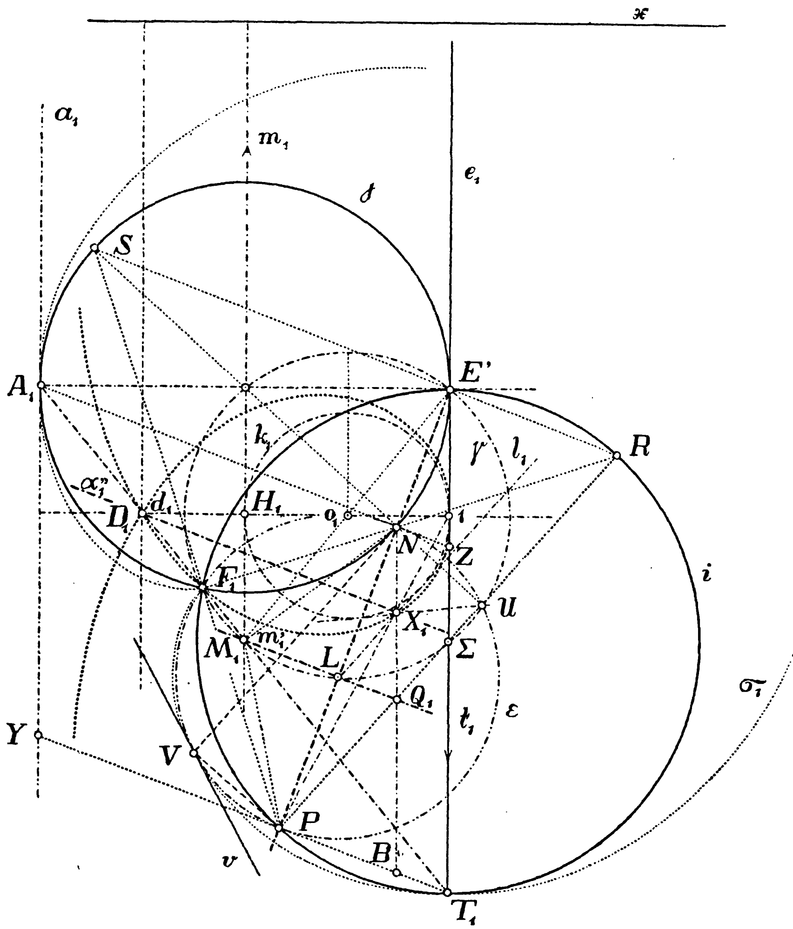
*c*) Leží-li pól vně kardioidy $s$ (na př. $O_8$), dostáváme křivky se třemi reálnými inflexními tečnami, jež zase můžeme určiti způsobem výše uvedeným.

Nachází-li se pól $O$ na průměru $AB$ (na př. $O_9$) uvnitř nebo vně kružnice $k$, dostáváme křivky zvané *Sluseovy konchoidy* (křivka $c_9$). Pro pól $O_{10}$ ($\overline{BO_{10}} = \overline{AB}$) dostaneme *Peanovu visieru.*

Asymptota při všech uvedených křivkách prochází vždy bodem $B$ kolmo ku spojnici pólu s bodem $A$.

Nárysem křivky vratu jest křivka *affinní k versiecře*. Je-li výška závitu $v$ šroubovice $š$ rovna $4r$, jest nárysem křivka zvaná *geometrická quadratrix* (*pseudo-versiera*). Pro $v = 8r$ přejde ve *versieru.*

Uvažujme nyní křivku vratu $k_3$ co průsečnou křivku dříve odvozeného šikmého kruhového válce o základní kružnici $j$ ležící v $\pi$ (obr. 7.) se šikmým kruhovým kuželem o základní kružnici $i$ (střed $\Sigma$) a vrcholu $1$. Kružnice $j$ a $i$ mají poloměry libovolné, protínají se však pod pravým úhlem v bodech $E'$ a $F_1$. Pro vrchol $1$ platí, jak dříve bylo odvozeno, $\overline{E'1} = \overline{1\Sigma}$. Společnou povrchovou přímku kužele a válce označme $e$ ($e_1 \equiv \overline{1E'}$). Veďme přímkou $e$ libovolnou rovinu, jejíž půdorysná stopa protíná kružnice $i$ a $j$ v bodech $P$ a $N$. Povrchová přímka $\overline{P1}$ kužele protíná povrchovou přímku válce bodem $N$ jdoucí v bodu $X$ křivky prostorové $k_3$. Půdorys $X_1$ leží na trisekční křivce Mac-Laurinově. Vztyčme v bodě $1$ kolmici ku $\overline{\Sigma E'}$, jež protne půdorys osy válce v bodu $H_1$. Kružnice $k_1$ o středu $o_1$ nad průměrem $\overline{H_1 1}$ jest dle dřívějšího půdorysným průmětem šroubovice $š$. Opíšeme-li dále kružnici $\gamma$ o středu $o_1$ a poloměru $\overline{o_1F_1} = \overline{o_1E'}$, prochází tato též středy kružnic $i$ a $j$ a půlí patrně všechny úsečky vymezené kružnicemi $i$ a $j$ na paprscích jdoucích bodem $E'$ nebo bodem $F_1$. Veďme vrcholem $1$ kužele v prostoru přímku rovnoběžnou s osou $x$; tato protne rotační válec nad kružnicí $k_1$ v bodu $H$ ($H_1$). Bodem $H$ veďme přímku $m$ mající půdorysnou stopu $M_1$ na kružnici $\gamma$ ($m_1 \parallel e_1$). Přímky $e$ a $m$ považujme za osy svazků rovin procházejících jednotlivými body křivky $k_3$. Bodem $X$ křivky $k_3$ prochází rovina $\alpha$ svazku rovin o ose $e$ mající půdorysnou stopu $\overline{E'P}$. Proložme nyní rovinu $\alpha'$ bodem $X$ a osou $m$. Za tím účelem veďme bodem $X$ přímku rovnoběžnou s $m$, jejíž půdorysná stopa $Q_1$ leží na spojnici $\overline{NX_1}$. Poněvadž osy $m$ a $e$ svírají s $\pi$ stejný úhel, jest $\overline{NX_1} = \overline{X_1Q_1}$, čili $Q_1$ leží též na přímce $P\Sigma$. Půdorysná stopa roviny $\alpha'$ jest tedy $\overline{M_1Q_1}$. Stopa $\overline{E'P}$ roviny $\alpha$ protíná kružnici $\gamma$ v bodu $L$, jenž jest dle dřívějšího půlícím bodem úsečky $\overline{PN}$. Vidíme, že $\triangle\, NPQ_1$ jest rovnoramenný, neboť má s rovnora-




Obr. 7.

menným $\triangle\, E'P\Sigma$ dvě strany totožné a třetí rovnoběžnou. Též $\triangle\, PM_1N$ jest rovnoramenný, neboť jest $\overline{M_1L} \perp \overline{E'L}$ a $\overline{NL} = \overline{LP}$. Mají tudíž oba tyto rovnoramenné trojúhelníky o téže přeponě $\overline{PN}$ společnou výšku $\overline{Q_1M_1}$. Jest proto $M_1Q_1 \perp E'P$

čili půdorysné stopy rovin $\alpha$ a $\alpha'$ jsou k sobě kolmé. Pohybuje-li se nyní bod $X$ po křivce $k_3$, vytvoří tedy roviny jím a přímkami $e$ a $m$ stále procházející dva projektivné svazky rovin, určující hyperboloid procházející křivkou $k_3$. Z polohy těchto svazků rovin jest patrno, že roviny rovnoběžné s $\pi$ protínají jej v kružnicích majících středy na ose $o \perp \pi$. Jest tudíž tento hyperboloid *rotačním*. Stopní jeho křivkou v $\pi$ jest kružnice $\gamma$ a půdorysem hrdelní kružnice jest $k_1$.

Dříve jsme dokázali, že křivka $k_3$ prochází imaginárními body kruhovými, v nichž se protínají kružnice $i$ a $j$. Jest proto průmětem křivky vratu $k_3$ z libovolného jejího bodu do $\pi$ neb roviny s $\pi$ rovnoběžné vždy kružnice. Stanovme nyní geom. místo středů všech kružnic, jež jsou průměty křivky $k_3$ ze všech jejích bodů do $\pi$, jakož i geom. místo všech paprsků spojujících středy těchto kružnic s příslušnými vrcholy promítacích kuželů. Určeme průmět křivky $k_3$ z bodu $X$ do $\pi$. Promítneme-li z bodu $X$ bod *1* křivky $k_3$, jest jeho průmětem patrně bod $P$ a promítneme li z bodu $X$ úběžný bod křivky $k_3$, jest jeho průmětem bod $Q_1$. Poněvadž pak v bodu $F_1$ křivka $k_3$ protíná první průmětnu, jest průmětem jejím z bodu $X$ kružnice stanovená body $F_1$, $P$, $N$. Vyhledejme její střed. Budiž $R$ koncovým bodem průměru kružnice $i$ vedeného bodem $P$ a bod $S$ koncovým bodem průměru kružnice $j$ jdoucího bodem $N$. Průměry tyto protínejtež se v bodu $U$. Považujeme-li spojnice $\overline{F_1R}$ a $\overline{E'P}$ za výšky trojúhelníka o vrcholech $S$ a $R$, vidíme ihned, že třetí jeho vrchol musí být totožný s bodem $P$. Jest tudíž $\overline{PF_1} \perp \overline{F_1N}$, pročež středem kružnice $\varepsilon$ opsané trojúhelníku $PNF_1$ jest bod $L$ na kružnici $\gamma$. Platí tedy: *Geometrickým místem středů všech kružnic, do nichž se křivka $k_3$ promítá z bodů na ní ležících do $\pi$, jest kružnice $\gamma$.* Všechny tyto kružnice procházejí bodem $F_1$ kružnice $\gamma$; obalují proto *kardioidu*. Označme ji $\sigma_1$. Poněvadž plocha tečen prostorové křivky 3. st. jest obalovou plochou všech kuželů 2 st., jimiž se křivka z bodů na ní ležících promítá, *protíná libovolná rovina s $\pi$ rovnoběžná obalovou plochu tečných rovin podél libovolné kardioidy uvažované plochy kardioidicko-šroubové vždy v kardioidě.*

Sestrojíme-li v bodech $P$ a $N$ tečny kružnic $i$ a $j$, musí jich průsečík $V$, co stopa tečny v bodu $X$ prostorové křivky $k_3$, ležeti na kružnici $\varepsilon$ a zároveň na kardioidě $\sigma_1$. Jest tudíž bod $V$ dotyčným bodem kružnice $\varepsilon$ s kardioidou $\sigma_1$ a tečna $v$ v bodě $V$ kružnice $\varepsilon$ jest tečnou kardioidy $\sigma_1$ a zároveň stopou půdorysnou oskulační roviny v bodu $X$ křivky $k_3$.

Dříve jsme odvodili, že roviny $\alpha$ a $\alpha'$ projektivných svazků o osách $e$ a $m$ protínají se v povrchové přímce $l$ hyperboloidu rotačního ($l_1 \equiv \overline{X_1 L}$). Poněvadž stopa $L$ přímky $l$ jest středem kružnice, do níž se křivka $k_3$ z bodu $X$ promítá, protíná přímka $l$ křivku $k_3$ pouze v jediném bodu $X$. Platí tudíž: *Spojnice bodů křivky $k_3$ s příslušnými středy kružnic, do nichž se křivka $k_3$ promítá do $\pi$ neb roviny s ní rovnoběžné, tvoří jednu soustavu povrchových přímek rotačního hyperboloidu; přímky tyto jsou unisekantami prostorové křivky $k_3$.*

Osy $e$ a $m$ uvedených projektivných svazků jsou, jak patrno, bisekantami křivky $k_3$ a tedy též všechny povrchové přímky našeho hyperboloidu téže soustavě náležející jsou bisekantami této křivky. Musí se proto půdorysná stopa $U$ povrchové přímky hyperboloidu bodem $X$ procházející a zmíněné soustavě náležející nacházeti na kružnici $\gamma$ i na kružnici $\varepsilon$; jest tudíž totožná s průsečíkem těchto kružnic.

Proložme si nyní bodem $X$ půdorysně promítací rovinu $\alpha''$ kolmou ku stopě $\overline{PE'}$ roviny $\alpha$. Budiž bod $Y$ průsečíkem spojnice $\overline{PT_1}$ s přímkou $a_1$ a bod $Z$ průsečíkem spojnice $\overline{A_1 N}$ s přímkou $\overline{E'T_1}$. Přihlédněme k rovnoběžníku $A_1 Z T_1 Y$. Půdorysná stopa $\alpha''_1$ zmíněné roviny jest patrně rovnoběžná se stranou $\overline{A_1 Z}$ tohoto rovnoběžníku, a poněvadž $\overline{NX} = \frac{1}{4}\overline{NB}$, musí též pro průsečík $D_1$ přímky $\alpha''_1$ s úhlopříčnou $\overline{A_1 T_1}$ rovnoběžníku platiti $\overline{A_1 D_1} = \frac{1}{4}\overline{A_1 T_1}$. Musí tudíž $\alpha''_1$ procházeti dvojným bodem $D_1$ trisekční křivky Mac-Laurinovy. Pohybuje-li se tedy bod $X$ po křivce $k_3$ a vedeme-li jím vždy rovinu kolmou ku příslušné půdorysné stopě bodem $X$ jdoucí roviny svazku rovin o ose $e$, tvoří tyto roviny svazek o ose $d \perp \pi$ ($d_1 \equiv D_1$). Patrně jest svazek $e\,(\alpha \ldots) \overline{\wedge}\, d\,(\alpha'' \ldots)$. Poněvadž sdružené roviny těchto svazků jsou k sobě kolmé, naplňují průsečnice jich *hyperboloid orthogonálný* křivkou $k_3$ procházející.

Mysleme si nyní křivku $k_3$ vytvořenou třemi projektivnými svazky rovin $e\,(\alpha \ldots) \overline{\wedge}\, m\,(\alpha' \ldots) \overline{\wedge}\, d\,(\alpha'' \ldots)$. Pak nachází se křivka $k_3$ též na ploše vytvořené svazky $m\,(\alpha' \ldots) \overline{\wedge}\, d\,(\alpha'' \ldots)$.

Poněvadž půdorysné stopy odpovídajících si rovin v těchto dvou svazcích jsou rovnoběžné a osa $d$ jest kolmá ku $\pi$, protínají se sdružené roviny těchto svazků v povrchových přímkách hyperbolického paraboloidu, jehož jednou řídící rovinou jest $\pi$. Přijdou-li stopy sdružených rovin těchto svazků do polohy kolmé k ose $x$, jsou příslušné roviny rovnoběžné a kolmé k ose $x$ a stanoví polohu druhé úběžné přímky hyperbolického paraboloidu. Řídící roviny jsou tudíž k sobě kolmé a uvažovaný, *křivkou $k_3$ procházející hyperbolický paraboloid jest rovnostranný.*

Z průběhu křivky $k_3$ v prostoru vidíme, že přímka bodem *1* procházející rovnoběžně s osou $x$ jest reálným průměrem křivky $k_3$. Bisekanty křivky $k_3$, jež jsou tímto průměrem půleny, naplňují, jak známo, hyperbolický paraboloid, jehož jednou řídící rovinou jest oskulační rovina v úběžném bodu křivky $k_3$. Poněvadž tento hyperbolický paraboloid obsahuje bisekanty $m$ a $d$ křivky $k_3$, musí býti totožný s rovnostranným hyperbolickým paraboloidem dříve uvažovaným, neboť dvěma bisekantami prostorové křivky 3 st. jest stanoven pouze jediný hyperboloid jí procházející (v uvažovaném případě hyp paraboloid).

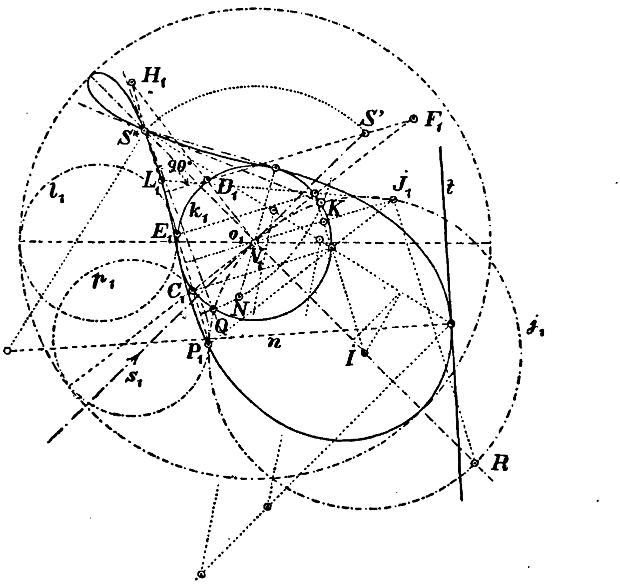
Průsek rozvinutelné plochy tečen křivky $k_3$ s půdorysnou možno stanoviti též následujícím způsobem. Stopa $T_1$ (obr. 2.) tečny šroubovice $š$ v bodu *1* opíše při kotálení kružnice $p_1$ po kružnici $k_1$ Pascalovu závitnici. Odkotálí-li se kružnice $p_1$ o úhel $\varphi$, otočí se stopa $\alpha'$ tečné roviny plochy kardioidicko-šroubové v bodu *1* kol příslušné polohy bodu $T_1$ o úhel $\frac{\varphi}{2}$ směrem protivným směru kotálení. Obalují tedy tyto stopy uvažovaných tečných rovin kardioidu na základě věty: Kotálí-li se kružnice po shodné kružnici a prochází-li zcela libovolným s hybnou kružnicí pevně spojeným bodem přímka, jež se kol tohoto bodu otáčí směrem protivným směru kotálení tak, by v každém okamžiku úhel, o nějž se hybná kružnice odkotálí, byl dvojnásobný úhlu, o který se kol. zmíněného bodu přímka otočí, tu obalí tato přímka kardioidu.

Uvažujme dále tečné roviny dotýkající se plochy podél šroubovice $^1š$ (obr. 1.). Půdorysná stopa $P^r$ tečné roviny plochy v bodu $X$ šroubovice $^1š$ prochází půdorysnou stopou $\pi$ tečny šroubovice v bodé $X$, ležící na evolventě kružnice $l_1$, rovnoběžně ku tečně kardioidy v bodu $X$. Stopa $P\tau'$ roviny vrcholem $V$ řídícího kužele rovnoběžně vedené ku této tečné rovině musí procházeti půdorysnou stopou $\pi'$ paprsku vrcholem $V$ rovnoběžně vedeného ku tečně šroubovice v bodu $X$ a bodem $E_1$ neboť $\triangle X_1 Z_1 A_1 \cong E_1 o_1 \pi'$. Podobně musí bodem $E_1$ procházeti i stopy ostatních rovin vrcholem $V$ rovnoběžně vedených ku tečným rovinám plochy podél šroubovice ${}^1š$. Tvoří tudíž tyto roviny svazek o ose $\overline{VE_1}$, z čehož plyne, že podél šroubovice ${}^1š$ dotýká se naší plochy válec, jehož povrchové přímky jsou rovnoběžny s přímkou $\overline{VE_1}$. Totéž platí o šroubovicích ${}^2š$ a ${}^2š'$ na rotačním válci nad kružnicí $i_1$. Platí proto: *Jsou-li světelné paprsky rovnoběžné ku některé tečně šroubovice š, sestává mez vlastního stínu naší plochy ze tří šroubovic.*

Uveďme ještě osvětlení naší plochy pro libovolný směr paprsků světelných. O sestrojení půdorysu meze stínu vlastního na plochách šroubových vzniklých šroubovým pohybem cyklických křivek pojednává Dr. L. Burmester*). Co půdorys meze stínu vlastního, odvozený pomocí kinematické geometrie, dostává křivku 6. řádu, zvanou *kranioida*, jež ve zvláštních případech se rozpadá v křivku 4. řádu a kružnici. Do této skupiny náleží i naše plocha. Poněvadž kružnice, tvořící zde část kranioidy, k půdorysu meze stínu vlastního nenáleží, zbývá co půdorys křivka 4. řádu, již nazveme *kranioida jednoduchá.* Konstrukci tohoto půdorysu odvodíme snadno geometricky. Budiž (obr. 8.) kružnice $k_1$ půdorysem šroubovice $š$ a kružnice $l_1$ půdorysem šroubovice ${}^1š$, jejímž kotálením po šroubovici $š$ naše plocha povstane. Stopa paprsku světelného vedeného známým vrcholem $V$ budiž $S'$. Podél každé polohy šroubovice ${}^1š$ dotýká se naší plochy válec, jehož povrchové přímky jsou rovnoběžny vždy ku společné tečně obou šroubovic v jich bodu styku. Z tečných rovin těchto ploch válcových vyhledáme ony, jež jsou rovnoběžné se zvoleným směrem paprsků. Uvažujme polohu šroubovice ${}^1š$, by jejím půdorysem byla kružnice $p_1$ dotýkající se kružnice $k_1$ v bodu $C_1$. Vrcholem $V$ veďme rovnoběžku ku

*) Dr. *L. Burmester*: Kinematisch-geometrische Constructionen etc. Zeitschrift für Math. u. Physik, 1873, B. 18 p. 197—200.

společné tečně šroubovic v bodu $C$; stopu její označme $D_1$. Spojnice $\overline{D_1 S'}$ jest půdorysnou stopou roviny rovnoběžně vedené bodem $V$ ku světelné rovině proložené tečnou šroubovic v bodu $C$. Chceme-li sestrojiti půdorysný průmět bodu dotyku tečné roviny naší plochy s touto světelnou rovinou rovnoběžné, musíme z bodu $C_1$ spustiti kolmici ku přímce $D_1 S'$, jež protne kružnici $p_1$ v hledaném průmětu $P_1$ dobu dotyku. Je-li bod $F_1$




Obr. 8.

průsečíkem přímek $\overline{C_1 V_1}$ a $\overline{D_1 S'}$ a bod $H_1$ průsečík přímek $\overline{C_1 P_1}$ a $\overline{V_1 D_1}$, jest $\triangle\, C_1 V_1 H_1 \cong D_1 V_1 F_1$. Strany těchto trojúhelníků stojí k sobě kolmo, a tedy příčce $\overline{V_1 S'}$ prvého trojúhelníka bude odpovídati kolmá k ní příčka druhého trojúhelníka a protne jeho přeponu v bodu $S^*$. Patrně $V_1 S' = V_1 S^*$. Bod $S^*$, jenž vznikne otočením bodu $S'$ okolo $V_1$ o $90^0$ směrem šroubování a jenž při opakující se konstrukci svoji polohu nemění, jmenujeme pólem světelných paprsků. Půdorys meze stínu vlastního tvoří tedy ony body kardioidy $r_1$ otáčející se kol bodu $o_1$, jichž normály procházejí pólem $S^*$ světelného paprsku. Tato okolnost zůstává v platnosti, jak známo, vykonává-li pohyb šroubový libovolná rovinná křivka. Paprsek $S^*P_1$ protíná kružnici $k_1$ v bodu $E_1$ a jest $\overline{E_1C_1} = \overline{C_1P_1}$. Platí proto pro půdorys meze vlastního stínu konstrukce: Pólem světelných paprsků vedeme sečny kružnice $k_1$ a příslušné tětivy nanášíme od obou průsečíků s kružnicí $k_1$ na opačnou stranu, čímž dostáváme body průmětu meze stínu vlastního. Pól $S^*$ jest dle polohy buď bodem dvojným, bodem vratu nebo isolovaným bodem křivky. Je-li pól $S^*$ bodem dvojným, jsou tečnami v něm přímky vytínající na kružnici $k_1$ tětivy rovné vzdálenosti bližšího průsečíku jich s kružnicí $k_1$ od pólu $S^*$. Nazveme-li délku této tětivy $u$ a délku tečny z bodu $S^*$ ke kružnici $k_1$ označíme $t$, musí

$$t^2 = 2u \, . \, u$$

čili

$$u^2 = \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} \, .$$

Vedeme tedy z pólu $S^*$ tečnu, dotyčný bod spojíme se středem $V_1$ a naneseme na tuto spojnici od bodu dotyku délku tečny $t$ do bodu $N$. Poloměrem $\overline{S^*N}$ protneme z pólu $S^*$ kružnici $k_1$ v bodech $K$ a $Q$. Tečnami křivky v dvojném bodu jsou přímky $\overline{S^*K}$ a $\overline{S^*Q}$.

Rovnici této křivky v nejjednodušším tvaru dostaneme, volíme-li bod $S^*$ za počátek souřadnic a spojnici $\overline{S^*V_1}$ za kladnou osu $x$. Označíme-li úsečku $\overline{S^*V_1} = a$ a značí-li $r$ poloměr kružnice $k_1$, zní rovnice uvažované kranioidy jednoduché v souřadnicích pravoúhlých

$$[x^2 + y^2 - 2ax + 9\,(a^2 - r^2)]\,(x^2 + y^2) - 8a^2x^2 = 0 \quad (1)$$

a v souřadnicích polárních

$$(\varrho - a \cos w)^2 - 9\,(r^2 - a^2 \sin^2 w) = 0. \quad (2)$$

Leží-li pól $S^*$ na kružnici $k_1$, jest $a = r$ a rovnice po upravení zní:

$$(x^2 + y^2 + 2xr)\,(x^2 - 4xr + y^2) = 0\,;$$

křivka se zde rozpadá ve dvě kružnice, jak jest též patrno z dříve uvedeného případu osvětlení, když směr paprsků světelných jest rovnoběžný s tečnou šroubovice $s$.

Zapadne-li pól $S^*$ do středu $V_1$, jest $a = 0$; dostaneme z rovnice (1)

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 9r^2) = 0;$$

křivka se rozpadá v kružnici o poloměru $3r$ a přímky isotropické.

Z výrazu pro polární subnormálu

$$\frac{d\varrho}{dw} = \frac{-a(\varrho \sin w + 8a \sin w \cos w)}{\varrho - a \cos w}$$

snadno sestrojíme normálu a tečnu v bodu $P$ křivky.

Vztyčme v bodech $E_1$ a $C_1$ kolmice ku přímce $S^*P_1$ protínající kružnici $k_1$ ve dvou bodech. Spojme prvý bod s bodem $L_1$ a druhý s bodem $P_1$ kranioidy a průsečík těchto přímek označme $J_1$. Vidíme, že $\triangle L_1P_1J_1$ jest rovnoramenný a bod $V_1$ nachází se v jedné třetině jeho výšky jdoucí bodem $J_1$. Vztyčíme-li tedy v bodu $J_1$ kolmici k této výšce, protne tato přímku $S^*V_1$ v bodu $R$ a patrně $V_1R = 2a$. Bod $J_1$ nachází se proto na kružnici $j_1$ nad průměrem $\overline{V_1R}$. Vytvoří se tudíž naše křivka též pohybem proměnného rovnoramenného trojúhelníka způsobem uvedeným sestrojeného, při čemž dva jeho vrcholy opisují kranioidu a třetí kružnici $j_1$. Kružnice $j_1$ nezávisí, jak patrno, na poloměru $r$, pročež jest společnou všem křivkám o daném $a$ a měnícím se poloměru $r$ od 0 do $\infty$. Pro $r < a$ přichází k platnosti pouze část kružnice $j_1$, pro $r = a$ a $r > a$ přichází k platnosti kružnice celá.

---

# Předběžný výpočet fási slunečního zatmění pro dané místo.

Napsal Dr. **Karel Holub**.

Zatmění sluneční, závislo jsouc na určitém vzájemném postavení slunce, měsíce a země, jest, jak všeobecně známo, zjevem periodicky se vracejícím, a my jsme tedy s to předvídati návrat jeho a znajíce polohu slunce a měsíce v prostoru světovém, stanoviti předem polohu stínového kužele a tím průběh zatmění po povrchu zemském; my můžeme dále rozhodnouti, pro která