Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 5, 649--716

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109209

přímý ohon byl 60′ dlouhý. V následujících dnech byla pozorována na různých místech. Z těch prvních pozorování vypočetl Kobold tyto parabolické elementy:

$$T = 1914 \text{ květen } 8{\cdot}3618 \text{ stř. č. berl.}$$
$$\left.\begin{aligned} \omega &= 116^{0}\,18' \\ \lambda &= 32\;\;43 \\ i &= 112\;\;56 \end{aligned}\right\} 1914.0$$
$$\log q = 9{\cdot}7348$$

Prošla tedy přísluním již před objevením 8. května ve vzdálenosti 0·543 (81 mill. *km*) od Slunce. Zemi byla nejblíže v druhé polovici května na vzdálenost 0·528 (79 mill. *km*).

Elementy, které odvodil A. Schwassmann (A. N. 4739) z pozorování vykonaných do 22. května, neliší se valně od svrchu uvedených elementů Koboldových. Vyplývá z nich pro konec června tato efemerida:

Datum	AR	δ	Vel.
VI. 22.	9^h21^m	$-\;8^{0}$	8·7
25.	9 26	-10	8·9
28.	9 30	-11	9·2
VII. 1.	9 34	-12	9·4

Ze souhvězdí Persea vystoupila 20. května směrem východním do souhvězdí Vozky. Tam minula následujícího dne Capellu a přešla 26. května do souhvězdí Blíženců. Koncem května přestoupila do souhvězdí Raka směřujíc k souhvězdí Hydry, kam přešla 6. června. *S.*

Úlohy.

Řešení úloh.

Z mathematiky.

1.

Stanovte součet řady $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ *v níž jest*
$$a_n = \alpha\, a_{n-1} + \beta^{n-1}.$$

Jan Svoboda, úř. hypot. banky v Brně.

Řešení. Zaslal p. *E. Pokorný*, stud. VI. tř. g. v Praze v Žitné ul.

Pišme

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1\\ a_2 &= \alpha a_1 + \beta\\ a_3 &= \alpha a_2 + \beta^2 = \alpha^2 a_1 + \alpha\beta + \beta^2\\ a_4 &= \alpha a_3 + \beta^3 = \alpha^3 a_2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

Soudíme tedy, že bude obecně

$$a_n = \alpha^{n-1} a_1 + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{u-1}.$$

To dokážeme úplnou indukcí. Předpokládejme, že platí vzorec tento pro $n-1$, tedy že

$$a_{n-1} = \alpha^{n-2} a_1 + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}.$$

I bude skutečně

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta^{n-1} = \alpha^{n-1} a_1 + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}.$$

Můžeme též psáti

$$a_n = \alpha^{n-1} a_1 + \beta(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \alpha^{n-4}\beta^2 + \ldots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^{n-2})$$

a sečteme-li geometrickou řadu v závorce

$$a_n = \alpha^{n-1} a_1 + \beta\,\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}.$$

Bude tedy součet

$$\begin{aligned}s_n = \sum_{n=1}^{n} a_n &= a_1(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1})\\ &+ \frac{\beta}{\alpha-\beta}\left[(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) - (1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1})\right]\\ &= a_1\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + \frac{\beta}{\alpha - \beta}\left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} - \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)\end{aligned}$$

Nekonečnou řadu konvergentní obdržíme pro $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Její součet bude

$$s = \lim_{n=\infty} s_n = \frac{a_1}{1-\alpha} + \frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

2.

V městě vypukla epidemická nemoc probíhající tak, že postižený po dvou dnech umírá a že po oba dny nakazí dosud zdravého člověka. Kolik úmrtí bude n-tý den a kolik za n dní vůbec, je-li n dosti velké. Dr. *Karel Čupr.*

Řešení. Zaslal p. *Boh. Kamenický*, stud. VII. tř. r. na Kr. Vinohradech.

Onemocněvší dnes, umírá po dvou dnech; nakazí tedy druhého dne jednu osobu a třetího dne ještě jednu. Třetího dne však stihne nákaza dvě osoby: jednak od osoby onemocněvší dnes a od osoby onemocněvší druhého dne atd.

Podobně je tomu s úmrtím: Třetí den umře jedna osoba, čtvrtý den opět jedna, kterou tato nakazila, pátý den umrou dvě: osoba nakažená od první a osoba nakažená od osoby umřevší druhého dne; můžeme z toho tedy sestaviti rovnou vzorec

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

řada ta tedy jest, začneme-li počítati dnem, kdy umře prvá osoba,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Pro součet bude platiti vzorec

$$s_n = a_{n+2} - 1.$$

O tom se přesvědčíme úplnou indukcí

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} - 1 = a_{n+3}, - 1, \text{j. b. d.}$$

Členy uvedené řady. která se nazývá řadou Fibonacciovou, dají se vyjádřiti jako součty příslušných členů dvou řad geometrických. Lze klásti

$$a_n = a\alpha^n + b\beta^n,$$

kdež a a b nezávisí na n.

Dosadíme-li do relace

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

příslušné hodnoty, obdržíme

$$a\alpha^{n-2}(\alpha^2 - \alpha - 1) + b\beta^{n-2}(\beta^2 - \beta - 1) = 0.$$

Relace ta bude splněna pro n jakékoliv, budou-li α a β kořeny rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

tedy na př.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Abychom určili a, b, klaďme $n = 1, 2$; pak

$$a_1 = 1 = a\alpha + b\beta$$
$$a_2 = 1 = a\alpha^2 + b\beta^2$$

a odtud

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Avšak $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, jest tedy $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ co do absolutní hodnoty menší než 1, a tudíž přibližně

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

a

$$s_n = a_{n+2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - 1.$$

3.

Nalézti součet racionálných členů rozvoje $(\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{3})^{31}$.

Prof *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal pan *Jaroslav Knotek*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.

Obecný tvar členů rozvoje jest

$$\binom{31}{k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^l\left(\sqrt[4]{3}\right)^k,$$

kdež

$$l + k = 31.$$

Členy racionální obdržíme, budou-li $\frac{l}{3}$ a $\frac{k}{4}$ čísla celá. Klademe-li

$$\frac{l}{3} = x, \quad \frac{k}{4} = y,$$

musí býti splněna rovnice

$$3x + 4y = 31,$$

kdež x a y jsou celá čísla kladná. Pišme

$$x = \frac{31 - 4y}{3} = 10 - y - \frac{y-1}{3}.$$

I vidíme, že x bude celé číslo, bude-li $\frac{y-1}{3}$ celé číslo $= t$. Pak

$$y = 1 + 3t, \quad x = 9 - 4t.$$

Kladná čísla obdržíme pro

$$\begin{array}{llll} t = 0, & 1, & 2 & \\ x = 9, & 5, & 1 & l = 27, \; 15, \; 3 \\ y = 1, & 4, & 7 & k = 4, \; 16, \; 28. \end{array}$$

Členy racionální jsou pak

$$\begin{aligned} \binom{31}{4} 2^9 \,.\, 3 &= \qquad 48{,}330.240 \\ \binom{31}{16} 2^5 \,.\, 3^4 &= 779.000{,}185.440 \\ \binom{31}{28} 2 \,.\, 3^7 &= \qquad 19{,}661\,130 \end{aligned}$$

a jich součet

$$779.068{,}176.810$$

4.

Dány jsou tři nekonečné řady konvergentní

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + \sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \ldots \\ S_2 &= 1 - \sin\alpha + \sin^2\alpha - \sin^3\alpha + \ldots \\ \Sigma &= 1 - \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \cos^3 2\alpha + \ldots \end{aligned}$$

Jest dokázati vztahy:

$$S_1 S_2 = 2\Sigma, \quad S_1 + S_2 = 4\Sigma.$$

Podobně pro nekonečné řady:

$$S'_1 = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \ldots$$
$$S'_2 = 1 - \cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \ldots$$
$$\Sigma' = 1 + \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^3 2\alpha + \ldots$$

jest dokázati vztahy

$$S'_1 S'_2 = 2\ \Sigma',\ S'_1 + S'_2 = 4\Sigma'.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Dle známého výrazu pro součet nekonečné konvergentní řady geometrické jest

$$S_1 = \frac{1}{1 - \sin\alpha},\ S_2 = \frac{1}{1 + \sin\alpha},\ \Sigma = \frac{1}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Z toho

$$S_1 S_2 = \frac{1}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \Sigma = \frac{1}{2\cos^2\alpha},$$

pročež

$$S_1 S_2 = 2\Sigma.$$

Dále jest

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{1 - \sin\alpha} + \frac{1}{1 + \sin\alpha} = \frac{2}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

a přímo

$$S_1 + S_2 = 4\Sigma.$$

Podobně pro další nekonečné řady platí

$$S'_1 = \frac{1}{1 - \cos\alpha},\ S'_2 = \frac{1}{1 + \cos\alpha},\ \Sigma' = \frac{1}{1 - \cos 2\alpha}$$

a

$$S'_1 S'_2 = \frac{1}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \Sigma' = \frac{1}{2\sin^2\alpha},$$

čili

$$S'_1 S'_2 = 2\Sigma'.$$

Protože

$$S'_1 + S'_2 = \frac{1}{1 - \cos\alpha} + \frac{1}{1 + \cos\alpha} = \frac{2}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha},$$

jest též

$$S'_1 + S'_2 = 4\Sigma'.$$

5.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\cos\frac{x-y}{2} : \cos\frac{x+y}{2} = \varrho$$

$$\sin x : \sin y = p : q.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VII. tř. I. r. v Brně.

Na základě první úměry platí též úměra

$$\left(\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\right) : \left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = (\varrho + 1) : (\varrho - 1)$$

čili

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}} = \frac{\varrho+1}{\varrho-1}. \tag{1}$$

Druhá úměra, použijeme-li funkcí polovičních úhlů, přechází ve tvar

$$\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = \frac{p}{2}. \tag{2}$$

Násobením rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}} = \frac{1+\cos x}{1-\cos y} = \frac{p(\varrho+1)}{q(\varrho-1)} \tag{3}$$

a dělením

$$\frac{\cos^2\frac{y}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\cos y}{1-\cos x} = \frac{q(\varrho+1)}{p(\varrho-1)}. \tag{4}$$

Z rovnic (3) a (4), které jsou lineární vzhledem ke $\cos x$ a *cos y*, vypočteme

$$cos\, x = \frac{q\,(\varrho^2 + 1) + p\,(\varrho^2 - 1)}{2\varrho p}$$

$$cos\, y = \frac{p\,(\varrho^2 + 1) + q\,(\varrho^2 - 1)}{2\varrho p}.$$

6.

Ve čtyřúhelníku ABCD půlí úhlopříčna AC úhel při vrcholu A; nalézti úhly a plochu jeho, dány-li délky stran a, b, c, d. Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *B. Kamenický*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Předpokládejme, že jest na př. $a > d$. (V případě, že $a = d$, jest $b = c$ a daný čtyřúhelník jest deltoid, úloha pak stává se neurčitou.)

Sestrojme na straně AB bod D' souměrný s vrcholem D dle úhlopříčky AC. Vznikne tak trojúhelník BCD', v němž známe strany $BC = b$, $CD' = c$, $D'B = a - d$.

Můžeme tedy snadno vypočítati úhel $\beta = D'BC$. Máme, značí-li $2s = a + b + c - d$

$$sin\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - a + d)\,(s - b)}{(a - d)\,b}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-a + b + c + d)\,(a - b + c - d)}{4\,(a - d)\,b}}$$

$$cos\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - c)}{(a - d)\,b}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + b + c - d)\,(a + b - c - d)}{4\,(a - d)\,b}}$$

$$tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - a + d)\,(s - b)}{s\,(s - c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-a + b + c + d)\,(a - b + c - d)}{(a + b + c - d)\,(a + b - c - d)}}$$

$$sin\,\beta = \frac{2\sqrt{s\,(s - a + d)\,(s - b)\,(s - c)}}{(a - d)\,b}$$

$$= \frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b+c-d)(a+b-c-d)}}{2\,(a - d)\,b}.$$

Úhel $\delta' = CD'B = \pi - \delta$.

I lze podobně vypočísti

$$\sin\frac{\delta'}{2} = \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a+d)(s-c)}{(a-d)c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-a+b+c+d)(a+b-c-d)}{4(a-d)c}}$$

$$\cos\frac{\delta'}{2} = \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(a-d)c}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a-b+c-d)}{4(a-d)c}}$$

$$tg\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a+d)(s-c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a-b+c-d)}{(-a+b+c+d)(a+b-c-d)}}$$

$$\sin\delta = \frac{2\sqrt{s(s-a+d)(s-b)(s-c)}}{(a-d)c}$$

$$= \frac{\sqrt{-a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b+c-d)(a+b-c-d)}}{2(a-d)c}.$$

Ze vzorce pro plochu

$$P = \tfrac{1}{2}(ab \sin\beta + cd \sin\delta)$$

obdržíme pak

$$P = \frac{a+d}{a-d}\sqrt{s(s-a+d)(s-b)(s-c)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{a+d}{a-d}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b+c-d)(a+b-c-d)}.$$

7.

Dokázati jest platnost této relace pro tětivový čtyřúhelník

$$(a^2 - c^2) : (b^2 - d^2) = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta).$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *B. Tetour,* stud. VII. tř. g. v Kroměříži.

Značí-li m, n úhlopříčky, jest na základě věty cosinusové ve čtyřúhelníku tětivovém:

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos\beta$$
$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos\alpha,$$

a tedy

$$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 2 \cos\beta\,(ab + cd)$$
$$a^2 - c^2 - (b^2 - d^2) = 2 \cos\alpha\,(ad + bc),$$

neboli

$$\frac{(a^2 - c^2) + (b^2 - d^2)}{(a^2 - c^2) - (b^2 - d^2)} = \frac{\cos\beta\,(ab + cd)}{\cos\alpha\,(ad + bc)}.$$

Plocha čtyřúhelníku tětivového dána jest vzorci

$$\frac{ab}{2} \sin\beta + \frac{cd}{2} \sin\beta = \frac{ad}{2} \sin\alpha + \frac{bc}{2} \sin\alpha$$

a jest tedy

$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Jest tudíž

$$\frac{(a^2 - c^2) + (b^2 - d^2)}{(a^2 - c^2) - (b^2 - d^2)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \sin\beta}$$

a též

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)},$$

jak bylo dokázati.

8.

Plocha čtyřúhelníku harmonického (v němž $ac = bd$) jest dána formulí

$$P = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d)(a - b + c - d)\, tg\,\omega,$$

značí-li ω úhel sevřený úhlopříčnami. Prof. *Rud Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VII. tř. r. v Brně.

Ve čtyřhelníku obecném jest plocha vyjádřena vzorcem

$$P = \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\, tg\,\omega.$$

Vzhledem k identitě $ac = bd$ jest

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = (a + c)^2 - (b + d)^2$$
$$= (a + b + c + d)(a - b + c - d)$$

a tedy
$$P = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d)(a - b + c - d)\, tg\, \omega,$$
jak bylo dokázati.

9.

Výšky trojúhelníku jsou kořeny rovnice třetího stupně
$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0.$$
Vyjádřiti poloměr kružnice trojúhelníku vepsané pomocí koefficientů rovnice té. *Fr. Svoboda* (Brno).

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Jsou-li výšky x_1, x_2, x_3 trojúhelníku o stranách a, b, c kořeny rovnice
$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$
platí
$$x_1 + x_2 + x_3 = -m, \; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = n, \; x_1x_2x_3 = -p.$$
Dále jest, je-li $\varDelta$ obsah toho trojúhelníku
$$a = \frac{2\varDelta}{x_1}, \quad b = \frac{2\varDelta}{x_2}, \quad c = \frac{2\varDelta}{x_3},$$
$$\varDelta = \frac{a + b + c}{2} = \frac{2\varDelta}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)$$
$$= \varDelta \cdot \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3},$$
čili
$$s = -\varDelta \cdot \frac{n}{p}.$$

Protože poloměr kružnice vepsané trojúhelníku jest dán vzorcem $\varrho = \dfrac{\varDelta}{s}$, plyne okamžitě
$$\varrho = -\frac{p}{n}.$$

10.

Jest dán libovolný trojúhelník. Sestrojte trojúhelník podobný tak, aby jeho vrcholy ležely na třech daných rovnoběžkách. Kolikaznačná jest úloha ta?

Určete součet ploch trojúhelníků, které řešením této úlohy dostaneme, jsou-li dány úhly a vzdálenost rovnoběžek m a n.

Dr *Bohuslav Němec.*

Řešení dle p. autora.

I. Daný trojúhelník měj vrcholy A, B, C, jimiž procházejí rovnoběžky R_A, R_B, R_C. Opíšeme-li mu kružnici, protíná ony rovnoběžky v bodech A_1, B_1, C_1. Spojíme-li tyto body s vrcholy trojúhelníka, dostaneme u vrcholu C_1 obvodové úhly α a β a podobně u ostatních.

Z toho plyne konstrukce zcela snadno. V libovolném bodu kterékoliv rovnoběžky na př. v bodě A_1 rovnoběžky R_A naneseme si na každou stranu jeden úhel. Ramena jich dvakráte protínají druhé dvě rovnoběžky. Tím dostaneme na R_B bod B, na R_C bod C, tedy dva vrcholy žádaného trojúhelníka. Sestrojíme-li nyní kružnici, procházející body B, C a A_1, protne nám rovnoběžku R_A v bodě A, který jest žádaným třetím vrcholem. Zvolíme-li si druhé dva průsečíky, dostaneme jiný trojúhelník, tedy celkem při této dvojici úhlů dva trojúhelníky. Z hořejšího rozboru plyne, že dostaneme týž trojúhelník třemi způsoby. Ježto pak lze na každé rovnoběžce úhly šestkráte po dvou sestaviti, tedy celkem jest zde 18 trojúhelníků možných, z nichž vždy tři budou spolu shodny. Jest tudíž úloha šestiznačná.

II. Jiné řešení. Protneme-li rovnoběžky kolmicí, dostaneme body A, B_1, C_1. Zvolíme-li si AC_1 za stranu našeho trojúhelníka, octne se bod B_1 mimo rovnoběžku R_B. Vztyčíme-li v bodě B_1 kolmici na stranu AB_1 (nebo C_1B_1), protne nám tato kolmice rovnoběžku R_B v bodě P. O úhel BAB_1 otočíme i stranu AC_1, takže se octne bod C_1 v novém bodě C na rovnoběžce R_C. Trojúhelník ABC jest již žádaný obrazec, neboť z úměrnosti stran

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$$

a z rovnosti úhlů BAC a B_1AC_1 plyne i úměrnost stran B_1C_1 a BC.

Na každé rovnoběžce lze vrchol A pomocného trojúhelníka umístiti pouze dvakráte, chceme-li dostati různé trojúhelníky. Jest tudíž úloha šestiznačná.

III. Opíšeme-li opětně našemu trojúhelníku kružnici, dostaneme na jedné rovnoběžce na př. průsečík C_1. Rovnoběžka R_C svírá se spojnicemi bodu C_1 s A a B úhly β a α.

I lze délku AC_1 i BC_1 ihned stanoviti a z nich také AB.

$$AC_1 = \frac{n}{sin\,\beta},\quad BC_1 = \frac{m}{sin\,\alpha}$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{n^2}{sin^2\beta} + \frac{m^2}{sin^2\alpha} - \frac{2nm}{sin\,\alpha\; sin\,\beta}\, cos\,(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{n^2}{sin^2\beta} + \frac{m^2}{sin^2\alpha} + \frac{2nm}{sin\,\alpha\; sin\,\beta}\, cos\,\gamma.$$

Ale délku AB lze vyjádřiti také poloměrem kružnice opsané

$$AB = 2r\; sin\,\gamma,$$

z čehož plyne

$$r = \frac{1}{2\,sin\,\alpha\; sin\,\beta\; sin\,\gamma}\sqrt{n^2 sin^2\alpha + m^2 sin^2\beta + 2nm\; sin\,\alpha\; sin\,\beta\; cos\,\gamma}.$$

Známe-li poloměr kružnice opsané, známe již i plochu onoho trojúhelníka. I bude součet ploch roven

$$\Sigma\Delta = 2\; sin\,\alpha\; sin\,\beta\; sin\,\gamma\; \Sigma r^2.$$

Učiníme-li skutečně součet všech r^2 a dosadíme-li, dostaneme

$$\Sigma\Delta = \frac{2(m^2+n^2)(sin^2\alpha + sin^2\beta + sin^2\gamma) + 4nm(sin\,\alpha\, sin\,\beta\, cos\,\gamma + sin\,\alpha\, sin\,\gamma\, cos\,\beta + sin\,\beta\, sin\,\gamma\, cos\,\alpha)}{2\, sin\,\alpha\, sin\,\beta\, sin\,\gamma},$$

což konečně po krátké úpravě dává

$$\Sigma\Delta = \frac{2\,(m^2+n^2+nm)\,(1+cos\,\alpha\; cos\,\beta\; cos\,\gamma)}{sin\,\alpha\; sin\,\beta\; sin\,\gamma}.$$

11.

Z jistého bodu vycházejí tři polopaprsky. Jest sestrojiti trojúhelník o stranách a, b, c tak, aby jeho vrcholy ležely na těchto paprscích. Dr. *Bohuslav Němec.*

Řešení. Zaslal p. *E. Šlechta*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.

Opišme danému trojúhelníku kružnici K, která protíná ony paprsky v bodech A_1, B_1, C_1. Úhly BB_1C a BAC, BB_1A a ACB atd. se sobě rovnají. Z toho jest sestrojení zřejmé. V libovolném bodě paprsku naneseme na obě strany dva úhly daného trojúhelníka, na př. α a β. Průsečíky jich ramen s paprsky spojíme a dostaneme takto stranu trojúhelníka, která jest úměrna a rovnoběžna se stranou žádaného trojúhelníka, zde AB. Zvětšíme-li ji tedy známým způsobem, dostaneme stranu našeho trojúhelníka, která má takovou polohu, že lze skutečně protilehlý vrchol na třetím paprsku umístiti.

Na jednom paprsku můžeme úhly α, β a γ celkem třikráte zaměniti, při čemž dostaneme vždy dva průsečíky ramen každého úhlu s druhými paprsky. Celkem tedy dostaneme obecně šest různých poloh trojúhelníka našeho vzhledem k daným paprskům.

12.

Rovnoramenný trojúhelník proměníme v jiný rovnoramenný o témž obvodě tak, aby základna druhého rovnala se rameni prvého. Dokázati, že opakováním této konstrukce dospěli bychom k trojúhelníku rovnostrannému. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslala slč. *Zdenka Horáková,* stud. V. tř. r. gymn. Minervy v Praze.

Základna prvého trojúhelníka budiž z_1, rameno r_1; potom

$$z_2 = r_1,$$

rovnost obvodů pak dává

$$z_1 + r_1 = 2r_2,$$

z čehož vyplývá

$$z_2 - r_2 = \tfrac{1}{2}(r_1 - z_1).$$

Podobně jest

$$z_3 = r_2,$$
$$2r_3 = z_2 + r_2;$$

tudíž

$$z_3 - r_3 = \tfrac{1}{2}(r_2 - z_2).$$

Označíme-li rozdíl

$$| r_1 - z_1 |$$

písmenou d, jest

$$
\begin{aligned}
|\,z_2 - r_2\,| &= \tfrac{1}{2}\, d,\\
|\,z_3 - r_3\,| &= \tfrac{1}{4}\, d,\\
|\,z_4 - r_4\,| &= \tfrac{1}{8}\, d, \quad \text{atd.}
\end{aligned}
$$

z čehož jest zřejmo, že rozdíl základny a ramene blíží se nulle, což bylo dokázati.

13.

Jaký musí býti poloměr a výška válcové nádoby plechové určitého objemu a tloušťky dna i pláště, aby váha byla co nejmenší? Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Kouba*, stud. VII*a* tř. r. v Karlíně.

Objem budiž

$$O = \pi r^2 v,$$

pak při tloušťce t a sp. váze s jest váha

$$
\begin{aligned}
V &= \left[\pi (r + t)^2\, t + \frac{2\pi r + 2\pi\,(r + t)}{2}\, tv\right] s\\
&= \left[(r + t)^2 + (2r + t)\, v\right] \pi t s.
\end{aligned}
$$

Položme

$$y = (r + t)^2 + (2r + t)\, v,$$

odkudž vylučme v a za r pišme x, načež obdržíme

$$
\begin{aligned}
y &= (x + t)^2 + (2x + t)\,\frac{O}{\pi x^2},\\
y' &= 2\,(x + t) + \frac{2O}{\pi x^2} - 2\,\frac{(2x + t)\,O}{\pi x^3},\\
&(x + t) + \frac{O}{\pi x^2} - \frac{(2x + t)\,O}{\pi x^3} = 0,
\end{aligned}
$$

čili

$$
\begin{aligned}
(x + t)\,\pi x^3 + Ox - (2x + t)\,O &= 0,\\
(x + t)\,(\pi x^3 - O) &= 0,
\end{aligned}
$$

což pro minimum skýtá hodnotu

$$x = r = \sqrt[3]{\frac{O}{\pi}}, \qquad v = \sqrt[3]{\frac{O}{\pi}},$$

takže oba rozměry jsou stejné.

14.

Ze všech kulových úsečí o daném povrchu nalézti onu, která má největší objem. Šk. rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *J. Hak,* stud. VII tř. r. v Brně.

Objem úseče jest

$$V = \frac{\pi v^3}{3}(3r - v).$$

Povrch její je složen z vrchlíku a kruhu poloměru ϱ; ježto $\varrho^2 = v(2r - v)$, jest

$$P = 2\pi rv + \pi v(2r - v)$$
$$= 4\pi rv - \pi v^2$$

a poloměr r z tohoto vztahu jest

$$r = \frac{P + \pi v^3}{4\pi v}.$$

Hodnotu za r dosadíme do výrazu pro V

$$V = \frac{\pi v^2}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{P + \pi v^3}{\pi v} - v\right),$$

čili po zkrácení

$$V = \frac{P}{4}v - \frac{\pi}{12}v^3.$$

Maximum pro V nastane, když prvá derivace jest rovna nulle, to jest

$$\frac{P}{4} - \frac{\pi}{4}v^2 = 0,$$

neboli

$$v^2 = \frac{P}{\pi},$$

kamž za P dosadíme původně nalezenou hodnotu; pak

$$v^2 = 4rv - v^2;$$

kořen $v = 0$ nemá významu, musí tedy

$$v = 2r.$$

Druhá derivace $-\frac{\pi}{2}v$ nabývá záporné hodnoty $-\pi r$. Úsečí daného povrchu a největšího objemu jest koule, kterou možno považovati za krajní případ úseče. Dosadíme-li $v = 2r$ do výrazu pro P, jest ovšem

$$P = 4\pi r^2.$$

15.

Do úseče parabolické, již vytíná tětiva kolmá k ose, vepsati pravoúhelník největší plochy a určiti plochu tu.

Šk. rada *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *Boh. Kamenický*, stud. VII*a* tř. r. na Král. Vinohradech.

Parabola budiž dána rovnicí $y^2 = 2px$, tětiva $x = a$; jeden vrchol čtyřúhelníku má souřadnice x, y [ostatní vrcholy: $(x, -y)$, (a, y), $(a, -y)$].

Plocha pravoúhelníku

$$P = 2y\,(a - x).$$

Dosadíme z rovnice paraboly

$$P = 2\sqrt{2px}\,(a - x) \tag{1}$$

čili

$$f(x) = P^2 = 8px^3 - 16apx^2 + 8a^2px.$$

Maximum této funkce nastane při

$$f'(x) = 24px^2 - 32apx + 8a^2p = 0.$$

Rovnice tato poskytuje pro x kořeny

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a}{3}.$$

Pro $x = \frac{a}{3}$ nabývá druhá derivace

$$\tfrac{1}{8} f''(x) = 6x - 4a$$

hodnoty záporné $-2a$, takže nastává skutečně maximum. (Pro $x = a$ jest $y'' = 2a > 0$, takže nastává minimum $P = 0$.) Plochu vyjádříme z rovnice (1)

$$P = 2\sqrt{2p\frac{a}{3}}\,.\left(a - \frac{a}{3}\right)$$

čili

$$P = \frac{4a}{9}\sqrt{6ap}.$$

16.

Spustíme-li z některého bodu M na obvodě kruhu trojúhelníku ABC opsaného kolmice na výšky, leží paty kolmic, bod M a průsečík V výšek trojúhelníku na jedné kružnici. Které jest geometrické místo středů všech takových kružnic?

Prof. Dr. *Jos. Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Ladislav Blumenschein*, stud. VII. tř. r. v Kroměříži.

Označme paty výšek A', B', C', jich průsečík V, paty kolmic spuštěných z bodu M na výšky A_1, B_1, C_1.

Trojúhelníky MVA_1, MVB_1, MVC_1 jsou pravoúhlé o společné přeponě MV. Leží tedy body M, V, A_1, B_1, C_1 na téže kružnici o průměru MV. Její střed budiž S.

Body S jakožto středy všech kružnic pro různé body M sestrojených půlí vždy úsečku MV, jest tedy geometrické místo bodů S křivka podobná a podobně položená dle středu V kružnici K opsané trojúhelníku ABC, t. j. kružnice. Jest to tak zvaná kružnice Feuerbachova, jdoucí patami výšek, půlícími body stran a půlícími body úseček AV, BV, CV.

17.

Dány jsou dvě paraboly $y^2 = 2px$, $x^2 = 2qy$; tečny jedné buďtež polárami druhé! Které jest geometrické místo polů? Jaký jest vztah mezi průsečnými body a společnými tečnami dvou a dvou ze všech tří křivek?

Prof. Dr. *Jos. Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Viktora*, soukr. stud.

Tečna t_1 paraboly $x^2 = 2qy$, v bodě jejím (x_1, y_1) jest

$$x_1 x = q(y + y_1)$$

čili

$$t_1 \equiv x_1 x - qy - qy_1 = 0. \tag{1}$$

Polára p_1 bodu (x_0, y_0) vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ jest

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

aneb

$$p_1 \equiv px - y_0 y + px_0 = 0. \tag{2}$$

Aby tečna t_1 ztotožňovala se s polárou p_1, musí součinitelé při x, y a člen absolutní býti v rovnicích (1), (2) úměrny, t. j. musí býti

$$x_1 = \lambda p, \quad q = \lambda y_0, \quad -q y_1 = \lambda p x_0$$

(kde λ značí koefficient úměrnosti). Odtud určíme

$$\lambda = \frac{q}{y_0}, \quad x_1 = \frac{pq}{y_0}, \quad y_1 = -\frac{pqx_0}{qy_0}$$

a protože

$$x_1^2 = 2qy_1,$$

jest též

$$x_0 y_0 = -\frac{pq}{2}$$

jako rovnice geom. místa polů, jichž poláry vzhledem k parabole $y^2 = 2px$ jsou tečnami paraboly $x^2 = 2qy$.

Táž hyperbola

$$xy = -\frac{pq}{2}$$

jest geometrickým místem polů, jichž poláry vzhledem k parabole $x^2 = 2qy$ jsou tečnami paraboly $y^2 = 2px$.

Jest to hyperbola rovnoramenná, jejímiž asymptotami jsou osy souřadnic. Hyperbola leží, mají-li parametry obou parabol stejná znaménka, ve kvadrantu 2. a 4., mají-li znaménka různá, v kvadrantu 1. a 3.

Průsek hyperboly s parabolou

$$y^2 = 2px \text{ jest } M \equiv \left(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{pq^2},\ -\sqrt[3]{p^2q}\right),$$
$$x^2 = 2qy \quad \text{,,} \quad N \equiv \left(-\sqrt[3]{pq^2},\ \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p^2q}\right).$$

Tyto průsečné body M a N jsou dotyčné body společné tečny obou parabol. Rovnice této společné tečny jest

$$x\sqrt[3]{p} + y\sqrt[3]{q} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{p^2q^2} = 0.$$

Obě paraboly protínají se v počátku souřadnic a v bodě

$$P \equiv \left(2\sqrt[3]{pq^2},\ 2\sqrt[3]{p^2q}\right).$$

Osa X je společná tečna paraboly

$x^2 = 2qy$ a hyperboly (tečna v bodě úběžném, asymptota),

osa Y je společná tečna paraboly

$y^2 = 2px$ a hyperboly (tečna v bodě úběžném, asymptota).

Tečna hyperboly v bodě M je zároveň tečnou paraboly

$$x^2 = 2qy \text{ v bodě } P,$$

tečna hyperboly v bodě N je zároveň tečnou paraboly

$$y^2 = 2px \text{ v bodě } P.$$

Protínají se tedy tečny hyperboly, sestrojené v průsečných bodech hyperboly a obou parabol, v témž bodě P, ve kterém se protínají obě paraboly.

Podobný vztah platí i o obou asymptotách hyperboly.

Poznámka. Hyperbola má tečnu, jejíž rovnice jest

$$xy_1 + yx_1 = -pq,$$

kde (x_1, y_1) jsou souřadnice bodu dotyčného. Tečna v bodě M:

$$2x\sqrt[3]{p} - y\sqrt[3]{q} - 2\sqrt[3]{p^2q^2} = 0$$

jest zároveň tečnou paraboly $x^2 = 2qy$; tečna v bodě N:

$$x\sqrt[3]{p} - 2y\sqrt[3]{q} + 2\sqrt[3]{p^2q^2} = 0,$$

jest zároveň tečnou paraboly $y^2 = 2px$.

18.

Kruhový přímý kužel jest proťat rovinou půlící úhel α, jejž svírá pobočná hrana se základnou. Jak veliký jest úhel α, je-li plocha vzniklého řezu elliptického k-krát větší než základna kužele? (Spec., je-li $k = \frac{1}{4}\sqrt{6}$.) Jaké hodnoty může k míti?

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal p. *Bohuslav Kamenický*, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech.

Buď ACS osový řez kužele, ABM elliptický řez, DME kruhový řez vedený středem ellipsy. Střed ellipsy O. $AC = 2r$, $AB = 2a$, $OM = b$.

Z trojúhelníku ACB plyne

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \sin\frac{3\alpha}{2} : \sin\alpha,$$

odkud

$$\overline{AB} = 2a = 2r\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

$$a = r\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Dále je

$$\overline{OM}^2 = \overline{DO}\,.\,\overline{OE};\ \text{ale}\ \overline{OE} = r,$$

$$\overline{OD} : \overline{AO} = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\alpha,$$

takže

$$\overline{OM}^2 = b^2 = r^2\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\,.\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$

$$b = r\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}}.$$

Dle podmínky

$$\pi ab = k\,.\,\pi r^2,$$

odtud pro α plyne rovnice

$$\pi r\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\,.\,r\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}} = k\pi r^2,$$

čili

$$\sin^2\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2} = k^2\sin^3\frac{3\alpha}{2}.$$

Položíme-li

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} = x,$$

můžeme psáti

$$\sin^3\frac{\alpha}{2}\,.\,4\cos^2\frac{\alpha}{2} = k^2\sin^3\frac{\alpha}{2}\left(4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)^3.$$

Odtud odstraníme-li bezvýznamný faktor

$$x = k^2 (x - 1)^3,$$

$$x^3 - 3x^2 + \left(3 - \frac{1}{k^2}\right) x - 1 = 0.$$

Je-li specielně

$$k = \tfrac{1}{4}\sqrt{6},$$

$$k^2 = \tfrac{3}{8},$$

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{1}{3}x - 1 = 0,$$

$$(x - 3)\,(x^2 + \tfrac{1}{3}) = 0,$$

$$x = 3 = 4\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\alpha = 60^0.$$

Pro

$$\alpha = 0, \qquad x = 4;$$

pro

$$\alpha = 90^0, \quad x = 2;$$

funkce

$$k^2 = \frac{x}{(x-1)^3}$$

nemá v intervallu 2 . . . 4 extremu, tudíž

$$\frac{4}{3^3} < k^2 < 2,$$

odtud

$$\tfrac{2}{9}\sqrt{3} < k < \sqrt{2}.$$

19.

Z bodu M uvnitř ellipsy vedeny jsou k ní normály. Paty jejich určují čtyřúhelník, v němž nechť jest P průsečík spojnic středů protilehlých stran. Ukázati, že bod P probíhá přímku jdoucí středem, probíhá-li bod M rovněž přímku jdoucí středem. Kdy jsou obě přímky spolu sdruženy?

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal pan *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Ve čtyřúhelníku A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), D (x_4, y_4) jsou středy stran vrcholy rovnoběžníku. V tom úhlopříčky jsou spojnicemi středů protějších stran čtyřúhelníku a půlí se navzájem v bodě P. Je-li $\overline{EF}$ tato spojnice, jest $\overline{EP} = \overline{PF}$. Souřadnice bodu E jsou $\frac{x_1 + x_4}{2}$, $\frac{y_1 + y_4}{2}$, bodu F $\frac{x_2 + x_3}{2}$, $\frac{y_2 + y_3}{2}$. Souřadnice bodu P budou následkem toho

$$x_P = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y_P = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Paty normál vedených z bodu M (ξ, η) k ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

leží na rovnostranné hyperbole

$$e^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0.$$

Pro úsečky pat oněch normál dostaneme rovnici stupně čtvrtého

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{e^2}x^3 + \frac{a^2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4)}{e^4}x^2 + \frac{2a^4\xi}{e^2}x - \frac{a^6\xi^2}{e^4} = 0.$$

Odtud plyne

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{2a^2\xi}{e^2}. \tag{1}$$

Podobně pro pořadnice dostaneme rovnici

$$y^4 + \frac{2b^2\eta}{e^2}y^3 + \frac{b^2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4)}{e^4}y^2 - \frac{2b^4\eta}{e^2}y - \frac{b^6\eta^2}{e^4} = 0$$

a z ní

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{2b^2\eta}{e^2}. \tag{2}$$

Pak jest

$$x_P = \frac{a^2\xi}{2e^2}, \quad y_P = -\frac{b^2\eta}{2e^2}$$

a

$$\xi = \frac{2e^2x}{a^2}, \quad \eta = -\frac{2e^2y}{b^2}.$$

Poněvadž bod M jest na přímce

$$\eta = k\xi,$$

platí

$$-\frac{2e^2y}{b^2} = k \cdot \frac{2e^2x}{a^2}$$

nebo

$$y = -\frac{b^2k}{a^2}x.$$

pročež leží bod P taktéž na přímce jdoucí středem.

Mají-li obě přímky býti sdruženy, musí

$$k \cdot \left(-\frac{b^2k}{a^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2},$$

čili

$$k^2 = 1, \quad k = \pm 1,$$

pročež bod P probíhá přímku sdruženou, leží-li bod M na přímce

$$y = \pm x.$$

20.

Dokázati, že geometrické místo vrcholů parabol, jež dotýkají se ramen pravého úhlu a jichž osy jsou spolu rovnoběžny, jest přímka. Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal pan *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Jest známo, že geom. místem bodů, z nichž parabola se jeví v pravém úhlu, jest její přímka řídící a že spojnice dotyčných bodů k sobě kolmých tečen prochází ohniskem paraboly.

Je-li přímka o jdoucí vrcholem P pravého úhlu o ramenech t_1, t_2 směrem os všech parabol, pak přímka d, jdoucí bodem P k ní kolmo, jest společnou jejich řídící přímkou.

Spojnice dotyčných bodů T_1, T_2 kterékoliv paraboly dané podmínce hovící jest tětiva, k níž průměrem sdruženým jest přímka o a musí tedy průsečíkem s o býti půlena; jsou tudíž oba body dotyčné stejně vzdálené od přímky o a lze snadno, je-li jeden dán, druhý sestrojiti a tím také určiti směr sdružených tětiv k o.

Z bodu T_1, ležícího na rameni t_1, spusťme kolmici na přímku řídící d. Pata její buď Q. Z věty, že geom. místo bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly dle tečen jejích je přímka řídící, plyne naopak, že ohnisko paraboly jest v bodě F s bodem Q dle t_1 souměrném.

Protože řídící přímka d jest stálá, jest geom. místem ohnisek všech parabol dané podmínce vyhovujících přímka f jdoucí vrcholem P pravého úhlu souměrně s d dle ramene t_1.

Střed V kolmice spuštěné z ohniska F na přímku řídící jest vrchol paraboly. Jest zřejmo, že geom. místem všech těchto vrcholů jest taktéž přímka jdoucí bodem P, rozpolující úsečky mezi f a d jdoucí rovnoběžně s o.

21.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x + y + \frac{x}{y} = 5,$$

$$x^2 + y^2 + \frac{x^2}{y^2} = 15.$$

Jaromír Soukup.

Řešení. Zaslal pan *Vladimír Škarda*, st. VI. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Dosadíme-li za $\frac{x}{y}$ z rovnice prvé do druhé, obdržíme po zmocnění

$$x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y + 5 = 0. \qquad (1)$$

Poněvadž z rovnice prvé plyne též

$$y^2 + xy - 5y = - x, \qquad (2)$$

jest po dosazení do (1)

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

a odtud kořeny

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 1;$$

a) pro $x_1 = 5$ dostaneme z (2)

$$y^2 = -5, \quad y_{1,2} = \pm i\sqrt{5};$$

b) pro $x_2 = 1$ podobně

$$y^2 - 4y + 1 = 0, \quad y_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

22.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = 5\sqrt[3]{x^3 + y^3}$$
$$x^2 - y^2 = 3\sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal pan *Jan Andrlík*, stud. VIII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Dělením obou rovnic plyne

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{3},$$

čili

$$x^2 = 4y^2$$

a tedy

$$x = \pm 2y.$$

Klademe-li na př. do prvé rovnice napřed

$$x = 2y,$$

obdržíme

$$y^2 = \sqrt[3]{9y^3} = y\sqrt[3]{9}, \quad y\varepsilon\sqrt[3]{9}, \quad y\varepsilon^2\sqrt[3]{9},$$

kdež

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

a odtud $y = 0$ a tedy i $x = 0$

$$y = \sqrt[3]{9}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{9}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{9},$$
$$x = 2\sqrt[3]{9}, \quad 2\varepsilon\sqrt[3]{9}, \quad 2\varepsilon^2\sqrt[3]{9}.$$

Klademe-li $x = -2y$, dostaneme podobně vedle řešení

$$y = 0, \quad x = 0,$$

řešení další

$$y = -\sqrt[3]{7}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{7}, \quad -\varepsilon^2\sqrt[3]{7},$$
$$x = 2\sqrt[3]{7}, \quad 2\varepsilon\sqrt[3]{7}, \quad 2\varepsilon^2\sqrt[3]{7}.$$

Reálné kořeny

$$x = 2\sqrt[3]{9}, \quad y = \sqrt[3]{9},$$
$$x = 2\sqrt[3]{7}, \quad y = -\sqrt[3]{7}$$

vyhovují dané rovnici, béřeme-li též reálnou hodnotu třetí odmocniny.

23.

Jest dokázati, že v lichoběžníku platí tento vztah mezi stranami a délkami úhlopříček

$$(a^2 - c^2) : (n^2 - m^2) = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta),$$

plocha pak vyjádřena jest vzorci

$$\frac{(a^2 - c^2) \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} = \frac{(n^2 - m^2) \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha - \beta)}$$

při čemž jsou a a c základny. Prof. *Rud. Hruša.*

Řešení. Zaslal pan *Boh. Kamenický,* stud. VIIa tř. r. na Kr. Vinohradech.

Prodlužme ramena $\overline{AD}$ a $\overline{BC}$ a průsečík označme E; platí potom

$$m^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 + 2\overline{AE} \,.\, \overline{CE} \cos(\alpha + \beta) \qquad (1)$$

$$n^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BE}^2 + 2\overline{DE} \,.\, \overline{BE} \cos(\alpha + \beta). \qquad (2)$$

Z trojúhelníka ABE vyjádřeme

$$\overline{AE} = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad \overline{BE} = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

z trojúhelníka DCE pak

$$\overline{DE} = \frac{c \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad \overline{CE} = \frac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Podle toho dosaďme do (1) a (2)

$$m^2 \sin^2(\alpha + \beta) = a^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\alpha + 2ac \sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$n^2 \sin^2(\alpha + \beta) = c^2 \sin^2\beta + a^2 \sin^2\alpha + 2ac \sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha + \beta)$$

a odečtěme obě rovnice

$$(n^2 - m^2) \sin^2(\alpha + \beta) = (a^2 - c^2)(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)$$

čili

$$(a^2 - c^2) : (n^2 - m^2) = \sin^2(\alpha + \beta) : (\sin^2\alpha - \sin^2\beta).$$

Poněvadž

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta,$$

bude dále

$$(a^2 - c^2) : (n^2 - m^2) = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta).$$

Obsah lichoběžníku jest dán rozdílem trojúhelníků ABE a DCE

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} - \tfrac{1}{2} \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

to jest

$$L = \tfrac{1}{2}\,\frac{(a^2 - c^2)\, sin\, \alpha\, sin\, \beta}{sin\, (\alpha + \beta)}$$

a užijeme-li dokázaného vztahu obdržíme dále:

$$L = \tfrac{1}{2}\,\frac{(n^2 - m^2)\, sin\, \alpha\, sin\, \beta}{sin\, (\alpha - \beta)}.$$

24.

Najděte geometrické místo bodů té vlastnosti, že rozdíl délek tečen z nich ke dvěma daným kružnicím vedených jest stálý.

V. Hruška,
assistent čes. techn. v Praze.

Řešení. Dle p. autora.

Jsou-li $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ rovnice obou kružnic a a daný stálý rozdíl dálek tečen, jest

$$a = \sqrt{K_1} - \sqrt{K_2}, \tag{1}$$

čili

$$a^2 = K_1 + K_2 - 2\sqrt{K_1 K_2},$$
$$(a^2 - K_1 - K_2)^2 = 4 K_1, K_2,$$

čili

$$(K_1 + K_2)^2 - 4 K_1 K_2 - 2a^2 (K_1 + K_2) + a^4 = 0, \tag{2}$$

t. j.

$$(K_1 - K_2)^2 - 2a^2 (K_1 + K_2) + a^4 = 0. \tag{3}$$

Rovnice tato je kvadratická a tedy geometrickým místem kuželosečka. Z rovnice (2) poznáváme, že průsečík této křivky s kružnicí $K_1 = 0$ hoví rovnici

$$(a^2 - K_2)^2 = 0,$$

t. j. že hledané geom. místo se dotýká kružnice $K_1 = 0$ v jejích průsečících s kružnicí $K_2 = a^2$. Stejně se dotýká kružnice $K_2 = 0$ v jejích průsečících s kružnicí $K_1 = a^2$.

25.

Sestrojiti lichoběžník, jehož ramena i jedna základna jsou navzájem rovny, je-li dán

a) obvod a výška,
b) obvod a vnitřní úhel.

Ing. *Jos. Langr.*

Řešení. Zaslal p. *Bohumil Kamenický*, stud. VII. tř. r. na Král Vinohradech.

a) *Rozbor.* Označme: Delší spodní základnu b, kratší horní základnu, rovnou oběma ramenům a, výšku v, obvod $2s$.

V lichoběžníku daného tvaru spusťme kolmici (výšku) z vrcholu D hořejší základny na spodní základnu a na spodní základnu přenesme ještě jedno rameno (byla-li kolm. spuštěna z levého vrcholu hořejší zákl., přenesme nyní od pravého vrcholu spodní zákl. na pravo). Spojnice $\overline{EF}$ takto nabytých bodů jest rovna polovině obvodu, neboť spustíme-li ještě kolmici z druhého vrcholu hořejší základny, vytíná na spodní úseky:

$$\overline{EG} = a, \quad \overline{GB} = \frac{b-a}{2},$$

takže

$$\overline{EF} = \frac{3a+b}{2},$$

kdežto obvod $2s = 3a + b$.

Spojnice $\overline{DF}$ půlí rameno $\overline{BC}$ v bodě H, takže bod B jest vzdálen od H o úsečku $\frac{a}{2}$, kdežto od bodu F o celé a. Leží tedy vrchol B na Apolloniově kružnici, která má střed na přímce $\overline{HF}$ a tvoří s body H a F harmonickou čtveřinu.

Konstrukce. Sestrojíme trojúhelník pravoúhlý EFD o odvěsnách s a v, přeponu rozpůlíme (H) a vzdálenost HF roztřetíme, bod v jedné třetině od H budiž K; pak sestrojíme kružnici nad průměrem $\overline{DK}$, jež protne odvěsnu EF v bodu B; $\overline{HB}$ přeneseme na opačnou stranu, dostáváme vrchol C a poloměrem $\overline{DC} = \overline{BC}$ přetneme z vrcholu D spodní základnu, čímž dostáváme vrchol A.

b) Zvolivše libovolně na př. a, snadno sestrojíme lichoběžník o daném úhlu vnitřním, v němž jsou ramena a jedna základna navzájem rovny. Tento lichoběžník bude hledanému podoben, tedy budou obvody jich v poměru stejnolehlých stran. Odtud plyne pak ihned konstrukce.

26.

Sestrojte body, jichž vzdálenosti od vrcholů trojúhelníku ABC mají se k sobě jako výšky, a dokažte, že ony body a střed kruhu trojúhelníku ABC opsaného leží na téže přímce.

Dr. *Jos. Tomáš.*

Řešení. Dle p. *Em. Šlechty*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře a dle p. autora.

Budiž hledaný bod S. Pak jsou splněny podmínky

$$AS : BS : CS = v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

a tedy na př.

$$AS : BS = b : a.$$

Geometrické místo bodů této vlastnosti jest Appoloniova kružnice K_3, jdoucí body harmonicky sdruženými s body A, B a vrcholem C.

Geometrické místo bodů, pro něž $BS : CS = c : b$, jest kružnice K_1. Obě tyto kružnice se protnou ve dvou bodech S_1 a S_2. Těmito body prochází také kružnice K_2 sestrojená dle podmínky $AS : CS = c : a$.

Vyhovují tedy podmínce obecně dva body S_1 a S_2. Přímka S_1S_2 jest společná chordála kružnic K_1, K_2, K_3 (kružnice ty náležejí témuž svazku), tyto kružnice pak protínají kružnici K, opsanou trojúhelníku ABC, kolmo.

To snadno dokážeme. Označme O_1, O_2, O_3 středy kružnic K_1, K_2, K_3, A_1, B_1, C_1 body, v nichž protínají strany BC, CA, AB. Trojúhelník AA_1O_1 jest rovnoramenný, AA_1 jest osa úhlu A; pak jest

$$\sphericalangle BAO_1 = \sphericalangle A_1AO_1 + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle AA_1O_1 + \frac{\alpha}{2}$$
$$= 2R - \left((\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = 2R - \gamma;$$

Označíme-li M střed kružnice K, bude

$$\sphericalangle MAB = \gamma - R,$$

tedy

$$\sphericalangle MAO_1 = (2R - \gamma) + (\gamma - R) = R.$$

Stojí tedy poloměry kružnic K, K_1 v průsečném bodě na sobě kolmo, oba kruhy se protínají tedy kolmo. Totéž dokážeme i o dvojicích kruhů K, K_2; K, K_3.

MA jest tečna kruhu K_1, MB tečna kruhu K_2; poněvadž $MA = MB$, leží bod M na chordále H kružnic K_1, K_2, t. j. na přímce S_1, S_2. Leží tedy body S_1, S_2 a střed kružnice opsané trojúhelníku na téže přímce.

Označme

H_1 chordálu kružnic K, K_1,
H_2 „ „ K, K_2,
H_3 „ „ K, K_3.

Chordály dvou a dvou ze tří kružnic protínají se v jednom bodě, na př. chordály H, H_1, H_3 dvou a dvou ze tří kružnic K, K_1, K_3 procházejí týmž bodem P. Tímto bodem musí však též procházeti chordála H_2 kružnic K, K_2; neboť H jest chordála kružnic K_1 a K_2, H_1 chordála kružnic K, K_1. Obě tyto chordály se protínají dle předešlého v bodě P, tudíž prochází bodem tím i chordála H_2. Protínají se tedy chordály H_1, H_2, H_3 v jednom bodě P na přímce jdoucí body S_1, S_2, M. Ježto kružnice K_1, K_2, K_3 tvoří svazek, leží středy jich O_1, O_2, O_3 na téže přímce. Přímky $MS . PS_2$ a $O_1O_2O_3$ stojí na sobě kolmo.

27.

Dokažte, že, jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníku, jest výraz

$$\sin\alpha \sin(\alpha + \varphi) \sin\varphi + \sin\beta \sin(\alpha + \varphi) \sin(\gamma - \varphi) + \sin\gamma \sin(\varphi - \gamma) \sin\varphi$$

nezávislý na φ a roven $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Kdy ještě bude onen výraz nezávislý na φ?

Dr. *Jos. Tomáš.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Označme výraz ten V. Rozvedeme-li podle poučky součtové, obdržíme po úpravě

$$V = (\sin\alpha \cos\alpha + \sin\gamma \cos\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma) \sin^2\varphi + (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma) \sin\varphi \cos\varphi + \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos^2\varphi.$$

Protože

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi,$$

jest dále

$$\begin{aligned} V = (&\sin\alpha\cos\alpha + \sin\gamma\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ &- \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)\sin^2\varphi + (\sin^2\alpha - \sin^2\gamma \\ &- \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)\sin\varphi\cos\varphi \\ &+ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Výraz tento bude nezávislý na φ, když koefficienty při $\sin^2\varphi$ a $\sin\varphi\cos\varphi$ budou zároveň rovny nulle, tedy

$$\sin\alpha\cos\alpha + \sin\gamma\cos\gamma - \sin\beta(\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma) = 0$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma - \sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma) = 0,$$

kteréžto podmínky dají se snadno upraviti na tvar

$$\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma) - \sin\beta \,.\, \cos(\alpha-\gamma) = 0$$

$$\sin(\alpha+\gamma) \,.\, \sin(\alpha+\gamma) - \sin\beta \,.\, \sin(\alpha-\gamma) = 0$$

čili

$$\cos(\alpha-\gamma)(\sin(\alpha+\gamma) - \sin\beta) = 0$$

$$\sin(\alpha-\gamma)(\sin(\alpha+\gamma) - \sin\beta) = 0.$$

Jsou-li α, β, γ úhly v trojúhelníku, jest

$$\alpha + \gamma = \pi - \beta,$$

t. j.

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta$$

a daný výraz skutečně jest nezávislý na φ a má hodnotu

$$V = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Obecně bude nezávislý na φ, bude-li buď

$$\sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta$$

t. j.

$$\alpha + \gamma = \beta + 2k\pi$$

neb

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \pi - \beta + 2k\pi \\ &= (2k+1)\pi - \beta \end{aligned}$$

anebo konečně současně

$$\cos(\alpha-\gamma) = \sin(\alpha-\gamma) = 0,$$

t. j.

$$\alpha - \gamma = 2k\pi.$$

28.

Dokažte, že hranol opsaný čtyřstěnu, jehož sítí jest trojúhelník o stranách $2a$, $2b$, $2c$, jest pravoúhlý rovnoběžnostěn a že objem jeho lze psáti ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{abc}\ \sqrt{a^3 \cos\alpha + b^3 \cos\beta + c^3 \cos\gamma - abc},$$

jsou α, β, γ úhly úhlopříček a, b, c stěn hranolu.

Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Ladislav Kolenatý,* stud. VII. tř. r. v Rakovníce.

Je-li sítí čtyrstěnu trojúhelník o stranách $2a$, $2b$, $2c$, jsou jeho stěny všechny navzájem shodny a proto též dvě a dvě protilehlé hrany mají stejnou délku. Pak v hranolu čtyřstěnu takovémuto opsaném mají vždy protilehlé stěny úhlopříčky v protivném směru ležící stejné a jsou to tedy pravoúhelníky a hranol pravoúhlý rovnoběžnostěn.

Objem pravoúhlého rovnoběžnostěnu je dán vzorcem (značí-li x, y, z jeho rozměry),

$$V = x \,.\, y \,.\, z.$$

K určení těchto veličin použijme vztahů odvozených z úhlopříčen a stran jednotlivých stěn rovnoběžnostěnu na základě věty Pythagorovy.

$$x^2 = c^2 - y^2 = a^2 - z^2$$
$$y^2 = b^2 - z^2 = c^2 - x^2$$
$$z^2 = a^2 - x^2 = b^2 - y^2.$$

Řešením těchto rovnic obdržíme

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2}}$$
$$y = \sqrt{\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2}}$$
$$z = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2}}$$

Dosaďme do daného vzorce

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{2}\left[(c^2 - b^2 + a^2)(b^2 - a^2 + c^2)(a^2 - c^2 + b^2)\right]}.$$

Vynásobením a upravením výrazu pod odmocninou dostaneme

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[a^4(b^2 - a^2 + c^2) + b^4(a^2 - b^2 + c^2) + c^4(a^2 + b^2 - c^2) - 2a^2c^2b^2\right]}.$$

Ale dle poučky kosinusové jest, když úhly úhlopříček a, b, c jsou α, β, γ

$$b^2 - a^2 + c^2 = 2bc \cos \alpha$$
$$a^2 - b^2 + c^2 = 2ac \cos \beta$$
$$a^2 - c^2 + b^2 = 2ab \cos \gamma$$

a proto po upravení můžeme psáti

$$V = \tfrac{1}{2} \sqrt{abc} \sqrt{a^3 \cos \alpha + b^3 \cos \beta + c^3 \cos \gamma - abc}.$$

29.

n shodných proužků obdélníkových přeložiti jest přes sebe tak, aby vznikla pravidelná hvězdice, vepsaná do kruhu daného poloměru r. Jak velké musí býti rozměry každého proužku, aby plocha hvězdice byla co největší? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Kouba*, stud. VIIa tř. r. v Karlíně.

Plocha hvězdice se skládá ze $4n$ lichoběžníků $OABC$, v nichž úhly CBA a OAB jsou pravé a úhel

$$COA = \frac{2\pi}{4n} = \frac{\pi}{2n} = \alpha.$$

Označme φ úhel BOA. Aby proužky po celé délce nebyly přeloženy přes sebe, musí býti

$$\varphi < \alpha.$$

Pak jest

$$OA = r \cos \varphi, \quad AB = r \sin \varphi$$

a plocha lichoběžníku

$$p = \overline{OA} \cdot \overline{AB} - \tfrac{1}{2} \overline{AB} \cdot AB \operatorname{cotg} \alpha$$
$$= r^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \sin^2 \varphi \operatorname{cotg} \alpha$$

a tedy

$$f(\varphi) = \frac{2p}{r^2} = \sin 2\varphi - \sin^2 \varphi \operatorname{cotg} \alpha.$$

Plocha hvězdice bude co největší, bude-li míti tato funkce maximální hodnotu.

I musí býti

$$f'(\varphi) = 2 \cos 2\varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{cotg} \alpha$$
$$= 2 \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \operatorname{cotg} \alpha = 0,$$

t. j.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Označíme-li nejmenší úhel této rovnici hovící φ_0, budou všechna řešení její dána vzorci

$$2\varphi = 2\varphi_0 + k\pi$$

$$\varphi = \varphi_0 + k\frac{\pi}{2}.$$

Pro úhel φ_0 platí jistě $\varphi_0 < \alpha$, a žádný jiný z úhlů φ relaci té nevyhovuje.

Uvažujme nyní druhou derivaci

$$f''(\varphi) = -4 \sin 2\varphi - 2 \cos 2\varphi \cot g\, \alpha,$$
$$= -2 \cos 2\varphi\, (2\, tg\, 2\varphi + \cot g\, \alpha),$$

pro hodnotu $\varphi = \varphi_0$ bude jistě

$$f''(\varphi_0) < 0,$$

tak že skutečně nastává maximum.

30.

Z kruhového kotouče vyříznouti n-bokou pravidelnou misku tak, aby obruba byla kolmá k podstavě a objem co největší. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *J. Knotek*, stud. VIIa tř. r. v Karlíně.

Budiž poloměr kotouče r, poloměr kružnice opsané základně ϱ, výška misky v, jedna strana základny AB a bočná stěna pravoúhelník $ABCD$. Označme úhel $AOB = 2\alpha$, úhel $COD = 2\varphi$. Pak jest $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Pro úhel φ platí $\varphi < \alpha$. Ježto $AB = CD$, jest $\varrho \sin \alpha = r \sin \varphi$, tedy

$$\varrho = \frac{r \sin \varphi}{\sin \alpha}.$$

Dále jest

$$v = r \cos \varphi - \varrho \cos \alpha = r (\cos \varphi - \sin \varphi \cot g\, \alpha).$$

Plocha základny bude pak

$$n \,.\, \triangle\, OAB = \frac{n}{2}\, \varrho^2 \sin 2\alpha = \frac{n}{2}\, r^2 \sin^2 \varphi \,\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$$
$$= n r^2 \sin^2 \varphi \cot g\, \alpha$$

a objem

$V =$ základna . výška $= n r^3 \cot g\, \alpha \sin^2 \varphi\, (\cos \varphi - \sin \varphi \cot g\, \alpha).$

Ten bude maximem, bude-li míti maximum funkce

$$f(\varphi) = \sin^2 \varphi \, (\cos \varphi - \sin \varphi \cot g \, \alpha).$$

Snadno nalezneme

$$f'(\varphi) = \sin \varphi \, (2 \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi \cot g \, \alpha - \sin^2 \varphi)$$
$$= \tfrac{1}{2} \sin \varphi \, (1 + 3 \cos 2\varphi - 3 \sin 2\varphi \cot g \, \alpha)$$
$$= \frac{\sin \varphi}{2 \sin \alpha} [\sin \alpha - 3 (\sin 2\varphi \cos \alpha - \cos 2\varphi \sin \alpha)]$$
$$= \frac{\sin \varphi}{2 \sin \alpha} [\sin \alpha - 3 \sin (2\varphi - \alpha)].$$

Aby nastalo maximum, musí býti

$$f'(\varphi) = 0.$$

Činitel $\sin \varphi = 0$ neposkytuje řešení dané úlohy. Uvažujme tedy

$$\sin \alpha - 3 \sin (2\varphi - \alpha) = 0$$

neboli

$$g(\varphi) = \sin (2\varphi - \alpha) - \tfrac{1}{3} \sin \alpha = 0.$$

Funkce $\sin (2\varphi - \alpha)$ roste v intervallu od 0 do α, tedy i $g(\varphi)$. Jest $g(0) < 0$, $g(\alpha) > 0$. V intervallu tom leží tedy jediný kořen φ_0 rovnice $g(\varphi) = 0$. Ten určíme, ustanovíme-li nejmenší úhel hledaný ψ_0 hovící vztahu

$$\sin \psi = \tfrac{1}{3} \sin \alpha.$$

Pak

$$\varphi_0 = \frac{\alpha + \psi_0}{2}.$$

Pro druhou derivaci jest

$$f''(\varphi_0) = \tfrac{1}{2} \frac{\sin \varphi_0}{\sin \alpha} \cdot (-6 \cos (2\varphi_0 - \alpha))$$
$$= -3 \frac{\sin \varphi_0 \cos \psi_0}{\sin \alpha} < 0,$$

tak že skutečně nastává maximum.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Sestrojiti kouli, je-li dán bod A na povrchu, tečna t a přímka p procházející jejím středem.

Šk. rada *Václav Hübner.*

Řešení 1. Zaslal p. *Josef Kodrle,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Otočme bod A kolem přímky p. Tím obdržíme povrchovou kružnici k hledané koule. Sestrojme průsečík R tečny t s rovinou kružnice k a od toho bodu nanesme na tuto na obě strany délku tečny vedené z bodu R ke kružnici k. Tím dostáváme dotyčné body tečny t s hledanými plochami kulovými. Středy jejich jsou průsečíky přímky p s rovinami kolmými k t v bodech dotyčných. Řešení je reálné dvojznačné, pokud je bod R vně kružnice k, jednoznačné, padne-li bod R na k a imag., padne-li dovnitř kružnice k.

Řešení 2. Zaslal p. *Jan Novák,* stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.

Otočme bod A kol průměru p. Dostaneme jednu povrch. kružnici hl. ploch. Tečnou t proložme libovolnou rovinu protínající tuto kružnici ve dvou bodech B a C. Tečnou t a body B, C určena další povrchová kružnice. Kolmice ve středu této k její rovině vztyčená určuje na p střed hl. plochy kulové. Poněvadž kružnice procházející body B, C a dotýkající se přímky p jsou obecně dvě reál. či imag., je tolikéž ploch kulových.

Řešení 3. Zaslal p. *Jan Hacker,* stud. VII. tř. reál. v Kladně.

Střed hledané koule musí míti stejnou vzdálenost od daného bodu A a od tečny t. Geometrickým místem takových bodů v prostoru je parabolický válec kolmý k rovině (tA), o řídící parabole v této rovině mající A za ohnisko a přímku t za řídící přímku. Průsečíky přímky p s tímto válcem jsou středy hledaných ploch kulových, jež jsou obecně dvě. Je-li p kolmo k tečně t, pak je jen jedna plocha kulová vyhovující, druhá přechází v rovinu kolmou ku p.

Pan *R. Stojánek,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, řeší úlohu analyticky. Kol přímky p otáčením vytvořuje A kružnici, již obsahují hledané pl. kulové a tečna t vytvoří rotační hyperboloid jednodílný opsaný těm plochám kulovým. Libovolná rovina přímkou p protíná kružnici ve dvou bodech a hyperboloid v hyperbole a stačí vyšetřiti kružnice jdoucí těmito body a dotýkající se hyperboly.

2.

Sestrojiti rotační plochu kuželovou danou vrcholem, dvěma body na povrchu a podmínkou, že z daného bodu lze k ní vésti tečné roviny svírající úhel φ (na př. $\varphi = 90^0$).

Jos. Klima, as. čes. techn.

Řešení 1. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Spojnice vrcholu V s danými body A, B určují dvě povrchové přímky kužele. Pohybuje-li se koule o poloměru stálém r po obou různoběžkách $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, vytvoří střed její ellipsu, jež leží v rovině ν jdoucí osou souměrnosti kolmo k rovině jejich. Důkaz: Budiž rovina různoběžek půdorysnou, rovina ν nárysnou. Počátek volme v bodě V. Kterákoli koule poloměru r dotýkající se obou různoběžek protata je rovinou jejich v kružnici o poloměru ϱ. Souřadnice středu S této koule jsou pak

$$x = \frac{\varrho}{sin\frac{\alpha}{2}},\ z^2 = r^2 - \varrho^2 \text{ (je-li } \alpha \text{ úhel obou přímek).}$$

Vyloučením ϱ plyne rovnice geom. místa středu S:

$$\frac{x^2 sin^2 \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

což je ellipse E o středu V a poloosách $a = \dfrac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}$, $b = r$.

Podobně pro rovinu ν' jdoucí druhou osou souměrnosti površek dostaneme ellipsu E'

$$\frac{y^2 cos^2 \frac{\alpha}{2}}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

jejíž poloosy jsou

$$a' = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}},\quad b' = r.$$

Středy všech koulí poloměru r, k nimž lze danou přímkou $p \equiv \overline{VM}$ vésti tečné roviny svírající úhel φ, vyplňují rotační plochu válcovou s osou v přímce p a poloměru $R = \frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Rovina ν protíná tuto plochu v ellipse E_1, která majíc s ellipsou E střed V společný protíná ji ve 4 bodech, které spojeny s V určují 2 osy hledaných kuželů (ježto vždy dvě spojnice splývají)

Pro rovinu ν' obdržíme taktéž dvě řešení, celkem tedy obecně 4 řešení.

Řešení 2. V podstatě zaslal p. *J. Hak*, st. r. v Brně.

Má-li hledaná rot. plocha kužel. vrcholový úhel 2α a je-li přímka p, kterou k ní pokládáme tečné roviny, odchýlena od její osy o úhel β, při čemž úhel tečných rovin jest φ, platí vztah

$$\sin\varphi/2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

který možno odvoditi z pravoúhlého trojhranu tvořeného jednou rovinou tečnou a rovinami, jež určuje osa plochy kuželové s přímkou p a s dotyčnou površkou.

Jsou-li dány dva body na povrchu rot. plochy kuželové a vrchol, bude osa této ležet v jedné neb druhé rovině souměrnosti ν, ν' obou takto určených površek m a n a při tom bude s přímkou m (nebo n) a s přímkou p svírat úhly α a β, jejichž poměr sinů známe.

Geometrické místo přímek, které procházejí vrcholem daného úhlu a svírají s jeho rameny úhly, jejichž sinů poměr je stálý, je t. zv. kužel orthogonální*) Površky tohoto kužele v rovině (mp), jež určují s m a p úhly, jichž sinů poměr je roveň $\sin\varphi/2$, sestrojí se snadno; buďtež to površky r, s. Kužel

*) Viz ku př. Prof. Dra. Sobotky: Deskriptivní geometrie promítání parallelního. Str. 189.

orthogonálný je pak vytvořen průsečnicemi rovin vzájemně kolmých jdoucích přímkami r a s. Roviny kolmé k r a s protínají tento v kružnicích, jež snadno určíme. Průsečnice tohoto kužele orth. s rovinami v a v' os, jež procházejí jeho vrcholem, dají osy obecně čtyř rotačních ploch vyhovujících daným podmínkám.

Pan *Šafář Otakar*, st. vyšší prům. školy v Brně, stanoví body hledaných os co společné body tří válců rotačních, jeden o ose $\overline{AV}$ a poloměru zvoleném r, druhý o ose $\overline{BV}$ a poloměru r a třetí o ose $p \equiv \overline{VM}$ a poloměru $x' \dfrac{r}{sin \frac{\varphi}{2}}$, což se shoduje s řešením prvým.

Poznámka. Osa hledané plochy kuželové splývá též s osou kužele kolmého k tomuto o společném vrcholu. Roviny tečné tohoto kužele jsou kolmy k površkám prvého a naopak. Tento kolmý kužel byl by tudíž určen dvěma rovinami tečnými (roviny to kolmé k daným dvěma površkám) a podmínkou, že má protínati rovinu jdoucí vrcholem kolmo k přímce p v přímkách svírajících úhel φ. Osa tohoto vyřešila by se použitím plochy kulové opsané kol vrcholu V libovol. poloměrem. Výsledky byly by opět obecně čtyři.

3.

Sestrojiti nejmenší a největší plochu kulovou jdoucí dvěma body A, B a protínající rovinu ϱ v kružnici o poloměru r.

Jos. Klíma, as. čes. techn.

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

Středy hledaných koulí budou ležeti v rovině souměrnosti τ úsečky $\overline{AB}$. Sestrojme průsečík R přímky $\overline{AB}$ s rovinou ϱ a opišme v rovině ϱ ze středu R kružnici k, jejíž poloměr $= \sqrt{\overline{AR} \cdot \overline{BR}}$ délce to tečny z bodu R k hledané kouli vedené. Veďme pak libovolnou kružnici l o poloměru r tak, by kružnici k kolmo protínala. Střed její buď O. Opišme poloměrem $\overline{RO}$ kol středu R kružnici a veďme jí kolmo k ϱ plochu rotační válcovou. Rovina τ seče tuto v ellipse, jež je geom. místem všech ploch kulových jdoucích body A, B a protínající rovinu ϱ v kružnici o poloměru r. Nejnižší a nejvyšší bod této ellipsy vzhledem k rovině ϱ jsou středy hledaných koulí.

Jiné řešení zaslal p. *Boh. Kamenický*, stud. VII. tř. r. na Kr. Vinohradech. Středy koulí procházejících body A, B leží v rovině symetrálné τ té úsečky. Středy nejmenší a největší koule budou v rovině τ jdoucí body A, B a kolmé k ϱ i τ, tedy k jejich průsečnici. Úloha přechází v planimetrickou: V rovině σ sestrojiti kružnici, jež by procházela body A, B a na průsečnici rovin σ, ϱ vytínala tětivu $2r$. Označme R průsečík spojnice $\overline{AB}$ s rovinou ϱ, $x + r$ vzdálenost středu tětivy od bodu R (v prostoru vzdálenost to středu průsečné kružnice od P). Dle věty o mocnosti bodu R ke kružnici, v níž hledaná plocha kulová protíná rovinu σ, je

$$\overline{RA}\,.\,\overline{RB} = x\,.\,(2r + x)$$

čili

$$x^2 + 2rx - \overline{RA}\,.\,\overline{RB} = 0,$$

z toho

$$x_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 + \overline{RA}\,.\,\overline{RB}}$$

Naneseme-li tudíž od bodu R na průsečníci $(\varrho\sigma)$ délku $\sqrt{r^2 + \overline{RA}\,.\,\overline{RB}}$ na obě strany, tu kolmice v bodech těch k ϱ protnou rovinu τ ve středech nejmenší a největší plochy kulové hovící daným podmínkám.

Poznámka. V obojím řešení bylo předpokládáno, že body A, B jsou na téže straně od roviny ϱ. Kdyby jeden bod byl v rovině ϱ, pak v prvém řešení válec má za podstavu kružnici o poloměru r a středu R, v druhém řešení pak třeba položiti $\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = 0$.

Kdyby body A, B byly na různých stranách od roviny ϱ, zůstane v prvém řešení postup týž, jen třeba onu kružnici l zvoliti tak, by protínala kružnici k diametrálně, t. j. by jich chordála byla průměrem kružnice k. Patrno, by úloha tu byla možná, musí býti $r > \sqrt{\overline{RA}\,.\,\overline{RB}}$.

V druhém řešení zní pro tento případ příslušná rovnice:

$$x^2 - 2rx + \overline{RA}\,.\,\overline{RB} = 0$$

a tudíž

$$x_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - \overline{RA} \cdot \overline{RB}}$$

a tudíž opět pro reálná řešení musí $r > \sqrt{\overline{RA} \cdot \overline{RB}}$.

4.

Sestrojiti rotační hyperboloid obsahující dvě dané mimoběžky a, b a bod M. *Jos. Klíma*, as. čes. techn.

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VII. tř. r. v Brně.

Mimoběžky a a b náležejí jedné (prvé) soustavě povrchových přímek. Každá přímka jedné soustavy protíná všechny povrchové přímky soustavy druhé. Přímku, jdoucí bodem M, náležející druhé soustavě površek, nalezneme, sestrojíme-li bodem M příčku k mimoběžkám a, b, budiž to přímka p. Dvě různoběžky určují nekonečný počet hyperboloidů, jejichž osy vyplňují obě jejich roviny symetrie. Přímky a, b, p určují tedy čtyry rotační hyperboloidy, jichž osy jsou průsečnice rovin symetrie různoběžek a, p a b, p.

Přímka p je spojnicí bodu M s průsečíkem přímky a s rovinou (Mb).

Sestrojením osy jedné z daných mimoběžek a nalezené osy rot. hyperboloidu získáme střed a poloměr hrdelní kružnice.

Pan *Jos. Kodrle*, st. VII. tř. r. v Pardubicích, užívá k sestrojení směru osy hled. rotačního hyperboloidu vlastnosti, že přímky vedené bodem v prostoru rovnoběžně s površkami rot. hyperboloidu vyplňují rotační kužel, jehož osa je rovnoběžna s osou hyperboloidu. Rovnoběžky s a, b bodem M a přímka p určují čtyři rotační kužele, jichž osy dávají směry os hled. hyperboloidů.

5.

V prostoru dány jsou dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$; najíti přímku takovou, aby bylo možno oba trojúhelníky stotožniti otočením kolem této přímky a posunutím podél ní. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení.*) Označme hledanou přímku o. Kolmý průmět obou daných shodných trojúhelníků do roviny $\varrho \perp o$ musí být dva shodné trojúhelníky. Dány-li v prostoru dvě stejné úsečky $\overline{A_1B_1}$ a $\overline{A_2B_2}$, tu promítají se orth. opět do stejných délek do roviny, která je rovnoběžna s přímkou půlící tětivy $\overline{A_1A_2}$ a $\overline{B_1B_2}$. Spojíme-li tedy půlící body tětiv $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ rovinou ϱ, promítají se do ní dané trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ do dvou shodných trojúhelníků. Stejně polohu této roviny bychom mohli obdržeti, vedeme-li libovolným bodem v prostoru rovnoběžné a stejně dlouhé úsečky s tětivami $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$, pak jich druhé koncové body určují směr roviny ϱ. Buďtež orthogonálné průměty daných trojúhelníků do roviny ϱ $A'_1B'_1C'_1$ a $A'_2B'_2C'_2$, pak lze tyto ztotožniti otočením kol průsečíku O symetrál úseček $\overline{A'_1A'_2}$, $\overline{B'_1B'_2}$, $\overline{C'_1C'_2}$. Přímka o kolmá v bodě O k rovině ϱ je hledanou přímkou, kol níž otočením a posunutím lze dané trojúhelníky ztotožnit, jest to zároveň osa jediného pohybu šroubového (helikálního), který převádí trojúhelník $A_1B_1C_1$ ve shodný trojúhelník $A_2B_2C_2$.

6.

Dány jsou čtyři mimoběžky. Jednu z nich posunouti parallelně, aby měla od zbývajících tří stejné nejkratší vzdálenosti. Prof. *Jan Kroupa.*

Zaslal p. *Otakar Šafář*, st. vyšší průmysl. školy v Brně.

Dané mimoběžky označme a, b, c, d, z nichž d se má posunouti. Veďme libovolnou rovinu ϱ kolmo k této a promítněme zbývající tři mimoběžky kolmo do této, takže dostaneme průměty a_1, b_1, c_1. Kolmice vedená k rovině ϱ ve středu kružnice vepsané trojúhelníku určenému přímkami a_1, b_1, c_1 jest hledanou posunutou polohou ${}^1d$ přímky d. Neboť nejkratší vzdáleností dvou mimoběžek jest délka jich osy a ta jeví se v rovině ϱ, je-li jednou z těch mimoběžek přímka ${}^1d$. Všechny tři osy mimoběžky ${}^1d$ a daných mimoběžek a, b, c jeví se tedy co do délky v rovině ϱ jako poloměry kružnice vepsané trojúhelníku a_1, b_1, c_1.

*) Viz ku př. Prof. Dra. Sobotky: „Deskriptivní geometrie promítání parallelního“, str. 346.

Jsou ještě tři polohy přímky d, v nichž má stejné vzdálenosti od mimoběžek a, b, c a to kolmice k rov. ϱ ve středech kružnic připsaných trojúhelníku a_1, b_1, c_1, ale všechny tyto vzdálenosti jsou větší nežli v poloze ${}^1d$.

7.

Dva šikmé kruhové kužele stojí na π. Vyšetřete nejvyšší a nejnižší body proniku vzhledem k π. Prof. *B. Matas.*

Řešení. Zaslal p. *Stojánek Rudolf*, st. VI. tř. r. v Kutné Hoře.

Označme vrcholy daných kuželů V_1, V_2 a jich podstavné kružnice k_1, k_2. Určeme půdorysný stopník P společné vrcholové přímky $\overline{V_1 V_2}$. Najděme pak středy podobnosti obou kružnic k_1, k_2. Veďme sečné roviny vrcholové těmito středy podobnosti. Na kuželích získáme povrchové přímky, v jejichž průsečících obdržíme hledané body. Jsou totiž nejvyšší a nejnižší body proniku určeny tím, že tečny v nich k proniku jsou rovnoběžny s π. Tečnu tu pak získáme co průsečnici příslušných rovin tečných k oběma kuželům. Má-li tato býti rovnoběžna s π, musí jich půdorysné stopy, t. j. tečny ku k_1 a k_2, býti rovnoběžny, a toho docílíme právě, užijeme-li sečných rovin vrcholových procházejících středy podobnosti obou kružnic podstavných. Dostáváme tak obecně ovšem 4 body relativně nejvyšší a nejnižší, z těch ovšem jen jeden je ten nejvyšší a jeden nejnižší.

Jiné řešení. Zaslal p. *Jan Novák*, st. VI. tř. r. v Uh. Brodě.

Posouvejme kužel $(V_2 k_2)$ tak, že vrchol V_2 pohybuje se po vrcholové přímce $\overline{V_1 V_2}$, až podstava takto posunutého kužele bude se dotýkati kružnice k_1. Posunutí provedeme následujícím způsobem: sestrojíme půdorysnou stopu P vrcholové přímky $\overline{V_1 V_2}$ a z ní vedeme tečny t, t' ke kružnici k_2. Nyní sestrojíme kružnici, která se bude dotýkati kružnice k_1 a tečen t, t'. Tato kružnice jest pak posunutou polohou kružnice k_2. Spojíme bod dotyku T_1 obou kružnic s bodem P a stanovíme průsečík spojnice $\overline{PT_1}$ s kružnicí k_2, šetříce při tom smyslu posouvání. Spojnice průsečíku tohoto T_2 s V_2 protíná povrchovou přímku

$\overline{V_1 T_1}$ v jednom žádaném bodě. Je-li pronik úplný, můžeme sestrojiti čtyři kružnice, které se dotýkají k_1 a tečen t a t' a to dvě vně a dvě vnitř. Je-li pronik částečný, můžeme sestrojiti ony kružnice jen dvě. Tečny v bodech nejvyšších a nejnižších sestrojíme, vedeme-li v nich rovnoběžky s příslušnými společnými tečnami v podstavě.

Poznámka. Má-li pronik obou kuželů nekonečně vzdálené body, což vyšetříme, posuneme-li jeden kužel rovnoběžně, až vrchol splyne s vrcholem druhého kužele, pak společné površky udávají tyto (mohou býti ovšem jen dva, když podstavy jsou kruhové), byly by nalezené body ty, v nichž tečny jsou rovnoběžny s π, nejvyšší, resp. nejnižší vzhledem k π, jen na příslušné větvi, na které jsou.

8

Sestrojiti jednodílný rotační hyperboloid daný dvěma povrchovými přímkami téhož systému a

α) jedním bodem na povrchu,

β) jednou rovinou tečnou. Prof. *Ant. Navrátil.*

Část α) je táž jako úloha 4. a řešení obsažena tam.

Řešení části β). Zaslal p. *J. Hak*, st. r. v Brně.

Označme dané přímky téhož systému a, b, jež musí býti mimoběžny, a danou tečnou rovinu τ. Tečná rovina jednodílného hyperboloidu obsahuje dvě přímky různých systémů. Přímka p ležící v rovině τ a náležející jinému systému než dané přímky a a b, musí je protínati, lze ji tedy nalézti jako spojnici průsečíků přímek a a b s rovinou τ (kdyby jedna z přímek daných byla rovnoběžna s rovinou τ, hledaná přímka p je s ní rovnoběžná, procházejíc průsečíkem druhé s rovinou τ). Tři přímky povrchové a, b a p určují opět čtyři rotační hyperboloidy, jejichž osy nalezneme jako v úloze 4.

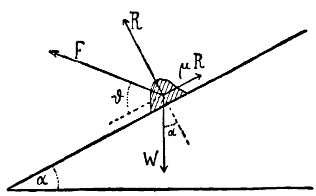
c) Z fysiky.

1.

Těleso váhy W spočívá na drsné nakloněné rovině sklonu α. Je-li koefficient tření roven μ, najděte velikost F a směr (úhel ϑ s šikmou rovinou) nejmenší síly, která uvede těleso v pohyb po šikmé rovině dolů. *R.*

Řešení.

Za daných podmínek, je-li F síla vnější, ve směru se šikmou rovinou úhel ϑ svírající, která těleso právě uvede do pohybu,



Obr. 1.

působí na těleso (obr. 1.) celkem síly následující: 1. jeho váha W; 2. vnější síla F; 3. reakce (tlak) od šikmé roviny. Rozložme poslední ze jmenovaných sil na složku R kolmou na šikmé rovině a na složku s šikmou rovinou rovnoběžnou. Tato poslední složka musí se dle definice koefficientu tření a ježto těleso se právě uvádí do pohybu, rovnati μR. Ježto pak těleso právě opouští stav rovnovážný, musí výslednice všech sil se rovnati nulle, a tedy také algebraický součet průmětů všech sil na libovolný směr musí být roven nulle. Promítneme-li síly ty na rovinu kolmou k rovině šikmé, plyne

$$R + F \sin \vartheta - W \cos \alpha = 0$$

a promítneme-li je na rovinu s šikmou rovinou rovnoběžnou podobně

$$F \cos \vartheta + W \sin \alpha - \mu R = 0.$$

Z obou rovnic můžeme vyloučiti neznámou reakci R, čímž obdržíme

$$F(\mu \sin \vartheta + \cos \vartheta) - W(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) = 0$$

čili

$$F = \frac{W(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{\mu \sin \vartheta + \cos \vartheta}.$$

Tato síla F bude minimální, je-li jmenovatel zlomku maximální, což nastane, jak učí prvá derivace pro

$$\mu \cos \vartheta - \sin \vartheta = 0$$

čili

$$\mu = tg\, \vartheta;$$

druhá derivace jmenovatele má pro $\vartheta < 90^0$ negativní hodnotu $\frac{-1}{\cos \vartheta}$. Kdyby mimo váhu tělesa nepůsobila na ně žádná síla F, tedy $F = 0$, nastával by pohyb, kdyby úhel šikmé roviny dostoupil hodnoty $\alpha = \varepsilon$ takové, že

$$W \sin \varepsilon = \mu W \cos \varepsilon$$

čili

$$\mu = tg\, \varepsilon.$$

Můžeme tudíž trigonometrickou tangentu tohoto hraničního sklonu ε šikmé roviny zavésti za definici koefficientu tření, takže vzorec pro sílu F nabude tvaru

$$F = \frac{W(tg\, \varepsilon \cos \alpha - \sin \alpha)}{tg\, \varepsilon \sin \vartheta + \cos \vartheta} = \frac{W \sin (\varepsilon - \alpha)}{\cos (\vartheta - \varepsilon)}.$$

Tu jest přímo bez derivování patrno, že minimální hodnota síly F nastane, je-li $\cos (\vartheta - \varepsilon) = 0$ čili $\vartheta = \varepsilon$ a že se rovná

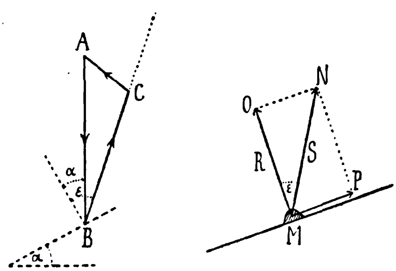
$$F_{min} = W \sin (\varepsilon - \alpha).$$

Ježto dle předpokladu úlohy bylo těleso v klidu, muselo $\alpha < \varepsilon$, takže směr síly F jde vždy šikmo vzhůru. Síla tato tedy jednak těleso nadzvedá, t. j. zmenšuje jeho tlak na šikmou rovinu a tím také sílu od tření, jednak druhou svou složkou zvětšuje sílu tření překonávající.

Jiné jednoduché řešení úlohy plyne z geometrie sil; tři síly v prvém řešení vyjmenované musí býti právě ještě v rovnováze. Značí-li v trojúhelníku sil (viz obr. 2a) $AB = W$ váhu tělesa a BC reakci od šikmé roviny, musí CA býti hledanou silou F. AB jest dáno co do velikosti i směru. Ježto pak těleso má právě se dostati do pohybu, musí reakce roviny svírati s normálou k šikmé rovině úhel ε.

To jest okamžitě patrno z obr. 2b. Je-li výsledná reakce $MN = S$, jest složka její k rovině (libovolně skloněné) kolmá $MO = R = S \cdot \cos \varepsilon$ a složka rovnoběžná s rovinou

$$MP = S \sin \varepsilon = R \cdot tg\, \varepsilon = \mu R.$$



(a) (b)
Obr. 2.

Směr síly BC (obr. 2a) jest tedy dán úhlem $\sphericalangle ABC = \varepsilon - \alpha$. Síla CA bude patrně nejmenší, stojí-li na BC kolmo, při čemž stejně jako nahoře

$$A_{min} = F_{min} = W \sin (\varepsilon - \alpha),$$

a úhel mezi jejím směrem a rovinou horizontální $\varepsilon - \alpha$.

2.

Hmotný bod C spočívá na dokonale hladké nakloněné rovině sklonu α, jsa držen dvěma nitěmi délek l_1 a l_2, jichž druhé konce jsou připevněny k dvěma bodům A a B nakloněné roviny, kteréž oba leží v téže vodorovné rovině ve vzájemné vzdálenosti h. Najděte napětí obou nití a tlak hmotného bodu na nakloněnou rovinu, je-li jeho váha rovna W. *R.*

Řešení.

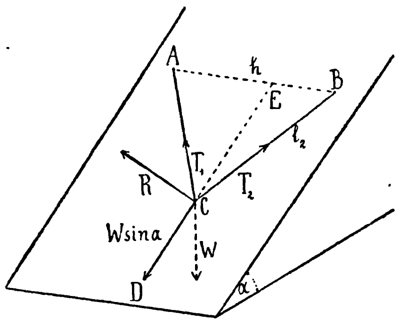
Hmotný bod C (obr. 3.) jest v rovnováze působením následujících sil:

1. vlastní váhy W, která působí vertikálně dolů;
2. reakce R, či tlaku od podkladu, který, ježto předpokládáme šikmou rovinu dokonale hladkou, musí na ni státi kolmo;
3. napětí T_1 a T_2 obou nití.

Ježto tyto síly jsou v rovnováze, musí algebraický součet jejich průmětů na libovolný směr býti roven nulle. Obě napětí nití nemají složek kolmých k šikmé rovině. Promítneme-li tedy všechny síly v tento směr k šikmé rovině kolmý, obdržíme pro reakci R vztah

$$R - W \cos\alpha = 0.$$

Reakci R rovným je tlak bodu C na šikmou rovinu.



Obr. 3.

V šikmé rovině samé jsou v rovnováze složka $CD = W \sin\alpha$ a napětí nití T_1 a T_2. Musí tudíž, jak z každého trojúhelníka sil se snadno dokáže

$$\frac{W \sin\alpha}{\sin ACB} = \frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{T_2}{\sin ACD}.$$

Za úhly ACB, BCD a ACD lze zavésti úhly A, B, C trojúhelníka ABC neboť, jak patrno,

$$\sin ACD = \sin ACE = \cos CAE = \cos A$$
$$\sin BCD = \sin BCE = \cos CBE = \cos B$$

takže

$$\frac{W \sin\alpha}{\sin C} = \frac{T_1}{\cos B} = \frac{T_2}{\cos A}.$$

Úhly A, B a C lze vyjádřit danými délkami $AC = l_1$, $BC = l_2$ a $AB = h$ pomocí známých trigonometrických vztahů.

Diskussi zvláštních případů $A = B = 0$, takže ACB leží v téže přímce a $C = 0$, $A = B = \frac{\pi}{2}$, takže niti jsou rovnoběžné, přenecháváme čtenáři.

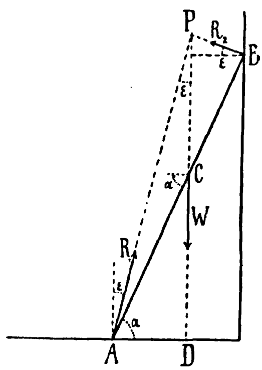
3.

Na drsné horizontální rovině stojí žebřík, druhým koncem opřený o stejně drsnou zeď vertikální (koefficient tření u obou konců je týž), takže tvoří s rovinou horizontální sklon α. Jak vysoko může po žebříku vystoupiti muž váhy W, aniž by žebřík se smekl? Vlastní váhu žebříku zanedbejte. *R.*

Řešení.

Na systém žebřík + člověk (obr. 4.) působí celkem tři síly:

1. reakce horizontální roviny R_1;
2. reakce vertikální stěny R_2;
3. váha člověka W.



Obr. 4.

Všechny tyto tři síly leží v téže vertikální rovině, takže mají-li býti v rovnováze, musí se ve svém prodloužení protínati v témž bodě.

Směr reakcí, začíná-li právě pohyb, jest dán odklonem $90 - \varepsilon$ k rovině, po níž se tření děje, kde $tg\,\varepsilon = \mu$ a μ je koefficient tření. (Viz řešení úlohy 1.) Ze směrů R_1 a R_2 najdeme v obrazci bod P, který musí ležet vertikálně nad bodem C, kam až smí člověk vystoupiti. Trojúhelník APB jest patrně pravoúhlý $\left(\sphericalangle APB = \frac{\pi}{2}\right)$, takže $AP = AB\,.\,cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \alpha\right)$.

Z trojúhelníka APC plyne dále

$$\frac{AC}{\sin \varepsilon} = \frac{AP}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)},$$

takže

$$AC = AP \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \alpha} = \frac{AB \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin (\varepsilon + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Je-li faktor u AB pravým zlomkem, udává nám výšku, kam až smí člověk vystoupiti; jest patrně $CD = AC \cdot \sin \alpha \,.\, = AB \sin \varepsilon \cdot \sin (\varepsilon + \alpha)\, tg\, \alpha$. Na váze člověka nezáleží, pokud ovšem zanedbáváme vlastní váhu žebříku.

Má-li býti možno, aby člověk vystoupil až na vrchol žebříku, musí patrně

$$\frac{\sin \varepsilon \cdot \sin (\varepsilon + \alpha)}{\cos \alpha} > 1$$

čili

$$\sin \varepsilon \cdot \sin (\varepsilon + \alpha) > \cos (\varepsilon + \alpha - \varepsilon)$$

$$\sin \varepsilon \cdot \sin (\varepsilon + \alpha) > \sin \varepsilon \sin (\varepsilon + \alpha) + \cos \varepsilon \cos (\varepsilon + \alpha)$$

neboli

$$\cos \varepsilon \cdot \cos (\varepsilon + \alpha) < 0,$$

to jest

$$\varepsilon + \alpha > 90^0.$$

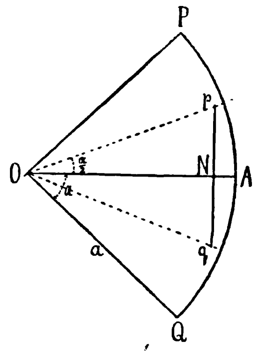
To jest ostatně ihned patrno z obr. 4., neboť dostoupí-li bodu B, procházejí tímto bodem dvě z daných sil, váha W a reakce v bodě B, takže reakce v bodě A musí také jím procházeti, což je možno jen, je-li $\varepsilon + \alpha = 90^0$. Nemá-li v tom okamžiku počít sklouznutí žebříku, musí $\varepsilon + \alpha > 90^0$.

4.

Vypočtěte bez užití differenciálního a integrálního počtu polohu těžiště kruhového oblouku poloměru a, a středového úhlu 2α. *R.*

Řešení.

Budiž PQ (obr. 5.) daný kruhový oblouk. Ze symmetrie jest patrno, že těžiště p poloviny oblouku PA musí ležeti na přímce úhel POA půlící. Podobně musí býti q těžištěm druhé poloviny oblouku, totiž AQ. Těžištěm celého oblouku PQ bude bod N, který leží uprostřed na spojnici pq. Ježto úhel $pON = \frac{\alpha}{2}$, jest $ON = \overline{Op} \, . \, \cos\frac{\alpha}{2}$.



Obr. 5.

Jest tedy vzdálenost těžiště oblouku 2α od středu rovna $\cos\frac{\alpha}{2}$ kráte vzdálenosti těžiště oblouku α od středu. Označíme-li si zmíněné vzdálenosti symboly, resp. $d\,(2\alpha)$ a $d\,(\alpha)$, platí tedy

$$d\,(2\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} \, . \, d\,(\alpha).$$

Dosadíme-li si za α úhel poloviční, platí dále

$$d\,(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{4} \, . \, d\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

a

$$d\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{8} \, . \, d\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

čili všeobecně

$$\vdots$$

$$d\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \cos\frac{\alpha}{2^{n+2}} \, . \, d\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

Znásobením pravých i levých stran všech rovnic plyne tedy

$$d\,(2\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} \, . \, \cos\frac{\alpha}{4} \, . \, \cos\frac{\alpha}{8} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^{n+2}} \, . \, d\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

Je-li n číslo velmi veliké, leží těžiště uprostřed nekonečně krátkého oklоučku, který lze považovati za přímku, takže $d\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = a$, poloměru kruhového oblouku. Je-li tedy n nekonečně velikým, obdržíme pro hledanou vzdálenost d vzorec

$$d\,(2\alpha) = d = a\,.\,\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\,.\,.\,.\text{ in inf.}$$

Tento vzorec lze převésti na konečný tvar substitucemi

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{4}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{8} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{8}} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{4}}{8\sin\frac{\alpha}{8}}\quad\text{atd.}$$

Znásobením na obou stranách obdržíme

$$\cos\frac{\alpha}{2}\,.\cos\frac{\alpha}{4}\,.\cos\frac{\alpha}{8}\,.\,.\,.\cos\frac{\alpha}{2^m} = \frac{\sin\alpha}{2^m\sin\frac{\alpha}{2^m}}.$$

Je-li m nekonečně velikým, můžeme za sinus velmi malého úhlu psát úhel (v obloukové míře), čili $\sin\frac{\alpha}{2^m} = \frac{\alpha}{2^m}$, takže pro hledanou vzdálenost těžiště oblouku dostáváme

$$d\,(2\alpha) = d = a\,.\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Z toho na př. těžiště polokruhu $(2\alpha = \pi)$

$$d\,(\pi) = \frac{2a}{\pi} = 0{\cdot}6366\,.\,a.$$

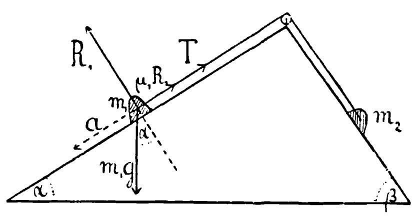
5.

Trojboký hranol spočívá jednou stranou na rovině horizontální, tak že druhá strana tvoří s rovinou vodorovnou úhel α, třetí pak úhel β. Na těchto dvou opačně skloněných šikmých rovinách spočívají hmoty m_1 a m_2 spojené bezváznou nití, jež běží přes kladku na hoření hraně upevněnou, takže je rovnoběžná s oběma nakloněnými rovinami. Jsou-li koefficienty tření na obou rovinách μ_1 a μ_2, najděte výsledný pohyb těch hmot.

R.

Řešení.

Jestliže pohyb vůbec nastane, tedy se pohybuje jedna z hmot, třeba m_1 (obr. 6.), po své šikmé rovině dolů, druhá m_2 vzhůru a pohyb obou je charakterisován týmž urychlením a ježto nit jest neprodlužitelnou.



Obr. 6.

Síly působící na prvou hmotu m_1 jsou:

1. síla tíže = váha hmoty = $m_1 g$ působící vertikálně dolů;

2. napětí niti (všude stejné) $T_1 = T_2 = T$ směrem šikmé roviny vzhůru, a konečně

3. reakce od šikmé roviny, která budiž rozložena na složku R_1 k šikmé rovině kolmou, a složku $\mu_1 R_1$ ve směru proti pohybu (srovnej poznámku v řešení úlohy 1.). Hmota m_1 nemá urychlení k šikmé rovině kolmého, takže součet průmětů veškerých sil na tento směr musí býti roven nulle, t. j.

$$R_1 - m_1 g \cos \alpha = 0.$$

Tím je dána neznámá složka reakce šikmé roviny ve směru na ni kolmém. Součet průmětů sil na směr šikmé roviny, dolů za positivní vzatý, musí se rovnati síle výsledné, urychlení a hmoty

m_1 způsobující, to jest součinu $m_1 a$. Dle toho máme

$$m_1 g \sin\alpha - \mu_1 R_1 - T = m_1 a,$$

čili dosazením za R_1

$$m_1 g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - T = m_1 a.$$

U druhé hmoty m_2 obdržíme zcela týmž způsobem

$$m_2 g (\sin\beta + \mu_2 \cos\beta) - T = - m_2 a.$$

Eliminujeme-li z obou rovnic neznámé napětí niti T odečtením druhé rovnice od prvé, dostáváme pro výsledné urychlení

$$a = \frac{m_1 g (\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) - m_2 g (\sin\beta + \mu_2 \cos\beta)}{m_1 + m_2}.$$

Vyjde-li pro a hodnota záporná, vidíme, že nemůže existovati urychlení ve směru, v němž jsme pohyb předpokládali. Musíme zkusiti, zdali může existovati urychlení a' ve směru opačném dle vzorce přemístěním indexů 1 a 2 a úhlu α a β získaného

$$a' = \frac{m_2 g (\sin\beta - \mu_2 \cos\beta) - m_1 g (\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Vznikne-li i tu hodnota záporná, tedy to znamená, že, byl-li systém původně v klidu, tedy pohyb vůbec nenastane.

Víme-li však, že jsme systému původně udělili jistou počáteční rychlost v_1, na př. směrem dolů po prvé rovině, tedy účinkuje urychlení a, zrychlujíc či zpožďujíc původní pohyb, dle toho, je-li kladné či záporné. V druhém případě se systém zastaví po době t_1 dané vztahem $v_1 + a\, t_1 = 0$ a jest nutno ze znamení a' vyšetřiti, zdali ze stavu klidu bude se pohybovati dále opačným směrem.

6.

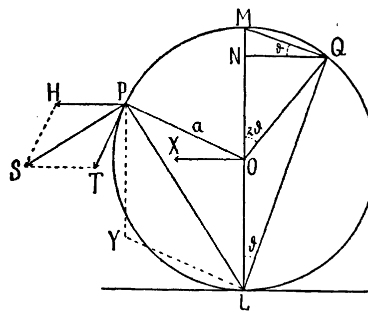
Cyklista jede po horizontální rovině rychlostí V. Ze zadního kola poloměru a odletují při tom zachycené kousky bláta. Do které největší výšky mohou při tom býti odhozeny?

R.

Řešení.

Nejprve jest nutno vyšetřiti skutečnou rychlost libovolného bodu P (obr. 7.) na obvodu kola vzhledem k zemi.

Vzhledem ke středu kola O má bod P rychlost PT směrem tangenty ke kruhu poloměru a. Střed kola O má však vzhledem k zemi sám rychlost OX směrem horizontálním. Nenastává-li žádné smýkání kola po podkladu, musí nutně obě rychlosti býti stejné, to jest $PT = OX = V$. Skutečnou rychlost (vzhledem k zemi) bodu P obdržíme složením rychlostí PT a $PH = OX$, takže jest dána co do směru i velikosti diagonálou PS rovnoběžníka rychlostí $PHST$, kteráž patrně půlí úhel HPT. Spojíme-li



Obr. 7.

bod P se středem kola O a s jeho nejnižším bodem L, vznikne nám trojúhelník LOP podobný trojúhelníku PTS, jak je okamžitě patrno, doplníme-li stranami PY a YL rovnoběžník $LOPY$. Mimo to je patrně $PS \perp LP$.

Z podobnosti trojúhelníků pak plyne

$$\frac{PS}{PT} = \frac{LP}{LO}, \quad \text{čili} \quad PS = V \cdot \frac{LP}{a}.$$

Je-li tudíž rychlost V znázorněna poloměrem kruhu LO, jest výsledná rychlost bodu P vzhledem k zemi znázorněna délkou tětivy LP a její směr jest na tětivě té kolmý. To platí pro libovolný bod obvodu. Z toho plyne na příklad, že skutečná rychlost nejvyššího bodu kola M jest rovna $2V$ a má směr horizontální. Rychlost bodu nejnižšího L jest rovna nulle, jak je ostatně samozřejmé.

Právě získaného výsledku užijeme nyní k řešení naší vlastní úlohy. Skutečná rychlost kousku bláta, utrhšího se od obvodového bodu Q, je stejná jako rychlost tohoto bodu, tedy rovna $V.\frac{LQ}{a}$ a má směr $QM \perp LQ$. Označíme-li si úhel OQL písmenou ϑ, je výška, v níž kousek bláta byl odhozen nad rovinou dráhy, rovna $LN = LO + ON = a\,(1 + \cos 2\vartheta)$.

Vertikální složka jeho rychlosti jest

$$V.\frac{QL}{a}.\sin\vartheta = \frac{V}{a}\sin\vartheta.LM.\cos\vartheta = 2V\sin\vartheta\cos\vartheta = V\sin 2\vartheta.$$

S touto vertikální rychlostí vržené těleso dosáhne výšky vrhu $\frac{(V.\sin 2\vartheta)^2}{2g}$, takže celková výška, jíž odhozený kousek bláta dosáhne, jest

$$h = a + a\cos 2\vartheta + \frac{V^2}{2g}\sin^2 2\vartheta.$$

Dosadíme-li za $\sin^2 2\vartheta = 1 - \cos^2 2\vartheta$, můžeme psáti dosaženou výšku h jakožto kvadratickou funkci $\cos 2\vartheta$ ve tvaru

$$h = \left(a + \frac{V^2}{2g}\right) + a\cos 2\vartheta - \frac{V^2}{2g}\cos^2 2\vartheta$$

nebo doplněním

$$h = \left(a + \frac{V^2}{2g}\right) + \frac{a^2 g}{2V^2} - \frac{V^2}{2g}\left[\cos 2\vartheta - \frac{ag}{V^2}\right]^2.$$

Výška h dosahuje patrně tehdy maxima, jestliže poslední podstatně positivní člen, který odečítáme, je roven nulle, to jest, je-li

$$\cos 2\vartheta = \frac{ag}{V^2}.$$

Tato podmínka ovšem může býti splněna pouze tehdy, je-li $V^2 > ag$. V tomto případě je maximální výška nad zemí, jíž bláto může dosáhnouti, rovna

$$h_{max} = a + \frac{V^2}{2g} + \frac{a^2 g}{2V^2} = \frac{(ag + V^2)^2}{2gV^2}.$$

Není-li $\frac{ag}{V^2}$ pravým zlomkem, musíme výraz v závorkách ve vztahu pro h učiniti absolutně co nejmenším, to jest $\cos 2\vartheta = 1$, čili $\vartheta = 0$. Pak největší výše nad zemí dosáhne bláto odlétnuvší v bodě M od kola, a ježto odletuje horizontálně, nemůže se dostati výše než bod M, takže $h = 2a$.

7.

Velmi úzká na jednom konci trvale uzavřená trubice skleněná všude téhož průřezu je po celé své délce opatřena stejnoměrným dělením. Malý sloupeček rtuťový délky l cm uzavírá v trubici otvorem vzhůru vertikálně postavené jistý objem suchého vzduchu, daný za teploty 0^0 C počtem n dílců. Jaký nový objem n' dílců zaujme vzduch, zvýšíme-li teplotu na t^0 C a skloníme-li trubici, aby tvořila úhel ϑ s horizontální rovinou? Za pokusu jest barometrický tlak dán výškou H cm nullstupňového rtuťového sloupce a kubický koefficient roztažlivosti skla je k, koefficient roztažlivosti vzduchu pak α.

Mohli bychom dvou odečtení za vertikálních poloh jednou otvorem vzhůru, podruhé dolů a za teploty nezměněné užít k stanovení barometrického tlaku?

Všeobecný výsledek applikujte na hodnoty $n = 72$, $k = 0{\cdot}00027$, $\alpha = 0{\cdot}00367$, $t = 50^0$, $\vartheta = 30^0$, $l = 5$ cm, $H = 76$ cm.

R.

Řešení, jež zaslal p. *J. Hak*, stud. reál. v Brně.

Stojí-li trubice otvorem vzhůru, působí na uzavřený sloupec vzduchový tlak daný délkou sloupce rtuťového $(H + l)$ *cm*. Zaveďme pro zdánlivý koefficient roztažlivosti vzduchu ve skle označení $\gamma = \alpha - k$. Zvýšíme-li za nezměněné polohy teplotu z 0^0 na t^0 *C*, stoupne objem vzduchu z n dílců na $n^t = n\,(1 + \gamma t)$. Skloníme-li pak trubici, aby tvořila úhel ϑ s horizontální rovinou, zmenší se tlak na vzduch působící z $(H + l)$ na $(H + l \sin\vartheta)$ a nový objem bude dán počtem dílců

$$n'_t = n_t \frac{H + l}{H + l \sin\vartheta}$$

čili

$$n'_t = n\,(1 + \gamma t)\,\frac{H + l}{H + l \sin\vartheta}.$$

Jsou-li objemy při obou vertikálních polohách za nezměněné teploty dány odečtenými počty dílců n_1 a n_2, platí

$$n_2\,(H - l) = n_1\,(H + l)$$

a z toho plyne pro barometrický tlak

$$H = l \cdot \frac{n_2 + n_1}{n_2 - n_1}.$$

Dosazením udaných zvláštních hodnot do hořeního vzorce plyne

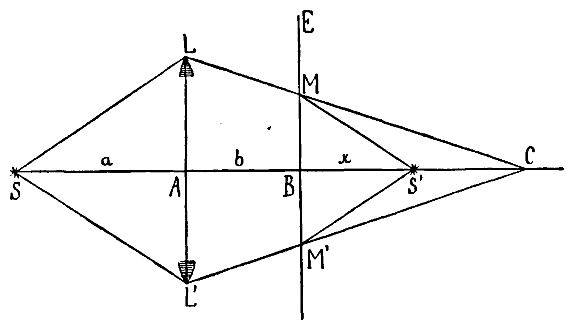
$$n'_t = 86{\cdot}9.$$

8.

Před spojnou čočkou L ohniskové vzdálenosti f jest postaven centricky ve vzdálenosti a na ose bodový zdroj světelný S. Paprsky lomené dopadají na průsvitné stínítko E ve vzdálenosti b za čočkou, kdež vytvoří osvětlenou skvrnu M. Do které vzdálenosti x za stínítkem bychom museli postaviti nový zdroj S_2 téže svítivosti jako S_1, aby (bez užití čočky) osvětlil stínítko stejně, jako je skvrna M? *R.*

Řešení, jež zaslal p. *K. Vavřina*, stud. VIII. g. v Čáslavi.

Mají-li oba zdroje S a S' tutéž svítivost, tedy vysílají v témž prostorovém úhlu totéž množství paprsků. Podmínka



Obr. 8.

úlohy jest tudíž vyjádřena (obr. 8.) rovností úhlů

$$\sphericalangle LSL' = \sphericalangle MS'M'.$$

Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle ASL \sim \triangle BS'M$$

a

$$\triangle ACL \sim \triangle BCM$$

plyne

$$\overline{AL} : \overline{BM} = a : x$$

a

$$\overline{AL} : \overline{BM} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

čili

$$a : x = \overline{AC} : \overline{BC},$$

kde jsme psali $\overline{AS} = a$ a hledaná vzdálenost $BS' = x$. Pro spojnou čočku platí vztah

$$(a - f)\,(\overline{AC} - f) = f^2$$

čili

$$\overline{AC} = \frac{af}{a - f} \quad \text{a} \quad \overline{BC} = \overline{AC} - b = \frac{(a + b)\,f - ab}{a - f}.$$

Dosazením do hoření úměry

$$a \,.\, x = \frac{af}{a - f} : \frac{(a + b)\,f - ab}{a - f}$$

plyne pro hledanou vzdálenost

$$x = \frac{f\,(a + b) - ab}{f}.$$

9.

U Coulombových torsních vážek jest zavěšena magnetka na tenkém vláknu kovovém. Má-li se vychýliti z meridianu o 1^0, musíme hoření konec vlákna stočiti o $n = 24^0$. Přiblížíme-li k jednomu z polů magnetky stejnojmenný pol dlouhého magnetu tyčovitého, nastane výchylka magnetky z meridianu o úhel $\alpha = 20^0$ a tento se zredukuje na $\alpha' = 12^0$, stočíme-li v opačném směru hoření konce vlákna o $3^3/_4$ celých otoček. Který zákon o vzájemném působení dvou magnetických polů lze z tohoto pokusu dedukovati?

Řešení. Supponujme, že síla působící mezi dvěma (isolovanými) póly magnetickými jest rovna $\frac{Const.}{r^x}$, kde r jest jejich vzdálenost.

V našem případě při výchylce α jest vzdálenost obou pólů rovna $l\,sin\,\frac{\alpha}{2}$, při α' pak $l\,sin\,\frac{\alpha'}{2}$, takže poměr sil jest

$$\left(\frac{sin\,\frac{\alpha'}{2}}{sin\,\frac{\alpha}{2}}\right)^x$$

Uchylka zavěšené magnetky o 1^0 jest způsobena torsí závěsu o $(n - 1)^0$. Při úchylce α působí tedy zpětná síla od zemského magnetismu rovná $\alpha\,(n - 1)$ a torse závěsu α, tedy celkem síla měřená součtem $\alpha\,(n - 1) + \alpha = \alpha n$. Při druhém pokuse, kde torsní hlavice byla otočena o k^0, působí zpět síly $\alpha'\,(n - 1)$ a $k + \alpha'$. Z toho plyne vztah

$$\left(\frac{sin\,\frac{\alpha'}{2}}{sin\,\frac{\alpha}{2}}\right)^x = \frac{\alpha n}{\alpha' n + k}.$$

Dosazením hodnot daných plynulo by $x = 2{\cdot}4$. Hodnoty správnější jsou $n = 25^0$ a otočka torsní hlavice v druhém pokuse o $m = 3\,.\,360^0 = 1080^0$. Pak plyne $x = 2{\cdot}0$.

Přesnější theoretické zpracování bylo by následující: Síla $\frac{Const.}{\left(l\,sin\,\frac{\alpha}{2}\right)^x}$ působí na rameno délky $\frac{l}{2}$ rovné poloviční délce magnetu vzhledem k tomu, že její směr svírá s kolmicí k rameni úhel $\frac{\alpha}{2}$, otáčivým momentem

$$\frac{Const.\,\frac{l}{2}\,.\,cos\,\frac{\alpha}{2}}{\left(l\,sin\,\frac{\alpha}{2}\right)^x}.$$

Podobný výraz mame pro otáčivý moment za výchylky α'.

Je-li intensita zemského pole magnetického rovna H, a množství magnetické na pólu zavěšené magnetky rovno m, jest otáčivý moment $m\,H\,.\,l\,.\,sin\,1^0$ měřen torsí vlákna o $(n - 1)^0$, tedy roven $A\,.\,(n - 1)$, kde A jest jistá konstanta od materiálu a tloušťky vlákna závislá. Její velikost $A = \frac{1}{n-1} mHl \sin 1^0$ značí torsní moment vlákna pro otočení hlavice o 1^0.

Má-li býti v případě výchylky α a α' rovnováha, musí se otáčecí momenty vzniklé odpuzením souhlasných pólů rovnati momentům zpět působícím a jednak od zemského pole magnetického, jednak od torse pochodícím. Tak vznikají rovnice

$$\frac{Const. \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\left(l \sin \frac{\alpha}{2}\right)^x} = ml H \sin \alpha + \frac{\alpha}{n-1} \,.\, ml\, H \sin 1^0$$

$$\frac{Const. \frac{l}{2} \,.\, \cos \frac{\alpha'}{2}}{\left(l \sin \frac{\alpha'}{2}\right)^x} = ml\, H \sin \alpha' + \frac{\alpha + k}{n-1} ml\, H \sin 1^0.$$

Dělením obou máme pro určení x rovnici

$$\left(\frac{\sin \frac{\alpha'}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^x \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha'}{2}} = \frac{\sin \alpha + \frac{\alpha}{n-1} \sin 1^0}{\sin \alpha' + \frac{\alpha' + k}{n-1} \sin. 1^0},$$

kterou po dosazení numerických hodnot lze snadno řešiti.

Dříve udaný vztah jednodušší obdržíme patrně, kladouce na levé straně přibližně $\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha'}{2}$ a píšíce na pravé straně úhly místo sinusů.

10.

Elektrickým proudem vyvine se za $n = 5$ minut, za teploty $t = 16^0$ C a barometrického tlaku $b = 71$ cm objem $v = 150{\cdot}6\ cm^3$ třaskavého plynu, při čemž stojí voda ve voltametru o $h = 13{\cdot}6$ cm níže než vně voltametrické trubice. Do téhož proudovodu zařazená tangentová boussola jeví úchylku $\alpha = 17^0$. Jak veliký je její redukční faktor? Specifická hmota rtuti je $S = 13{\cdot}6 \frac{g}{cm^3}$. R.

Řešení.*) Zaslal p. *J. Hak*, stud. reál. v Brně.

Tlak, jenž působí na vyvinutý plyn ve voltametrické trubici, jest $P = b + \frac{h}{S}$, při čemž jeho absolutní teplota jest $T = 273 + t$. Objem, který by zaujímal za teploty $T_0 = 273^0$ a při barometrickém tlaku $P_0 = 76\ cm\ Hg$, jest dle stavojevné rovnice

$$V = \frac{V \cdot P \cdot T_0}{P_0 T}.$$

Proud intensity 1 Ampère vyvine za 1 sekundu objem $V_0 = 0{\cdot}174\ cm^3$ třaskavého plynu, takže intensita proudu, jenž za čas N sekund ($N = 60n$) vyvine objem V, jest

$$J = \frac{V}{V_0 N}.$$

Redukční faktor tangentové boussoly jest pak dán vztahem $J = C \cdot tang\ \alpha$. Dosazením obdržíme vzorec

$$C = \frac{vPT_0}{P_0 T N V_0} \cdot cotg\ \alpha,$$

takže z daných hodnot plyne $C = 8\,445$ Ampère.

Řešení úloh zaslali:

Pánové:

Jan Andrlík, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 4., 9., 12., 14., 21., 22., f. 1., 6., 10.,

Zd. Bilian, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 7.—10., 12., 13., 14., 17., 18., 20.—25., 27., f. 1., 5., 7., 10.,

Ladislav Blumenschein, stud. VII. tř. r. v Kroměříži
m. 1., 3., 4., 11., 12., 14., 15., 16., 20., 22, d. 1., 4.,

Arnošt Benda, stud. VIII. tř. g. v Brně
m. 1., 3., 4., 7., 8., 9., 14., 15., 21.—24.,

Ladislav Daniel, stud. VII. tř. r. v Pardubicích
m. 1, 3.—9., 12.—16., 21.—23., 27., f. 6.,

---

*) V původní text vloudily se omylem dvě na prvý pohled patrné chyby: V řádku druhém stála 1 místo t a v posledním $S = 1{\cdot}36 \frac{g}{cm^3}$ místo správné známé hodnoty $13{\cdot}6 \frac{g}{cm^3}$.

Ignác Dvorník, stud. VII. tř. g. v Kroměříži
m. 7., 8., 9., 11., 14,
Miloš Eliáš, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—10., 12, 13., 14., 17., 18., 20.–25., 27., 30., f. 1., 5., 7., 10.,
Arnošt Feuermann, stud. VII. tř. g. v Přerově
m. 21., 22., 25.,
Jiří Friedländer, stud. VII. tř. g. v Roudnici
m. 1., 4.—7., 9., 12—15., 18., 20.–25., 29, 30.,
František Friedmann, stud. VI. tř. g. v Benešově
m. 1., 2., 4., 5., 8., 13., 14., 17., 21., 22., 23.,
Bedřich Frydrych, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí
m. 3.–8., 13. 14., 15., 21., 22., 23,
Fr. Gregor, stud. VII. tř. g. v Kroměříži
m. 20., 21., 23., 24., 25., 27., 28.,
Jan Hacker, stud. VII. tř. r. v Kladně
m. 1.—4., 6., 8., 10—16., 20., 21, 22., 24., 25., d. 1., 3.–7., f. 2., 3., 5,
J. Hak, stud. VII*a* tř. r. I. v Brně
m. 1., 3.—8., 10.—18., 20.–26., d. 1.—6, 8., f. 1., 4., 5., 7., 9., 10.,
Miloš Hampl, stud. VII*a* tř. g. v Č. Budějovicích
m. 1., 3., 4., 5., 7., 8., 9., 13.—16., 18., 20.–25,
Otakar Hanuš, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 4., 7., 8., 9, 14.,
V. Heindl, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 4., 7., 12., 13., 16., 20., 21.–24., 27., f. 1.—5., 7.,
Zdeněk Hladký, stud. VI. tř. g. v Mor. Ostravě
m. 1.—7., 9., 13., 14., 15., 21., 22., 23., 30..
Slč. *Zdenka Horáková*, stud. V. tř. r. g. „Minerva“ v Praze
m. 10.—14., 16., d. 1.
Pánové:
Frant. Horálek, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově
m. 4., 13., 25.,
Antonín Jandečka, stud. VII. tř. r. v Pardubicích
m. 1., 3., 4., 5., 7., 8., 9., 12., 13., 15., 16., 21., 22., 23., 27.,
Josef Janke, stud. III. tř. g. v Třebíči
m. 3., 4.,
O. Janota, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—10., 12.—16., 20.—25., 27.,
Boh. Kamenický, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech
m. 1.—9., 12.–18., 21.—30., f. 1., 3., 4., 6.,
Pavel Klein, stud. V. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 7., 9., 14., 15.,

Jaroslav Knotek, stud. VII. tř. r. v Karlíně
m. 1.—30.,
Josef Kodrle, stud. VII. tř. r. v Pardubicích
m. 1., 3.—9., 12.—23., 27., 28., d. 1.—4., 6.,
Květoslav Koldovský, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3.—10., 12., 13., 15., 16., 20.—25., 27.,
Ladislav Kolenatý, stud. VII. tř. r. v Rakovníce
m. 1., 3.—10., 13., 14., 15., 17., 20.—24., 27., 28.,
František Korec, stud. VIII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—10., 12., 13., 14., 16., 20.—25., 27., 30., f. 1., 4.—7., 10.,
Jan Kouba, stud. VII*a* tř. r. v Karlíně
m. 1.—30.,
Jan Květ, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 10., 12., 13., 20.—24., f. 1, 3., 5., 7., 10.,
Rudolf Lukeš, stud. VII*a* tř. r. v Karlíně
f. 1.—10.,
Hub. Masařík, stud. g. v Přerově
1., 4., 8., 12., 15., 21., 22., 23.,
Josef Mašek, stud. VII. tř. r. v Jičíně
m. 1., 3.—6., 14., 15, 16., 17., 20., 21., 22., 24.,
Čestmír Moravec, stud. VIII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1. 3.—9., 12., 13, 14, 20.—23., 25, 30, f. 6., 10.,
Jan A. Novák, stud. VII. tř. r. v Uh. Brodě
1., 4.—8., 11., 18., 20.—25, d. 1.—8., f. 1., 3.—6.,
Jiří Pazourek, stud. VII. tř. g v Praze, v Žitné ul
m. 1., 3.—10., 12., 13, 14., 16., 18., 20.—25., 27., 30., f. 1., 4.—8., 10.,
Jacques Platschick, stud VII tř. g. v Uh. Hradišti
m. 1., 4., 5., 7, 12., 15, 21., 22, 24,
Karel Pohanka, stud VII tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—10., 12., 13., 14., 16, 20—25., 27., 30., f. 1., 4.—7, 10.,
E. Pokorný, stud. VI. tř. g. v Praze v Žitné ul.
m. 1., 3. 4., 5., 7., 8, 9., 13, 14, 16., 27,
Silv. Prát, stud. VIII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 4, 6—10, 13, 14., 20., 21., 22., 24, 25, 30., f. 1., 4, 6, 10.,
Boh. Procházka, stud V. tř. r. ve Val Meziříčí
m. 21., 22.,
Václav Procházka, stud. VII*b* tř. r. v Karlíně,
d. 1., 3., 4., 6., 7, 8., f 1., 2, 3., 5., 6., 7,
Zdeněk Radl, stud VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m 1., 3. 10., 12., 13., 14, 16, 17, 18., 20.—25., 27., 30., f. 1, 5., 7., 10,

Hubert Ripka, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3.—10, 12., 13., 14., 16., 20.—25., 27, 30, f 1. 4.—7., 10.,
Antonín Roháč, stud. IV. tř. g. v Praze III.
m. 25*b*.,
František Řihák, stud. VII. tř. r. v Kroměříži
m. 1., 3., 4., 21., f. 8, 10,
Josef Schránil, stud VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 4, 9, 21., 22., f. 1., 6.,
Arved Smíchovský, stud. V. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 9., 13., 21., 22., 25.,
Antonín Soukup, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 4, 13, 16., 18., 21.—25., 27.,
Alois Sojka, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3, 4., 6., 7., 9., 14.,
Egon Stern, stud VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 4., 7.—10., 12.—16., 18, 20.—25., 27., f. 1, 2., 5., 7., 10,
R. Stojánek, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře
m. 1.—23., 25.—30., d. 1.—8., f. 1.- 10.,
Václav Střebský, stud. VI. tř. r. g. v Klatovech
m. 21., 22.,
Ludvík Suchý, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 7., 8., 9., 12.—18., 20.—24., 27., f. 1., 2., 5., 7., 10.,
B. Tetour, stud. VII. tř. g. v Kroměříži
m. 1., 3., 4., 6.—9., 11.—15., 20.—27., 29., 30.,
Antonín Vávra, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 7., 8., 9., 12.—15., 18., 20., 21., 23., 24., 27., f. 1., 2., 5., 7.,
Karel Vavřina, stud. VIII. tř. g. v Čáslavi
m. 1., 3., 4., 5., 7., 8., 13., 14., 15., 21.—24., f. 1., 2., 3., 5.—8., 10.,
Antonín Velešík, stud. VI. tř. r. v Lipníku
m. 4., 21., 22.,
Václav Veselý, stud. VII*b* tř. g. v Č. Budějovicích
m. 3., 4., 10.,
Karel Viktora, soukromý studující
m. 1., 7., 8., 9., 13., 15., 17.—20.,
Jaroslav Vlček, stud. VI. tř. r. v Turnově
m. 25.,
Otakar Šafář, stud. III. r. vyš. prům. školy (stroj. odd.) v Brně
m. 1., 3.—7., 11.—16, 18., 20., 22., 23., 25., 28., 29, 30., d. 1.—6., 8.,
Boh. Šimek, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 7.-10., 12., 13., 15.—18, 20.—25., 27.,

Vladimír Škarda, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 3., 4., 13., 16., 18., 21.—25., 27.,
E. Šlechta, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře
m. 1.—30.,
Miloslav Zahrádka, stud. VII. tř. g. v Benešově
m. 1.—5., 8., 13., 14., 15., 17., 21., 22., 23.,
Bohumil Zajíček, stud. VI. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 4., 12., 13., 16. 20., 27., f. 2., 7.,
Lad. Zrcek, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech
m. 1., 3.—10., 14.—18., 21.—27., 29., 30.,
Vladimír Žabský, stud. VII. tř. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 3., 4., 8., 9.,
Beze jména, gymn. z Hradce Králové
m. 12., 13., 16.

Udělení cen.

Z mathematiky:

Redakce úloh přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pánům řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty Českých Mathematiků a Fysiků".

Ceny první:

J. Hak, VII*a* r. I. v Brně
Boh. Kamenický, VII. r. na Král. Vinohradech
Jaroslav Knotek, VII. r. Karlíně
Josef Kodrle, VII. r. v Pardubicích
Jan Kouba, VII*a* r. v Karlíně
Zdeněk Radl, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
R. Stojánek, VI. r. v Kutné Hoře
E. Šlechta, VII. r. v Kutné Hoře
Lad. Zrcek, VII. r. na Král. Vinohradech

Spis: Dr. F. J. Studnička, Úvod do analytické geometrie v rovině, obdrží pánové *Jan Kouba* a *Jaroslav Knotek*.

Ceny druhé:

Miloš Eliáš, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
O. Janota, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
Květoslav Koldovský, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
Ladislav Kolenatý, VII. r. v Rakovníce
Jiří Pazourek, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Karel Pohanka, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Hubert Ripka, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Otakar Šafář, III. r. vyš. prům. šk. v Brně
B. Tetour, VII. g. v Kroměříži.

Ceny třetí:

Zd. Bilian, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Ladislav Daniel, VII. r. v Pardubicích
Jiří Friedländer, VII. g. v Roudnici
Jan Hacker, VII. r. v Kladně
Miloš Hampl, VII. g. v Č. Budějovicích
František Korec, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Egon Stern, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Ludvík Suchý, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Boh. Šimek, VII. g. v Praze, v Žitné ul.

Z deskriptivní geometrie:

Spis: K. Zahradník: O plochách druhého stupně, obdrží pánové:

Josef Hak, VII. r. v Brně,
Josef Kodrle, VII. r. v Pardubicích,
Jan A. Novák, VI. r. v Uherském Brodě.

Mimo to obdrží pánové:

Jan Hacker, VII. r. v Kladně,
Boh. Kamenický, VII. r. na Kr. Vinohradech,
V. Procházka, VII*b* r. v Karlíně,
Rudolf Stojánek, VI. r. v Kutné Hoře,
Otakar Šafář, vyšší průmysl. škola v Brně,

spisy: Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné. Díl I., II., III., a Jarolímek: Deskriptivní geometrie v úlohách.

Z fysiky:

Strouhalovu „Thermiku“ obdrží pp.:

Lukeš Rud., VII*a* r. v Karlíně
Stojánek Rud., VI. r. v Kutné Hoře

Strouhalovu: *„Ocel* a její vlastnosti galvanické a magnetické“, obdrží pp.:

Hak J., VII*a* r. v Brně
Heindl V., VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Korec Fr., VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Novák J. F. VI. r. v Uherském Brodě
Pazourek Jiří, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Pohanka Karel, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Procházka Václav, VII*b* r. v Karlíně
Ripka Hub., VIII. gymn. v Praze, v Žitné ul.
Vavřina Karel, VIII. g. v Čáslavi.