Eduard Weyr

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii ploch druhého stupně. [I.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 26 (1897), No. 1, 1--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109189

# O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii ploch druhého stupně.

Napsal

Eduard Weyr.

Následující úvahy jsou přirozeným způsobem obdobny oněm, jež jsem ve sv. XXIV. t. Časopisu uveřejnil a jež se vztahovaly ku geometrii v rovině; z té příčiny vytčeny zde mnohdy jen výsledky a poukázáno na odvození l. c. podané.

## 1. Homogenní souřadnice bodu.

Buďte $x$, $y$, $z$ pravoúhlé souřadnice bodu a

$$V_\nu = x \cos \alpha_\nu + y \cos \beta_\nu + z \cos \gamma_\nu - p_\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

normalné rovnice čtyr rovin, z nichž žádná není v nekonečnu a jež neprocházejí jedním bodem; předpokládáme tedy, že čtyry hodnoty $p_\nu$ jsou konečné a že determinant, jehož $\nu$-tý řádek jest

$$\cos \alpha_\nu, \ \cos \beta_\nu, \ \cos \gamma_\nu, \ p_\nu,$$

jest různý od nully.

Násobme vzdálenosti $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ bodu $x$, $y$, $z$ od oněch čtyr *základních* rovin libovolnými stálými $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, různými od nully, a zvolme čtyry hodnoty $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ úměrné těmto násobkům, t. j. položme

$$\varrho x_\nu = c_\nu V_\nu,$$

značíce $\varrho$ libovolnou hodnotu různou od nully; pak zoveme $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ homogenními (tetrametrickými) souřadnicemi bodu $x$, $y$, $z$ vztaženými k základnímu čtyrstěnu, omezenému oněmi čtyrmi rovinami.

Že jsou poměry těchto souřadnic bodem $x$, $y$, $z$ úplně stanoveny, jest patrno; avšak i naopak jest bod oněmi poměry stanoven. Obdržíme totiž, dělíme-li vždy dvě ze čtyr rovnic

$$(1)\qquad \varrho x_\nu = c_\nu (x \cos \alpha_\nu + y \cos \beta_\nu + z \cos \gamma_\nu - p_\nu),$$

celkem šest rovnic, jež můžeme patrně psáti

$$\begin{aligned} e_1 V_1 - e_2 V_2 = 0,\ e_1 V_1 - e_3 V_3 = 0,\ e_1 V_1 - e_4 V_4 = 0, \\ e_2 V_2 - e_3 V_3 = 0,\ e_2 V_2 - e_4 V_4 = 0,\ e_3 V_3 - e_4 V_4 = 0, \end{aligned}$$

píšeme-li za příčinou stručnosti $e_\nu$ místo podílu $\frac{c_\nu}{x_\nu}$; rovnice ty stanoví šest rovin jedním bodem procházejících. První tři roviny mají společný bod, jímž procházejí ostatní tři, protože čtvrtá rovina patrně prochází průsečnou přímkou první a druhé, pátá průsečnicí první a třetí, a šestá průsečnicí čtvrté a páté.

Řešením rovnic (1) dle hodnot $x$, $y$, $z$, $\varrho$ nalezneme pro $x$, $y$, $z$ podíly o společném jmenovateli

$$x = \frac{| c_\nu p_\nu,\ c_\nu \cos \beta_\nu,\ c_\nu \cos \gamma_\nu,\ x_\nu |}{| c_\nu \cos \alpha_\nu,\ c_\nu \cos \beta_\nu,\ c_\nu \cos \gamma_\nu,\ x_\nu |},$$

$$y = \frac{| c_\nu \cos \alpha_\nu,\ c_\nu p_\nu,\ c_\nu \cos \gamma_\nu,\ x_\nu |}{| c_\nu \cos \alpha_\nu,\ c_\nu \cos \beta_\nu,\ c_\nu \cos \gamma_\nu,\ x_\nu |},$$

$$z = \frac{| c_\nu \cos \alpha_\nu,\ c_\nu \cos \beta_\nu,\ c_\nu p_\nu,\ x_\nu |}{| c_\nu \cos \alpha_\nu,\ c_\nu \cos \beta_\nu,\ c_\nu \cos \gamma_\nu,\ x_\nu |},$$

při čemž každý determinant vytčen vypsáním $\nu$-ho řádku. Jeví se tedy pravoúhlé souřadnice jakožto podíly z linearných homogenních funkcí tetrametrických souřadnic o témž jmenovateli.

## 2. Souvislost homogenních souřadnic bodu s nehomogenními.

Hodnoty pro pravoúhlé souřadnice nalezené jsou tvaru

$$(2)\qquad x = \frac{\Sigma a_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu},\quad y = \frac{\Sigma b_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu},\quad z = \frac{\Sigma c_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu}.$$

Jest zajímavo, že lze naopak každé tři rovnice tohoto tvaru vyložiti hořejším způsobem, jen když determinant z šestnácti koefficientův $a, b, c, d$ nezmizí, t. j. když platí

$$\Sigma \pm (a_1 b_2 c_3 d_4) \gtrless 0.$$

Předpokládejme na okamžik, že výrok jest správný, a vezměme v úvahu vrcholy základního čtyrstěnu, t. j. čtyrstěnu, jehož stěny jsou základní roviny

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Pravoúhlé souřadnice těchto základních vrcholů by patrně byly

$$\left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{c_1}{d_1}\right), \left(\frac{a_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_2}, \frac{c_2}{d_2}\right), \left(\frac{a_3}{d_3}, \frac{b_3}{d_3}, \frac{c_3}{d_3}\right),$$
$$\left(\frac{a_4}{d_4}, \frac{b_4}{d_4}, \frac{c_4}{d_4}\right);$$

body ty vzhledem k supponované nerovnosti nejsou v jedné rovině.

Zvolme je za vrcholy základního čtyrstěnu a označme

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

příslušné tetrametrické souřadnice bodu $x$, $y$, $z$, třeba za supposice, že za stálé faktory volena veskrze jednice. Dle předchozího článku pak platí rovnice tvaru

$$(3) \qquad x = \frac{\Sigma A_\nu X_\nu}{\Sigma D_\nu X_\nu},\ y = \frac{\Sigma B_\nu X_\nu}{\Sigma D_\nu X_\nu},\ z = \frac{\Sigma C_\nu X_\nu}{\Sigma D_\nu X_\nu}$$

a zároveň budou

$$\left(\frac{A_\nu}{D_\nu}, \frac{B_\nu}{D_\nu}, \frac{C_\nu}{D_\nu}\right)$$

pravoúhlými souřadnicemi základních vrcholův. Máme tedy

$$\frac{A_\nu}{a_\nu} = \frac{B_\nu}{b_\nu} = \frac{C_\nu}{c_\nu} = \frac{D_\nu}{d_\nu}$$

a označíme-li literou $\lambda_\nu$ společnou hodnotu těchto podílů, přejdou rovnice (3) do rovnic (2), učiníme-li

$$x_\nu = \lambda_\nu X_\nu,$$

a tím tvrzení dokázáno.

Při tom ovšem předpokládáno, že žádná ze čtyr základních rovin není v nekonečnu; okolnost, že jeden nebo dva základní vrcholy jsou v nekonečnu, t. j. že jedna nebo dvě z hodnot $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ se rovnají nulle, podanému důkazu patrně nikterak nevadí.

Abychom přihlédli k vyňatému případu, kdy jedna základní rovina jest v nekonečnu, t. j. kdy *tři* základní vrcholy jsou v nekonečnu, vyjděme ze základního čtyrstěnu, jehož stěna $x_4 = 0$ jest velmi vzdálena od počátku pravoúhlých souřadnic, t.j. předpokládejme, že $p_4$ má hodnotu velmi velkou. Béřeme-li za $c_4$ hodnotu velmi malou, bude součin $c_4 V_4$ míti mírnou hodnotu; a učiníce $\lim p_4 = \infty$, $\lim c_4 = 0$ tak sice, že

$$\lim (c_4 p_4) = -c,$$

máme

$$\varrho x_4 = \lim (c_4 V_4) = c,$$

*a tetrametrická souřadnice $x_4$ jest tedy úměrná pevné, jinak libovolné hodnotě c.*

Případ ten n. p. nastane, mají-li rovnice (2) tvar

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4};$$

zde determinant $\Sigma \pm (a_1 b_2 c_3 d_4) = 1$, a vzhledem k

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0, \quad d_4 = 1,$$

jest čtvrtá základní rovina v nekonečnu, kdežto první tři splývají s rovinami souřadnými $yz$, $zx$, $xy$. Tetrametrické souřadnice $x_1$, $x_2$, $x_3$ jsou úměrny vzdálenostem bodu $x$, $y$, $z$ od těchto rovin souřadných, čtvrtá souřadnice $x_4$ jest úměrna 1. Tyto specialné homogenní souřadnice $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_4$ slují souřadnice Hesse-ovy.

### 3. Tetrametrické souřadnice roviny.

Nahradíme-li v rovnici roviny

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

pravoúhlé souřadnice $x$, $y$, $z$ jich výrazy (2) pomocí homogenních souřadnic a odstraníme-li jmenovatele, obdržíme rovnici roviny ve tvaru

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0; \tag{4}$$

a naopak každá taková rovnice náleží rovině, neboť ji lze psáti

$$c_1 \xi_1 V_1 + c_2 \xi_2 V_2 + c_3 \xi_3 V_3 + c_4 \xi_4 V_4 = 0.$$

Hodnoty $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ slují tetrametrickými souřadnicemi roviny (4) *a jich geometrický význam, v případě, kdy základní vrcholy jsou všecky v konečnu, jest ten, že jsou úměrny jistým násobkům vzdáleností této roviny od vrcholů základních.*

Poslední rovnici můžeme totiž psáti

$$x \Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \alpha_\nu + y \Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \beta_\nu + z \Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \gamma_\nu - \Sigma c_\nu p_\nu = 0,$$

pročež, učiníce

$$V^2 = (\Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \alpha_\nu)^2 + (\Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \beta_\nu)^2 + (\Sigma c_\nu \xi_\nu \cos \gamma_\nu)^2,$$

jest normalní tvar rovnice roviny (4):

$$\frac{\Sigma c_\nu \xi_\nu V_\nu}{V} = 0.$$

Vložíme-li do tohoto tvaru za $x$, $y$, $z$ souřadnice prvního základního vrcholu, tu vymizí $V_2$, $V_3$, $V_4$ a hodnota $V_1$ podává vzdálenost $v_1$ prvního základního vrcholu od protější základní roviny, t. j. první výšku základního čtyrstěnu. Značí-li tedy $k_1$ vzdálenost prvního základního vrcholu od roviny (4), máme

$$k_1 = \frac{c_1 \xi_1 v_1}{V}$$

a obdobně obecně

$$k_\nu = \frac{c_\nu \xi_\nu v_\nu}{V},$$

čímž

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \frac{k_1}{c_1 v_1} : \frac{k_2}{c_2 v_2} : \frac{k_3}{c_3 v_3} : \frac{k_4}{c_4 v_4}$$

a tvrzení dokázáno.

Definice souřadnic $\xi$ pomocí rovnice (4) potrvá i v případech, kdy jeden, dva neb tři základní vrcholy jsou v nekonečnu. Vezmeme-li specialně v úvahu případ HESSE-ových souřadnic, můžeme rovnici (4) psáti — dělivše ji $x_4$ —

$$\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 z + \xi_4 = 0;$$

porovnáme-li s rovnicí

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

v níž $u$, $v$, $w$ jsou obyčejné (nehomogenní) souřadnice roviny, značící záporně vzaté reciproké její úseky na osách $x$, $y$, $z$, tu shledáváme, že jsou $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ úměrny těmto obyčejným souřadnicím $u$, $v$, $w$ a čtvrtá homogenní souřadnice $\xi_4$ hodnotě 1.

4. **Souvislost homogenních souřadnic roviny s nehomogenními** jest obdobna oné, která váže homogenní a nehomogenní souřadnice bodové.

Rovina $\xi$ má rovnici

$$\Sigma \xi_\nu x_\nu = 0,$$

t. j.

$$\Sigma \xi_\nu c_\nu \mathrm{V}_\nu = 0,$$

čili, seřaděním dle $x$, $y$, $z$

$$x \Sigma \xi_\nu c_\nu \cos \alpha_\nu + y \Sigma \xi_\nu c_\nu \cos \beta_\nu + z \Sigma \xi_\nu c_\nu \gamma_\nu - \Sigma \xi_\nu c_\nu p_\nu = 0.$$

Nehomogenní souřadnice $u$, $v$, $w$ této roviny mají tedy hodnoty

$$u = \frac{\Sigma \xi_\nu c_\nu \cos \alpha_\nu}{-\Sigma \xi_\nu c_\nu p_\nu}, \quad v = \frac{\Sigma \xi_\nu c_\nu \cos \beta_\nu}{-\Sigma \xi_\nu c_\nu p_\nu}, \quad w = \frac{\Sigma \xi_\nu c_\nu \cos \gamma_\nu}{-\Sigma \xi_\nu c_\nu p_\nu},$$

jež se jeví jakožto podíly homogenních linearných funkcí souřadnic $\xi$ o témž jmenovateli.

Zase platí též tvrzení opáčné: Každé takové tři podíly o společném jmenovateli

$$(5) \qquad u = \frac{\Sigma \mathrm{A}_\nu \xi_\nu}{\Sigma \mathrm{D}_\nu \xi_\nu}, \quad v = \frac{\Sigma \mathrm{B}_\nu \xi_\nu}{\Sigma \mathrm{D}_\nu \xi_\nu}, \quad w = \frac{\Sigma \mathrm{C}_\nu \xi_\nu}{\Sigma \mathrm{D}_\nu \xi_\nu}$$

lze geometricky tak interpretovati, že $\xi$ značí homogenní souřadnice roviny, jejíž obyčejné souřadnice jsou hodnoty $u$, $v$, $w$; arci zde nutno předpokládati, že determinant $\Sigma \pm (A_1 B_2 C_3 D_4)$ nemizí.

Vskutku, je-li tato interpretace přípustna, obdržíme, kladouce $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$ za souřadnice $u$, $v$, $w$ první základní roviny, hodnoty

$$\frac{A_1}{D_1}, \frac{B_1}{D_1}, \frac{C_1}{D_1};$$

obdobně za souřadnice druhé základní roviny

$$\frac{A_2}{D_2}, \frac{B_2}{D_2}, \frac{C_2}{D_2},$$

atd. Vzhledem k okolnosti, že zmíněný determinant nevymizí, neprocházejí tyto čtyry roviny jedním bodem, a lze je tedy zvoliti za stěny základního tetraedru. Zvolme stále $c_\nu$ třeba takovým způsobem, aby příslušné souřadnice $\Xi$ roviny se k sobě měly jako vzdálenosti $k_\nu$ této roviny od základních vrcholů, t. j. zvolme

$$c_\nu v_\nu = 1 \quad \text{čili} \quad c_\nu = \frac{1}{v_\nu}.$$

Pro nehomogenní souřadnice $u$, $v$, $w$ pak obdržíme výrazy tvaru

$$u = \frac{\Sigma \alpha_\nu \Xi_\nu}{\Sigma \delta_\nu \Xi_\nu}, \quad v = \frac{\Sigma \beta_\nu \Xi_\nu}{\Sigma \delta_\nu \Xi_\nu}, \quad w = \frac{\Sigma \gamma_\nu \Xi_\nu}{\Sigma \delta_\nu \Xi_\nu}$$

a souřadnice základních stěn podávají ihned rovnosti

$$\frac{\alpha_\nu}{A_\nu} = \frac{\beta_\nu}{B_\nu} = \frac{\gamma_\nu}{C_\nu} = \frac{\delta_\nu}{D_\nu}.$$

Označíme-li společnou hodnotu těchto podílů literou $\lambda_\nu$ a učiníme-li dále

$$\begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 &= \lambda_1 \Xi_1 : \lambda_2 \Xi_2 : \lambda_3 \Xi_3 : \lambda_4 \Xi_4 \\ &= \lambda_1 k_1 : \lambda_2 k_2 : \lambda_3 k_3 : \lambda_4 k_4, \end{aligned}$$

máme nehomogenní souřadnice $u$, $v$, $w$ skutečně ve tvaru (5);

zároveň patrno, že nynější základní stálé faktory $c_\nu$ jsou dány rovnostmi

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_1 v_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{c_2 v_2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{c_3 v_3}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{c_4 v_4}.$$

5. **Dvojpoměr; projektivné řady a svazky rovin.** Hoví-li souřadnice bodu $x$ a roviny $\xi$ rovnici

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

tu bod $x$ leží v rovině $\xi$, a rovina $\xi$ prochází bodem $x$. Pokládáme-li hodnoty $\xi$ za dané, jest to rovnice roviny, t. j. charakterisuje všecky body této roviny; pokládáme-li $x$ za dané hodnoty, jest to rovnice bodu, t. j. charakterisuje všecky roviny procházející daným bodem.

Souřadnice $x'_\nu + \lambda x''_\nu$ patrně hoví každé linearné homogenní rovnici, které hoví jak souřadnice $x'_\nu$ tak $x''_\nu$, t. j. bod $x' + \lambda x''$ leží na každé rovině vedené body $x'$ a $x''$ čili na přímce spojivé obou bodů. Snadno tu vychází jako v geometrii v rovině (v. tento Časopis, roč. XXIV, str. 8.), že hodnota $\lambda$ jest úměrna dělícímu poměru bodu $x' + \lambda x''$ vzhledem k $x'$ a $x''$, a že tedy dvojpoměr bodů $x'$, $x''$, $x' + \lambda x''$, $x' + \mu x''$ jest $\frac{\lambda}{\mu}$, a obecněji dvojpoměr bodů $x' + \lambda x''$, $x' + \mu x''$, $x' + \nu x''$, $x' + \varrho x''$ jest

$$\frac{\nu - \lambda}{\nu - \mu} : \frac{\varrho - \lambda}{\varrho - \mu}.$$

Obdobně prochází rovina $\xi' + \lambda \xi''$ průsečnou přímkou rovin $\xi'$ a $\xi''$, a $\lambda$ jest hodnota úměrná dělícímu poměru oné roviny vzhledem k těmto, jakož přímo patrno z rovnice

$$\Sigma(\xi'_\nu + \lambda \xi''_\nu) x_\nu = 0 \quad \text{čili} \quad \Sigma \xi'_\nu x_\nu + \lambda \Sigma \xi''_\nu x_\nu = 0$$

a dvojpoměr rovin $\xi' + \lambda \xi''$, $\xi' + \mu \xi''$, $\xi' + \nu \xi''$, $\xi' + \varrho \xi''$ jest opět dán hořejším výrazem.

Řada bodů $x' + \lambda x''$ jest tedy s řadou bodů $\overline{x'} + \overline{\mu x''}$ neb se svazkem rovin $\xi' + \mu \xi''$ projektivná, jsou-li koefficienty $\lambda$ a $\mu$ sdružených elementů vázány relací tvaru

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0; \tag{6}$$

táž relace stanoví projektivnost svazku rovin $\xi' + \lambda\xi''$ se svazkem rovin $\overline{\xi}' + \mu\,\overline{\xi}''$.

6. **Perspektivné útvary.** Tyto jsou specialnými případy útvarů projektivných a majítudíž jich sdružené elementy stejné dvojpoměry; to lze snadno takto dovoditi.

Mějme nejprve svazek rovin a s ním perspektivnou řadu bodovou. Budiž $\xi' + \lambda\xi''$ libovolná rovina svazku a $x' + \mu x''$ jí přidružený bod; ten v ní leží a máme tedy rovnici

$$\Sigma\,(\xi'_\nu + \lambda\xi''_\nu)\,(x'_\nu + \mu x''_\nu) = 0\,,$$

což jest relace tvaru (6), a tím tvrzení dokázáno.

Ve dvou perspektivných řadách jsou dvojpoměry stejné, poněvadž je lze pokládati za perspektivné s týmž svazkem rovin.

Uvažujme dva perspektivné svazky rovin. Budiž $\xi$ společná rovina obou a $\xi + \lambda\xi'$, $\xi + \mu\xi''$ dvě sdružené roviny; tyto se tedy protínají na pevné rovině $a\xi + a'\xi' + a''\xi''$ procházející společným bodem obou os. Máme tedy

$$a\xi_\nu + a'\xi'_\nu + a''\xi''_\nu = \varrho\,(\xi_\nu + \lambda\xi'_\nu) + \sigma\,(\xi_\nu + \mu\xi'_\nu)\,,$$

z čehož

$$a = \varrho + \sigma, \qquad a' = \varrho\lambda, \qquad a'' = \sigma\mu$$

a eliminací hodnot $\varrho$, $\sigma$:

$$a\lambda\mu - a'\mu - a''\lambda = 0,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Vezměme dále v úvahu svazek perspektivný se svazkem rovin. Budiž $\xi + \lambda\xi'$ libovolná rovina svazku rovin a $\eta$ rovina, v níž jest perspektivný svazek paprskový; pak jest sdružený paprsek dán rovnicemi

$$\Sigma\,(\xi_\nu + \lambda\xi'_\nu)\,x_\nu = 0, \qquad \Sigma\eta_\nu x_\nu = 0.$$

Zvolíme-li však nový základní čtyrstěn, jehož základní rovina $x_4 = 0$ se stotožňuje s rovinou $\eta$, jest onen paprsek dán rovnicemi tvaru

$$\Sigma\xi_\nu x_\nu + \lambda\Sigma\xi'_\nu x_\nu = 0\,, \qquad x_4 = 0.$$

Hodnoty $x_1$, $x_2$, $x_3$ bodu položeného v poslední rovině jsou patrně úměrny násobkům jeho vzdáleností od stran základního trojúhelníku této roviny a jsou tudíž trimetrickými souřadnicemi v rovině; ale pak jest zjevno, že $\lambda$ jest hodnota úměrná dělícímu poměru uvažovaného paprsku, čímž věta dokázána.

Řada perspektivná se svazkem a dva perspektivné svazky se převádějí ihned na předešlé případy, čímž tvrzení úplně dokázáno.

**7. Dvojí geometrický význam linearné transformace souřadnic.**

Pravoúhlé souřadnice $x$, $y$, $z$ bodu o tetrametrických souřadnicích $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ byly dány formulemi (2):

$$x = \frac{\Sigma a_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu}, \qquad y = \frac{\Sigma b_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu}, \qquad z = \frac{\Sigma c_\nu x_\nu}{\Sigma d_\nu x_\nu}.$$

Zavedeme-li na místo $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ čtyři nové proměnné $x'$ linearnou transformací

$$(7) \qquad x_\nu = t_{\nu 1} x'_1 + t_{\nu 2} x'_2 + t_{\nu 3} x'_3 + t_{\nu 4} x'_4, \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

nutno především předpokládati, že determinant

$$D = \Sigma \pm (t_{11}\, t_{22}\, t_{33}\, t_{44})$$

čili t. zv. *modul* transformace jest různý od nully, sice by proměnné $x$ nemohly nabýti hodnot libovolných.

Substitucí (7) přejdou formule (2) do formulí tvaru

$$x = \frac{\Sigma a'_\nu x'_\nu}{\Sigma d'_\nu x'_\nu}, \qquad y = \frac{\Sigma b'_\nu x'_\nu}{\Sigma d'_\nu x'_\nu}, \qquad z = \frac{\Sigma c'_\nu x'_\nu}{\Sigma d'_\nu x'_\nu}$$

a patrně tu platí

$$\Sigma \pm (a'_1 b'_2 c'_3 d'_4) = \Sigma \pm (a_1\, b_2\, c_3\, d_4) \,.\, \Sigma \pm (t_{11}\, t_{22}\, t_{33}\, t_{44});$$

jest tedy determinant po levé straně též různý od nully. Pak ale lze dle čl. 2. pojímati hodnoty $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ jakožto tetrametrické souřadnice bodu $x$, $y$, $z$, vztaženého ovšem k novému základnímu čtyřstěnu s novými základními stálými faktory $c$. *Jest tedy linearná substituce výrazem transformace souřadnic k jiným* *základním elementům;* totéž platí patrně o linearné transformaci souřadnic roviny $\xi$.

Koefficienty substituční u těchto dvou tranformací souvisí velmi jednoduchým způsobem; rovina $\xi$ má totiž rovnici

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

t. j.

$$\Sigma \xi_\nu (t_{\nu 1} x'_1 + t_{\nu 2} x'_2 + t_{\nu 3} x'_3 + t_{\nu 4} x'_4) = 0,$$

takže nové její souřadnice $\xi'$ jsou:

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= t_{11}\xi_1 + t_{21}\xi_2 + t_{31}\xi_3 + t_{41}\xi_4, \\ \xi'_2 &= t_{12}\xi_1 + t_{22}\xi_2 + t_{32}\xi_3 + t_{42}\xi_4, \\ \xi'_3 &= t_{13}\xi_1 + t_{23}\xi_2 + t_{33}\xi_3 + t_{43}\xi_4, \\ \xi'_4 &= t_{14}\xi_1 + t_{24}\xi_2 + t_{34}\xi_3 + t_{44}\xi_4. \end{aligned} \tag{8}$$

Tato substituce sluje vzhledem k (7) *transponovaná* a proměnné $\xi$ transformující se touto substitucí slují *kontragredientními* s proměnnými $x$.

Druhý geometrický význam linearné transformace (7) obdržíme, pokládáme-li $x_\nu$ a $x'_\nu$ za souřadnice sdružených bodů, vzaté vzhledem k dvěma libovolným základním čtyrstěnům. Dva prostorové systemy takovým způsobem souvisící se zovou *kollinearnými.* Dle předešlého článku jest patrno, že tímto vztahem přísluší bodu, rovině, přímce resp. opět bod, rovina, přímka, a že řadám, svazkům a svazkům rovin přísluší obdobné útvary s nimi projektivné, a že rovinným soustavám resp. svazkům prostorovým jsou přiřaděny obdobné útvary s nimi kollinearné. *Linearnou substituci (7) můžeme pojímati jakožto počtářský výraz kollineace dvou prostorových soustav.*

### 8. **Reciproký vztah prostorových soustav.**

Při uvažování kollinearného vztahu daného rovnicemi (7) obrací se pozornost přirozeným způsobem ke vztahu obdobně definovanému, však přiřaďujícímu bodu ne bod, nýbrž rovinu. Buďte $x_\nu$ tetrametrické souřadnice bodu, a $\xi'_\nu$ souřadnice sdružené roviny, vztažené obecně k jejímu základnímu čtyrstěnu, a mezi těmito elementy stanovme vztah čtyřmi linearnými relacemi

$$\xi'_\nu = a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + a_{\nu 3} x_3 + a_{\nu 4} x_4. \tag{9}$$

Takový vztah dvou prostorových soustav sluje *reciprokým*, a jím sdružené útvary a obrazce *reciprokými v prostoru.*

Každému bodu $x$ přísluší určitá rovina $\xi'$; každé rovině $\xi'$ přísluší určitý bod $x$, neboť řešením rovnic (9) dle hodnot $x_\nu$ obdržíme

$$(10)\qquad \mathrm{A}x_\nu = \mathrm{A}_{1\nu}\xi'_1 + \mathrm{A}_{2\nu}\xi'_2 + \mathrm{A}_{3\nu}\xi'_3 + \mathrm{A}_{4\nu}\xi'_4,$$

značí-li A determinant $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})$ různý od nully a $\mathrm{A}_{hk}$ jeho minor příslušný k elementu $a_{hk}$.

Naplňuje-li rovina $\xi'$ bod na př. $x'$, tu naplňuje $x$ rovinu, jíž ovšem přiřaďujeme bodu $x'$; skutečně ze supposice

$$\Sigma x'_\nu \xi'_\nu = 0$$

plyne

$$\Sigma x'_\nu (a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + a_{\nu 4}x_4) = 0,$$

t. j.

$$x_1 \Sigma a_{\nu 1}x'_\nu + x_2 \Sigma a_{\nu 2}x'_\nu + x_3 \Sigma a_{\nu 3}x'_\nu + x_4 \Sigma a_{\nu 4}x'_\nu = 0,$$

což jest rovnice roviny $\xi$. Máme tedy

$$(11)\qquad \xi_k = a_{1k}x'_1 + a_{2k}x'_2 + a_{3k}x'_3 + a_{4k}x'_4$$

a zároveň patrno, že

$$(12)\qquad \Sigma x_\nu \xi_\nu = \Sigma x'_\nu \xi'_\nu .$$

Tato rovnice ukazuje, že je-li bod $x$ v rovině $\xi$, jest též rovina $\xi'$ v bodě $x'$.

Naopak, naplňuje-li bod $x$ rovinu nějakou $\xi$, máme

$$\Sigma \xi_\nu x_\nu = 0,$$

tedy vzhledem k (10)

$$\frac{1}{\mathrm{A}} \Sigma \xi_\nu (\mathrm{A}_{1\nu}\xi'_1 + \mathrm{A}_{2\nu}\xi'_2 + \mathrm{A}_{3\nu}\xi'_3 + \mathrm{A}_{4\nu}\xi'_4) = 0,$$

čili

$$\frac{1}{\mathrm{A}} \left\{ \xi'_1 \Sigma \mathrm{A}_{1\nu}\xi_\nu + \xi'_2 \Sigma \mathrm{A}_{2\nu}\xi_\nu + \xi'_3 \Sigma \mathrm{A}_{3\nu}\xi_\nu + \xi'_4 \Sigma \mathrm{A}_{4\nu}\xi_\nu \right\} = 0;$$

tedy naplňuje sdružená rovina v druhém systemu bod $x'_k$, jehož souřadnice jsou dány rovnicemi

$$(13) \qquad A x'_k = A_{k1}\xi_1 + A_{k2}\xi_2 + A_{k3}\xi_3 + A_{k4}\xi_4 ;$$

tytéž rovnice by ostatně plynuly řešením rovnic (11) dle $x'_k$.

Rovnice (9), (10), (11), )13) jsou počtářským výrazem vztahu mezi body a rovinami daných reciprokých soustav prostorových.

Nabývá-li $\lambda$ všech hodnot, naplňuje bod o souřadnicích $x_\nu = y_\nu + \lambda z_\nu$ přímku; jeho reciproká rovina má souřadnice

$$\xi'_k = \sum_{(\nu)} a_{k\nu} (y_\nu + \lambda z_\nu) = \sum_{(\nu)} a_{k\nu} y_\nu + \lambda \sum_{(\nu)} a_{k\nu} z_\nu = \eta'_\nu + \lambda \zeta'_\nu$$

a prochází tudíž průsečnou přímkou rovin $\eta'$, $\zeta'$, tvoříc patrně svazek rovin projektivný s řadou bodů $x$. Tato řada a osa onoho svazku rovin slují reciprokými přímkami. Dle předchozího jest patrno, že, naplňuje-li bod druhého systemu řadu $\overline{\eta'\zeta'}$, příslušná rovina v prvním systemu vytvoří svazek rovin na ose $\overline{yz}$, opět projektivný s onou řadou.

9. **Geometrický význam jedné nebo dvou rovnic mezi souřadnicemi.**

Rovnice mezi homogenními souřadnicemi bodovými $x$, omezující polohu tohoto bodu, musí býti homogenní; veškeré body, jichž souřadnice jí hoví, naplňují plochu, jejíž rovnici v pravoúhlých souřadnicích obdržíme, nahradíme-li v dané rovnici hodnoty $x_\nu$ hodnotami $c_\nu V_\nu$.

Obdobně náležejí souřadnice $\xi$, hovící homogenní rovnici, rovinám, jež jsou tečnými rovinami jisté plochy, jich obálky; daná rovnice sluje rovnicí této plochy v souřadnicích roviny.

Jak v prvním tak v druhém případě závisí bod resp. rovina dané rovnici hovící na dvou neodvisle proměnných; vážeť na př. v prvním případě homogenní rovnice vlastně tři poměry proměnných

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4},$$

z nichž tudíž dva lze libovolné voliti.

Uvažujeme-li na ploše o rovnici $n$-ho stupně

$$f(x_1, x_1, x_3, x_4) = 0$$

veškeré body $x + dx$ sousední s bodem $x$, hoví tyto rovnici

$$f + df = 0 \text{ t. j. } df = 0,$$

t. j.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} dx_4 = 0.$$

Tím pak vysvítá, že všecky tyto sousední body $x + dx$ hoví linearné rovnici

$$(14) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} X_4 = 0,$$

neboť dosadivše jich souřadnice do ní, obdržíme

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x_\nu + \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu$$

což vzhledem k větě *Eulorově* jest $nf + df$ a tedy $= 0$. Rovnice (14) jest rovnicí tečné roviny.

Obdobně procházejí všecky roviny $\xi + d\xi$ sousední s rovinou tečnou plochy o rovnici

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$$

jedním bodem — bodem dotyčným této roviny — a jeho rovnice jest

$$(15) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \Xi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \Xi_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \Xi_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_4} \Xi_4 = 0.$$

Je-li plocha dána rovnicí mezi souřadnicemi bodovými:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

a chceme-li odvoditi její rovnici v souřadnicích roviny, uvažme, že pro souřadnice $\xi$ tečné roviny dle (4) máme

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3} : \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Tyto tři rovnice i s předchozí jsou vzhledem k $x_1, x_2, x_3, x_4$ homogenní a lze z nich tyto proměnné eliminovati; výslední rovnice jest hledaná rovnice plochy. — Eliminace se usnadní, nahradíme-li první rovnici touto:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

t. j. vzhledem k napsané proporci

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_1 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0.$$

Obdobně plyne rovnice plochy

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$$

v souřadnicích bodových, eliminací hodnot $\xi$ z této a z rovnic

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3};$$

opět lze první rovnici nahraditi relací

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

Dvě homogenní rovnice mezi souřadnicemi bodovými

(16) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

stanoví čáru: průsečnou čáru obou ploch těmito rovnicemi stanovených. Poloha bodu čáry závisí na jedné proměnné, n. p. na podílu $\frac{x_1}{x_4}$; zvolíce jej, máme pak podíly $\frac{x_2}{x_4}$ a $\frac{x_3}{x_4}$ z napsaných rovnic.

Dvě homogenní rovnice mezi souřadnicemi roviny

(17) $$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0, \quad \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$$

stanoví rozvinutelnou plochu, opsanou oběma plochám, daným těmito rovnicemi. Poloha roviny hovící oběma rovnicím závisí totiž na jedné proměnné, n. př. na podílu $\frac{\xi_1}{\xi_4}$, a jest tudíž obálka všech těchto rovin plocha rozvinutelná. Z toho patrno, že čára a plocha rozvinutelná jsou útvary reciproké a zároveň, že se stanoviska geometrie roviny nelze rozvinutelnou plochu pokládati za plochu, nýbrž za útvar dvěma plochám společný, tak jako v geometrii bodu čára není plochou, nýbrž útvarem dvěma plochám společným.

Tečna čáry (16) čili limitní poloha spojnice bodu jejího s nekonečně blízkým bodem čáry jest ovšem průsečnice tečných rovin obou ploch $f = 0$ a $f_1 = 0$; má tedy tato tečna rovnice

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} X_\nu = 0, \quad \Sigma \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} X_\nu = 0.$$

Reciprokým způsobem jest přímka rozvinutelné plochy (17) t. j. přímka společná dvěma nekonečně blízkým rovinám hovícím rovnicím (17), dána rovnicemi

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\nu} \Xi_\nu = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_\nu} \Xi_\nu = 0;$$

přímka ta prochází ovšem dotyčnými body roviny $\xi$ s plochami $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$.

Rovina, vedená bodem $x$ dané čáry a dvěma nekonečně blízkými body jejími, sluje oskulační rovinou čáry v onom bodě. Poněvadž její rovnici

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0$$

má hověti jak bod $x$, tak body sousední

$$x + dx, \; x + 2dx + d^2x,$$

máme k stanovení hodnot $a$ rovnice

$$\Sigma a_\nu x_\nu = 0, \; \Sigma a_\nu dx_\nu = 0, \; \Sigma a_\nu d^2x_\nu = 0,$$

a tedy eliminací těchto hodnot ze všech čtyr rovnic:

$$\Sigma \pm (X_1 x_2 dx_3 d^2x_4) = 0$$

jakožto rovnici oskulační roviny.

Podobně stanoví tři sousední tečné roviny $\xi$, $\xi + d\xi$, $\xi + 2d\xi + d^2\xi$ rozvinutelné plochy bod, patrně společný dvěma sousedním přímkám plošným; geometrické místo jeho jest t. z. čára vratu rozvinutelné plochy. Jeho rovnice jest

$$\Sigma \pm (\Xi_1 \xi_2 d\xi_3 d^2\xi_4) = 0.$$

Reciprocitou přísluší čáře rozvinutelná plocha, t. j. bodům čáry tečné roviny rozvinutelné plochy; spojnici sousedních bodů průsečnice sousedních tečných rovin, t. j. tečné čáry plošná přímka rozvinutelné plochy čili tečna čáry vratu; rovině, vedené třemi sousedními body, bod v třech sousedních rovinách, t. j. oskulační rovině čáry, bod na čáře vratu.

Sestrojíme-li k nějaké ploše plochu kollinearnou, budou tečné roviny sestrojené v kollinearných bodech též kollinearnými. Neboť jsou-li $f = 0$ a $f' = 0$ rovnice kollinearných ploch, t. j. máme-li

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$$

za platnosti transformačních formulí (7), obdržíme derivováním

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_1} t_{1\nu} + \frac{\partial f}{\partial x_2} t_{2\nu} + \frac{\partial f}{\partial x_3} t_{3\nu} + \frac{\partial f}{\partial x_4} t_{4\nu}$$

a tedy

$$\Sigma \frac{\partial f'}{\partial x'_\nu} X'_\nu = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Sigma t_{1\nu} X'_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Sigma t_{2\nu} X'_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Sigma t_{3\nu} X'_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_4} \Sigma t_{4\nu} X'_\nu,$$

t. j.

$$\Sigma \frac{\partial f'}{\partial x'_\nu} X'_\nu = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} X_\nu,$$

čímž výrok dokázán.

Nyní jest patrno, že i tečny kollinearných čar v bodech sdružených jsou přímkami kollinearnými. Konečně i oskulační roviny jejich v bodech sdružených jsou kollinearně sdruženy. Neboť vzhledem k transformačním rovnicím (7) přechází $dx_\nu$ na $dx'_\nu$, a $d^2x_\nu$ na $d^2x'_\nu$ touže transformací (7). Transformujeme-li i běžné souřadnice $X_\nu$ na $X'_\nu$ týmiž formulemi, máme patrně

$$\Sigma \pm (X_1 x_2 dx_3 d^2x_4) = T \Sigma \pm (X'_1 x'_2 dx'_3 d^2x'_4),$$

čímž výrok dokázán.

Zcela obdobně lze ukázati, že, vytkneme-li u dvou reciprokých ploch dva sdružené elementy, t. j. bod $x$ plochy první a sdruženou rovinu tečnou $\xi'$ plochy druhé, pak tečné rovině $\xi$ v onom bodě sestrojené přísluší reciprocitou dotyčný bod $x'$ roviny $\xi'$. Přísluší-li totiž reciprocitou, danou formulemi (9), ploše $f = 0$ plocha $\varphi = 0$, t. j. platí-li rovnost

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4),$$

máme derivováním

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi'_1} a_{1\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi'_2} a_{2\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi'_3} a_{3\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi'_4} a_{4\nu},$$

t. j.

$$\xi_\nu = a_{1\nu} x'_1 + a_{2\nu} x'_2 + a_{3\nu} x'_3 + a_{4\nu} x'_4,$$

z čehož dle rovnic (11) patrno, že rovina $\xi$ a bod $x'$ jsou skutečně reciproké.

10. **Plochy algebraické, zvlášť druhého stupně a druhé třídy.**

Plocha, jejíž rovnice má tvar $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, kde $f$ značí racionalnou celistvou homogenní funkci $n$-ho stupně souřadnic $x$, sluje algebraickou plochou $n$-ho stupně. Stupeň jest na volbě základního čtyrstěnu nezávislý, protože se linearnou transformací souřadnic nemění.

Libovolná přímka protíná plochu $n$-ho stupně v $n$ bodech; rovnici $f = 0$ a dvěma linearným homogenním rovnicím mezi $x_1, x_2, x_3, x_4$ hoví totiž $n$ soustav $x$. Libovolná rovnice protíná plochu $n$-ho stupně v algebraické čáře $n$-ho stupně; o rovině $x_4 = 0$ jest to patrno, protože v rovnici

$$f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$$

hodnoty $x_1, x_2, x_3$ lze interpretovati jakožto trimetrické souřadnice v oné rovině, a v libovolné rovině to ihned plyne, učiníme-li ji transformací základní rovinou nového základního čtyrstěnu.

Dvěma rovnicemi $m$-ho resp. $n$-ho stupně stanovena algebraická čára stupně $mn$, t. j. čára, kterou libovolná rovina protíná v $mn$ bodech; jsou to společné body obou čar, v nichž rovina dané plochy protíná.

Plocha, jejíž rovnice v souřadnicích $\xi$ má tvar $\varphi = 0$, kde $\varphi$ jest racionalnou celistvou homogenní funkcí $n$-ho stupně, sluje plochou $n$-té třídy; libovolnou přímkou prochází $n$ tečných rovin jejích, a libovolným bodem vedené tečné roviny obaluje kužel téže třídy. Že plocha $n$-té třídy jest též algebraickou, vychází ihned dle čl. 9. Stupeň a třídu algebraické plochy lze tedy definovati jako stupeň její rovnice v souřadnicích $x$ resp. $\xi$.

Dvěma rovnicemi $m$-ho resp. $n$-ho stupně mezi souřadnicemi $\xi$ stanovena algebraická rozvinutelná plocha třídy $mn$, t. j. rozvinutelná plocha, k níž prochází libovolným bodem $mn$ tečných rovin.

Plocha druhého stupně má rovnici $f = 0$, kde

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4,$$

čili stručněji

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma a_{hk}x_hx_k, \quad (h, k = 1, 2, 3, 4; \; a_{hk} = a_{kh}).$$

Připomeňme, že

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + a_{\nu 4}x_4$$

a že dle věty Eulerovy o homogenních funkcích

$$f = \Sigma \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}x_\nu .$$

Je-li daná plocha kuželem, pak jest tečná rovina její ve vrcholu $x$ neurčitá, t. j. souřadnice vrcholu hoví čtyrem rovnicím

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0,$$

z nichž soudíme, že vymizí determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} \tag{18}$$

čili t. z. *diskriminant* formy $f$. A naopak, platí-li rovnost $\Delta = 0$, jest daná plocha kuželem; lze totiž pak stanoviti čtyři hodnoty $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, jež všecky nejsou nullami, hovící rovnicím

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

a tyto hodnoty jsou souřadnice vrcholu kuželové plochy. Vskutku označíme-li literami $y_\nu$ souřadnice libovolného bodu plochy $f$, tak že $f(y) = 0$, jest $x + \lambda y$ libovolný bod na spojnici $\overline{xy}$ a výraz $f(x + \lambda y)$, rozvineme-li jej dle věty Taylerovy,

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} y_\nu + \frac{\lambda^2}{1 \, . \, 2} \Sigma a_{hk} y_{hk} \\ &= f(x) + \lambda \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} y_\nu + \frac{\lambda^2}{1 \, . \, 2} f(y) \end{aligned}$$

patrně vymizí při libovolném $\lambda$. Jest tedy celá spojnice $\overline{xy}$ na ploše $f$, t. j. plocha $f$ skutečně kužel o vrcholu $x$. — Specialně může ovšem kužel býti soustavou dvou rovin; pak jest každý bod společné přímky obou rovin vrcholem tohoto specialného kužele a jeho souřadnice ovšem řešením rovnic $\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0$. Patrně lze pak dvě z hodnot $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, těmto rovnicím hovících, voliti libovolně; pročež případ ten nastane tehdy, kdy mimo $\Delta$ vymizejí i všecky minory tohoto determinantu, kdy však alespoň jeden minor druhého stupně jest různý od nully.*) — Konečně může kuželová plocha $f$ se skládati ze dvou splývajících rovin, tedy $f$ býti čtvercem linearné funkce souřadnic $x$. Pak jest každý bod roviny té vrcholem kužele, a lze tudíž rovnicím

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0$$

vyhověti soustavami $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, při nichž tři hodnoty jsou libovolné. Případ ten nastane, kdy nejen $\Delta$ se všemi minory vymizí, ale kdy ještě i všecky minory druhého stupně jsou rovny nulle.

---

*) Viz můj spis „O theorii forem bilinearných“, kap. III., aneb „O řešení linearných rovnic“, tento Časopis, roč. XIV.

Plocha druhé třídy má rovnici $\varphi = 0$, kde

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \Sigma a_{hk} \xi_h \xi_k, \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4;\ a_{hk} = a_{kh}).$$

Vymizí-li diskriminant $\Delta$ formy $\varphi$, lze opět ustanoviti rovinu $\xi$, jejíž souřadnice hoví rovnicím $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_\nu} = 0$; je-li pak $\eta$ libovolná tečná rovina plochy $\varphi$, jest každá rovina $\xi + \lambda \eta$, t. j. každá rovina přímkou $\overline{\xi\eta}$ vedená rovinou tečnou této plochy. Souhrn tečných rovin plochy $\varphi$ jest tvořen všemi rovinami vedenými tečnami kuželosečky v rovině $\xi$ obsažené; jest totiž kužel opsaný ploše z libovolného bodu kuželem druhé třídy, a jeho stopa na rovině $\xi$ jest ona kuželosečka. — Vymizejí-li mimo $\Delta$ i všecky minory, aniž by však všecky minory druhého stupně vymizely, naplňují všecky tečné roviny plochy $\varphi$ dva svazky prostorové: $\varphi$ se jeví býti součinem dvou linearných faktorů, čili dvou bodů. — Vymizí-li konečně $\Delta$ se všemi svými minory prvního i druhého stupně, jest $\varphi$ čtvercem linearného výrazu, a všecky tečné roviny procházejí jedním bodem: plocha $\varphi$ jest souhrnem dvou splývajících prostorových svazků rovin.

11. **Polarné vlastnosti ploch druhého stupně a druhé třídy.**

Dva body $x'$, $x''$ slují sdruženými čili konjugovanými vzhledem k ploše druhého stupně $f = 0$, jsou-li harmonickými k průsečíkům s plochou. Sdruženost tu vyjadřuje rovnice

$$\Sigma x'_\nu \frac{\partial f}{\partial x''_\nu} = 0 \quad \text{čili} \quad \Sigma x''_\nu \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} = 0,$$

při čemž $\frac{\partial f}{\partial x'_\nu}$ znamená hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$, vložíme-li do ní $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$ na místo $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$.

Bod $x' + \lambda x''$ spojnice $x'x''$ jest totiž na ploše

$$\Sigma a_{hk} x_h x_k = 0,$$

platí-li

$$\Sigma a_{hk} (x'_h + \lambda x''_h)(x'_k + \lambda x''_k) = 0;$$

kořeny $\lambda_1$, $\lambda_2$ této kvadratické rovnice jsou úměrny dělícím poměrům průsečíků vzhledem k $x'$ a $x''$ a jsou tedy tyto čtyři body při $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ harmonické. To však vyžaduje, aby koefficient při $\lambda$ v poslední rovnici vymizel, t. j. aby

$$\Sigma a_{hk}(x'_h x''_k + x''_h x'_k) = 0$$

čili aby

$$\Sigma 2(a_{\nu 1}x'_1 + a_{\nu 2}x'_2 + a_{\nu 3}x'_3 + a_{\nu 4}x'_4)x''_\nu = 0,$$

čímž hořejší výrok dokázán.

Všecky body sdružené s daným bodem $x'$ naplňují tudíž rovinu o rovnici

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} x_\nu = 0,$$

t. zv. *polarnou rovinu* bodu čili polu $x'$. Je-li pol $x'$ na ploše, stotožní se polarná rovina patrně s tečnou rovinou plochy v bodě $x'$.

Rovnice polarné roviny jest vzhledem k souřadnicím $x$ a $x'$, symmetrická, z čehož ihned plyne, že, *prochází-li polarná rovina jednoho bodu druhým, prochází také polarná rovina druhého prvním.* Z toho vychází ihned, že polarná rovina obsahuje dotyčné body všech tečných rovin, vedených polem; body ty naplňují tudíž kuželosečku, a jí prochází kužel opsaný ploše z polu.

*Naplní-li pol přímou řadu, naplní polarná rovina svazek rovin s onou řadou projektivný;* bodu $x' + \lambda x''$ přísluší totiž polarná rovina o rovnici

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x'_\nu + \lambda x''_\nu) = 0$$

čili

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x'_\nu + \lambda \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x''_\nu = 0.$$

*Naplní-li pol rovinu, otáčí se polarná rovina kolem bodu;* bod $\lambda x' + \mu x'' + \mu x'''$ má totiž polarnou rovinu o rovnici

$$\lambda \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x'_\nu + \mu \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x''_\nu + \nu \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_\nu} x'''_\nu = 0.$$

*Sdružené body na přímce tvoří páry involuce, jejímiž dvoj-*

*nými body jsou průsečíky přímky s plochou.* Sdružené body jsou totiž dle definice harmonické k oněm průsečíkům.

Interpretujeme-li v této úvaze souřadnice $x$ jakožto souřadnice roviny, plynou obdobné výsledky vzhledem k plochám druhé třídy, jež stručně vytkneme.

Dvě roviny $\xi'$, $\xi''$ slují sdruženými vzhledem k ploše druhé třídy $\varphi = 0$, jsou-li harmonické vzhledem k oběma tečným rovinám plochy, procházejícím průsečnicí rovin. Sdruženost vyjadřuje rovnice

$$\Sigma\xi''_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial\xi'_\nu} = 0 \quad \text{čili} \quad \Sigma\xi'_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial\xi''_\nu} = 0.$$

Veškeré roviny sdružené s danou rovinou procházejí bodem, *polem* jejím; je-li daná rovina tečnou, jest bod dotyčný jejím polem.

Leží-li pol jedné roviny na druhé, leží také pol druhé na první. Otáčí-li se rovina kolem přímky, probíhá její pol přímou řadu se svazkem rovin projektivnou. Otáčí-li se rovina kolem bodu, naplňuje její pol rovinu. Sdružené roviny přímkou vedené tvoří páry involuce, jejíž dvojné elementy jsou roviny tečné onou přímkou procházející. Že toto přiřadění polu k rovině jest totožné s oním přiřaděním polárné roviny k bodu, ukaží následující dva články.

## 12. Plocha druhého stupně neb druhé třídy o nemizejícím diskriminantu.

Snadno lze nyní ukázati, že tyto dva druhy jsou totožné.

Za souřadnice $\xi$ tečné rovnice plochy

$$f = 0 \quad \text{čili} \quad \Sigma a_{hk} x_h x_k = 0$$

v bodě $x$ můžeme vzíti

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

a máme pak relace

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= \xi_2\,,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= \xi_2\,,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= \xi_3\,,\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= \xi_4\,,\\
\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

z nichž eliminací hodnot $x_1, x_1, x_3, x_4$ plyne kvadratická rovnice mezi souřadnicemi $\xi$

$$
(20)\qquad
\begin{vmatrix}
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \xi_1\\
a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \xi_2\\
a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \xi_3\\
a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \xi_4\\
\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, 0
\end{vmatrix} = 0 \text{ čili } \sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0.
$$

A naopak, platí-li tato rovnice, *lze při supposici* $\Delta \gtrless 0$, vždy vyhověti pěti homogenním rovnicím o neznámých $x_1, x_2, x_3, x_4, \varrho$:

$$
\begin{aligned}
a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + a_{\nu 4}x_4 - \varrho\xi_1 &= 0, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4)\\
\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 - \varrho 0 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

a sice lze $\varrho$ libovolně voliti, ježto pátá rovnice jest linearně složena z prvních čtyř. To však znamená, že jsou $\xi$ souřadnice tečné roviny plochy $f$ v bodě $x$, a že tedy $\sigma = 0$ jest rovnicí této plochy v souřadnicích $\xi$. Poněvadž tato rovnice jest vzhledem k proměnným $\xi$ kvadratická, jest tvrzení dokázáno.

Vymizí-li diskriminant $\Delta$, tu pro tečnou rovinu $\xi$ v bodě $x$ dané plochy ovšem platí rovnice (19), a tedy hoví $\xi$ také výslední rovnici (20), ale opak nelze tvrditi, t. j. hoví-li rovina $\xi$ rovnici (20) nelze tvrditi, že jest rovinou tečnou dané plochy, neboť, jakož snadno ukážeme, jest geometrický význam rovnice (20) pak jen ten, že rovina $\xi$ prochází vrcholem dané kuželové plochy. Buďte $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$ souřadnice tohoto vrcholu a předpokládejme, že na př. $x'_4$ není nullou. Násobíme-li v determinantu (20) čtvrtý sloupec hodnotou $x'_4$ a přidáme-li k němu první tři sloupce násobené resp. hodnotami $x'_1, x'_2, x'_3$ obdržíme vzhledem k okolnosti, že souřadnice vrcholu annulují všecky čtyry derivace,

$\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$,

$$x'_4\sigma = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, 0, \xi_1 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, 0, \xi_2 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, 0, \xi_3 \\ a_{41}, a_{42}, a_{43}, 0, \xi_4 \\ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \Sigma x'_\nu \xi_\nu, 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \xi_1 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \xi_2 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \xi_3 \\ a_{41}, a_{42}, a_{43}, \xi_4 \end{vmatrix} \Sigma x'_\nu \xi_\nu .$$

Násobíme-li v determinantu v pravo čtvrtý řádek hodnotou $x'_4$ a přidáme-li k němu první tři řádky násobené resp. hodnotami $x'_1, x'_2, x'_3$, obdržíme

$$x'^2_4\sigma = - \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, & \xi_2 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, & \xi_3 \\ 0, \ 0, \ 0, & \Sigma x'_\nu \xi_\nu \end{vmatrix} \Sigma x'_\nu \xi_\nu ,$$

t. j.

$$x'^2_4\sigma = - \mathrm{A}_{44} \, (\Sigma x'_\nu \xi_\nu)^2$$

značí-ii $\mathrm{A}_{44}$ minor diskriminantu příslušný k elementu $a_{44}$. Uvážíme-li, že hodnoty $x'$ jsou úměrny minorům diskriminantu příslušným k elementům na př. čtvrtého řádku, že tedy lze položiti

$$x'_1 = \mathrm{A}_{41}, \quad x'_2 = \mathrm{A}_{42}, \quad x'_3 = \mathrm{A}_{43}, \quad x'_4 = \mathrm{A}_{44},$$

máme

$$\sigma = - \frac{1}{\mathrm{A}_{44}} \left(\Sigma \mathrm{A}_{4\nu} \xi_\nu\right)^2 ,$$

tak že rovnice $\sigma = 0$ jest čtvercem rovnice vrcholu daného kužele.

Interpretujeme-li v této úvaze souřadnice způsobem reciprokým, máme tu výsledek, že plocha druhé třídy o nemizejícím diskriminantu jest druhého stupně, a že v případech mizejícího diskriminantu rovnice $\sigma = 0$ repraesentuje rovinu, v níž leží kuželosečka, v čl. 10. vytčená.

## 13. Reciproká funkce; polárná reciprocita.

Zavedeme-li do kvadratické formy *o nemizejícím diskriminantu*

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4;\ a_{hk} = a_{kh})$$

čtyry nové proměnné $\xi$ definované rovnicemi

$$\xi_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \tag{21}$$

přejde $f$ na kvadratickou formu $\varphi$ proměnných $\xi$, jež sluje *reciprokou funkcí dané funkce f.*

Označíme-li literou $A_{hk}$ minor diskriminantu $\Delta$ příslušný elementu $a_{hk}$, takže patrně $A_{hk} = A_{kh}$, plyne řešením rovnic (21) dle $x_\nu$

$$\Delta x_\nu = A_{1\nu}\xi_1 + A_{2\nu}\xi_2 + A_{3\nu}\xi_3 + A_{4\nu}\xi_4 ,$$

a tedy

$$f = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_1 = \frac{1}{\Delta} \Sigma A_{hk}\, \xi_h \xi_k ;$$

máme pak za platnosti rovnic (21)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{\Delta} \Sigma A_{hk} \xi_h \xi_k . \tag{22}$$

Tutéž funkci $\varphi$ lze obdržeti ve tvaru determinantu eliminací hodnot $x_1, x_2, x_3, x_4$ z linearných rovnic

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \xi_1 = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \xi_2 = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \xi_3 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4} - \xi_4 = 0,$$

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 - f = 0;$$

tím nabýváme (v. tento Časopis, roč. XXIV., str. 20.)

$$f = \varphi = -\frac{1}{\Delta}\, \sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

kde $\sigma$ jest determinant (20), z čehož vzhledem k (21) soudíme, že

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = -\Sigma A_{hk}\xi_h\xi_k . \tag{23}$$

Jako na místě právě citovaném, bylo by lze i nyní ukázati, že reciproká funkce reciproké funkce jest funkce původní, t. j. že zavedením proměnných $x$, definovaných rovnicemi

$$(24) \qquad x_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi_\nu},$$

funkce $\varphi$ přechází do funkce $f$.

Poněvadž rovnice $f(x) = 0$ a $\varphi(\xi) = 0$ repraesentují tutéž plochu, a poněvadž z rovnic (21) následují rovnice (24), soudíme, že přiřadění polárné roviny bodu jest totožné s přiřaděním polu k rovině, jakož jsem již na konci čl. 11. podotkl.

Přiřadíme-li libovolnému bodu $x$ jeho polárnou rovinu vzatou vzhledem k ploše druhého stupně $f$ o nemizejícím diskriminantu, jest tato souvislost dle čl. 8. reciprocitou, neboť souřadnice $\xi'$ přidružené roviny jsou dány rovnicemi linearnými

$$(25) \qquad \xi'_\nu = a_{\nu 1}x_1 + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + a_{\nu 4}x_4$$

o nemizejícím determinantu $\Delta$. *Reciprocita* tato jest *zvláštního druhu a sluje polárnou; přiřadění bodu a roviny má zde totiž ráz involutorný, t. j. bodu $x$ přísluší táž rovina i když jej počítáme do druhého systemu prostorového.* V případě tomto souřadnice $\xi$ roviny prvého systemu jsou dány formulemi (11)

$$(26) \qquad \xi_\nu = a_{1\nu}x_1 + a_{2\nu}x_2 + a_{3\nu}x_3 + a_{4\nu}x_4$$

a vzhledem k $a_{hk} = a_{kh}$ platí tedy $\xi_\nu = \xi'_\nu$, čímž tvrzení dokázáno

Zde se přirozeně namanuje otázka, zda-li každá involutorná reciprocita prostorových soustav jest polárnou? Abychom k této otázce odpověděli, poznamenejme, že k involutarnosti jest nutno a stačí, aby poslední dva výrazy (25) a (26) stanovily tutéž rovinu při libovolných hodnotách $x_1, x_2, x_3, x_4$, t. j. aby platily čtyry rovnice

$$a_{\nu 1} + a_{\nu 2}x_2 + a_{\nu 3}x_3 + a_{\nu 4}x_4 = \lambda(a_{1\nu}x_1 + a_{2\nu}x_2 + a_{3\nu}x_3 + a_{4\nu}x_4),$$

nechť jsou hodnoty $x$ jakékoli. Označíme-li matici*), již tvoří elementy determinantu $\Delta$ literou M, a matici s ní konjugovanou, t. j. jejíž řádky se shodují se sloupci oné — literou M', lze poslední čtyry rovnice napsati ve tvaru

---

*) Sr. moji práci „*O theorii forem bilinearných*", v Praze, 1889.

$$M(x) = \lambda M'(x),$$

z čehož vzhledem k libovolnosti hodnot $x$ ihned plyne

$$M = \lambda M'.$$

Vezmeme-li na obou stranách matice konjugované, máme

$$M' = M\lambda,$$

čímž

$$M = \lambda^2 M$$

a tedy vzhledem k $\Delta \gtrless 0$:

$$\lambda = \pm 1.$$

Při $\lambda = 1$, máme $a_{hk} = a_{kh}$ a involutorná reciprota (25) jest polárnou; při $\lambda = -1$ máme $a_{hk} = -a_{kh}$ a tedy ovšem

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0,$$

a involutorná reciprocita pak není polárná. *Tento druhý involutorný reciproký vztah, jenž se vyznačuje tím, že každá rovina $\xi'$ prochází svým sdruženým bodem $x$, nazván nullovým systemem*; že vytčenou vlastnost má, vychází z rovnosti

$$\Sigma \xi'_\nu x_\nu = \Sigma (a_{\nu 1} x_1 + a_{\nu 2} x_2 + a_{\nu 3} x_3 + a_{\nu 4} x_4) x_\nu = 0,$$

jejíž správnost vzhledem k $a_{hk} + a_{kh} = 0$ jest patrna.

14. **Diskriminant kvaternarné kvadratické formy jest invariantem jejím indexu 2.**

Lze totiž týmž způsobem, jakým se stalo l. c. str. 23., ukázati, že, přejde-li linearnou transformací o modulu D:

$$(27) \qquad x_\nu = t_{\nu 1}\bar{x}_1 + t_{\nu 2}\bar{x}_2 + t_{\nu 3}\bar{x}_3 + t_{\nu 4}\bar{x}_4$$

kvaternarná forma

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k \quad \text{do} \quad \bar{f} = \Sigma \bar{a}_{hk} \bar{x}_h \bar{x}_k,$$

platí rovnice

$$D^2 \Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}) = \Sigma \pm (\bar{a}_{11} \bar{a}_{22} \bar{a}_{33} \bar{a}_{44}),$$

t. j.

$$D^2 \Delta = \bar{\Delta}$$

a že forma $f$ mimo invariant $\Delta$ žádného jiného invariantu nemá. Právě tak, jako l. c. na str. 24., plyne dále i nyní, že *výraz (20) t. j.*

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \xi_1 \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \xi_2 \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \xi_3 \\ a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \xi_4 \\ \xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_4, \ 0 \end{vmatrix}$$

*jest kontravariantem formy $f$ o indexu 2,* t. j., že utvoříme-li obdobný výraz $\overline{\sigma}$ z koefficientů $\overline{a_{hk}}$ a z hodnot $\overline{\xi}$, do nichž přecházejí hodnoty $\xi$ transponovanou substitucí

$$\overline{\xi_\nu} = t_{1\nu}\xi_1 + t_{2\nu}\xi_2 + t_{3\nu}\xi_3 + t_{4\nu}\xi_4, \tag{28}$$

máme rovnici

$$D^2\sigma = \overline{\sigma}.$$

15. **Simultanní invarianty dvou ploch druhého stupně.** Přejdou-li kvadratické formy kvaternarné

$$f = \Sigma a_{hk}x_hx_k, \quad f' = \Sigma a'_{hk}x_hx_k$$

linearnou transformací (27) do forem

$$\overline{f} = \Sigma \overline{a}_{hk}\overline{x}_h\overline{x}_k, \quad \overline{f'} = \Sigma \overline{a'}_{hk}\overline{x}_h\overline{x}_k,$$

máme při libovolném $\lambda$

$$\lambda f + f' = \lambda\overline{f} + \overline{f'};$$

hodnota $\lambda$, jež annulluje diskriminant levé strany, annulluje též diskriminant strany pravé, neboť rovnice $\lambda f + f' = 0$ náleží pak ploše kuželové, jest tedy také $\lambda\overline{f} + \overline{f'} = 0$ rovnice kužele. Má tedy bikvadratická rovnice

$$L = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a'_{11}, & \lambda a_{12} + a'_{12}, & \lambda a_{13} + a'_{13}, & \lambda a_{14} + a'_{14} \\ \lambda a_{21} + a'_{21}, & \lambda a_{22} + a'_{22}, & \lambda a_{23} + a'_{23}, & \lambda a_{24} + a'_{24} \\ \lambda a_{31} + a'_{31}, & \lambda a_{32} + a'_{32}, & \lambda a_{33} + a'_{33}, & \lambda a_{34} + a'_{34} \\ \lambda a_{41} + a'_{41}, & \lambda a_{42} + a'_{42}, & \lambda a_{43} + a'_{43}, & \lambda a_{44} + a'_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

čili

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0$$

tytéž kořeny jako rovnice

$$\overline{\mathrm{L}} = \Sigma \pm [(\lambda \overline{a}_{11} + \overline{a}'_{11}) (\lambda \overline{a}_{22} + \overline{a}'_{22}) (\lambda \overline{a}_{33} + \overline{a}'_{33}) (\lambda_{44} a_{44} + \overline{a}'_{44})] = 0$$

čili

$$\overline{\varDelta} \lambda^4 + \overline{\Theta} \lambda^3 + \overline{\Phi} \lambda^2 + \overline{\Theta}' \lambda + \overline{\varDelta}' = 0.$$

Vzhledem k hořejší rovnosti

$$\overline{\varDelta} = \mathrm{D}^2 \varDelta$$

soudíme, že platí

$$\overline{\Theta} = \mathrm{D}^2 \Theta, \quad \overline{\Phi} = \mathrm{D}^2 \Phi, \quad \overline{\Theta}' = \mathrm{D}^2 \Theta', \quad \overline{\varDelta}' = \mathrm{D}^2 \varDelta',$$

t. j., že výrazy $\Theta, \Phi, \Theta'$ jsou simultanní invarianty forem $f$ a $f'$; výraz $\varDelta'$ jest ovšem diskriminant formy $f'$.

V příčině skutečného vyčíslení těchto simultanních invariantů podotkněme, že patrně

$$(30) \qquad \Theta' = \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda = 0} = \Sigma a_{hk} \mathrm{A}'_{kk}, \quad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

značíme-li $\mathrm{A}'_{hk}$ minor diskriminantu $\varDelta'$ příslušný elementu $a'_{hk}$.

Zavedením hodnoty

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

by obdobně vyšlo, že

$$(31) \qquad \Theta = \Sigma a'_{hk} \mathrm{A}_{hk},$$

kde $\mathrm{A}_{hk}$ značí minor diskriminantu $\varDelta$ příslušný elementu $a_{hk}$.

Konečně

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda = 0},$$

t. j.

$$(32) \qquad \begin{aligned} \Phi = & \Sigma \pm (a'_{11} a'_{22} a_{33} a_{44}) + \Sigma \pm (a'_{11} a_{22} a'_{33} a_{44}) \\ & + \Sigma \pm (a'_{11} a_{22} a_{33} a'_{44}) + \Sigma \pm (a_{11} a'_{22} a'_{33} a_{44}) \\ & + \Sigma \pm (a_{11} a'_{22} a_{33} a'_{44}) + \Sigma \pm (a_{11} a_{22} a'_{33} a'_{44}); \end{aligned}$$

jest tedy $\Phi$ součtem šesti determinantů, jež vznikají z diskriminantu $\Delta$ tím, že elementy dvou sloupců nahradíme korrespondujícími elementy diskriminantu $\Delta'$.

Ostatně vychází týmž způsobem jako l. c. pag. 85., že lze simultanní invarianty jakož i $\Delta'$ vyvinouti z diskriminantu $\Delta$ pomocí invariantivní operace

$$a'_{11}\frac{\partial}{\partial a_{11}} + a'_{22}\frac{\partial}{\partial a_{12}} + \ldots + a'_{44}\frac{\partial}{\partial a_{44}};$$

označíme-li totiž literou $\Omega$ tuto operaci, máme

$$\Theta = \Omega(\Delta), \quad \Phi = \frac{1}{2}\Omega^2(\Delta), \quad \Theta' = \frac{1}{6}\Omega^3(\Delta),$$

$$\Delta' = \frac{1}{24}\Omega^4(\Delta).$$

(Dokončení.)

## Založení ceny na počest Lobačevskému a odhalení jeho pomníku.

Za příčinou sté ročnice dne narození *N. J. Lobačevského*, jež se udála 3. listopadu 1893, utvořila fysiko-mathematická Společnost Kazaňská komitét, složený z ruských i cizozemských učenců, za účelem sebrání peněžní částky, jíž by bylo lze zvěčniti paměť slavného ruského geometra. Úsilí tohoto komitétu mělo příznivý výsledek: sešlo se

9.071 rublů 86 kop. (asi 24.000 franků).

Po srážce nutných vydajů rozdělena zbývající částka tímto způsobem:

Jistina 6.000 rublů tvoří zvláštní fond, jehož úroky stačí, by se dostalo každý třetí rok odměny 500 rublů dílu jednajícímu o geometrii a specielně o geometrii ne-Euklidově, vytištěnému buď v jazyku ruském nebo francouzském, německém, anglickém, vlašském, latinském.

Poprvé bude cena přiřknuta 3. listopadu 1897 a díla buďtež zaslána nejdéle do 3. listopadu (22. října) 1896 Společnosti fysiko-mathematické v Kazani.