Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bartoloměj Navrátil

Perspektivný průmět točnový sférické loxodromie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 1, 20--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109158

Perspektivný průmět točnový sférické loxodromie.

Napsal

Bartoloměj Navrátil,

ředitel vyšších realných škol v Prostějově.

Halley ukázal, že stereografický průmět točnový sférické loxodromie jest logarithmická závitnice. Není však nesnadno odvoditi rovnici točnového průmětu její pro perspektivné průměty vůbec.

Podložíme-li průmětu soustavu souřadnic polárných tak, aby pól padl do průmětu točny (u př. severní) a aby osa polárná splynula s průmětem poledníku, jehož zeměpisná délka $\lambda = 0^0$, pak jest odklon provodiče od osy polárné ω vždy roven zeměpisné délce t. j. $\omega = \lambda$.

Při perspektivných průmětech točnových leží střed promítání vždy na ose zemské. Je-li r poloměr země $= 1$, R vzdálenosť středu promítání od středu země, vyjádřená měrou r, φ zeměpisná šířka bodu, pro který hledáme délku provodiče ϱ, pak jest, splývá-li rovina obrazná s rovinou tečnou ke kouli v točně severní sestrojenou a položíme-li

$$p = \frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

jak snadným výpočtem nalezneme

$$\varrho = \frac{(1+p)\cos\varphi}{1+p\sin\varphi}.$$

Dále jest rovnice loxodromie sférické, počítáme-li ji od rovníku a značí-li μ úhel loxodromický t. j. odklon loxodromie od severního směru poledníku

$$\lambda \cot\mu = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

kdež l je značkou přirozených logarithmů.

Jest však známo, že souvisí-li argumenty α a β relací

$$\alpha = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right),$$

pak též platí

$$\sin\beta = \mathfrak{Tg}\,\alpha, \quad \cos\beta\,\mathfrak{Cos}\,\alpha = 1,$$

kdež frakturové značky vyjadřují hyperbolické funkce stejnojmenné s dotyčnými funkcemi cyklickými.

Položíme-li v těchto rovnicích

$$\alpha = \lambda \cot \mu, \quad \beta = \varphi$$

a dosadíme-li hodnoty za $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ z nich nalezené do výrazu provodiče ϱ, obdržíme

$$\varrho\, [\mathfrak{Cos}\, (\lambda \cot \mu) + p\, \mathfrak{Sin}\, (\lambda \cot \mu)] = 1 + p,$$

což jest vzhledem k rovnici $\omega = \lambda$ obecná rovnice loxodromie v průmětech perspektivných.

Dle toho bude tedy na př., obmezíme-li se na tři nejvýznačnější průměty tohoto druhu

a) ve průmětu gnomonickém, poněvadž $p = \infty$,

$$\varrho = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, (\lambda \cot \mu)} = \mathfrak{Cosec}\, (\lambda \cot \mu),$$

b) ve průmětu stereografickém, kdež $p = 1$,

$$\varrho = \frac{2}{\mathfrak{Cos}\, (\lambda \cot \mu) + \mathfrak{Sin}\, (\lambda \cot \mu)} = 2\, [\mathfrak{Cos}\, (\lambda \cot \mu) - \mathfrak{Sin} (\lambda \cot \mu)],$$

c) ve průmětu orthografickém, v němž $p = 0$,

$$\varrho = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, (\lambda \cot \mu)} = \mathfrak{Sec}\, (\lambda \cot \mu).$$

Přejdeme-li od funkcí hyperbolických k funkcím exponenciálným relacemi

$$\mathfrak{Sin}\, \alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}),$$
$$\mathfrak{Cos}\, \alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}),$$

nalezneme snadno ve případě *b*)

$$\varrho = 2 e^{-\lambda \cot \mu},$$

což jest rovnice závitnice logarithmické.

Podobně jsou i křivky vytčené v *a*) a *c*) závitnice, jimž průmět točny jest bodem asymptotickým. Totéž platí konečně také o perspektivných průmětech točnových loxodromie sférické vůbec, poněvadž roste-li λ od 0 do ∞, přibývá $\mathfrak{Cos}\, (\lambda \cot \mu)$ od 1 do ∞ a $\mathfrak{Sin}\, (\lambda \cot \mu)$ od 0 do ∞.