Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Čtyry poučky o ellipsách a ellipsoidech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 3, 185--190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109125

Provedeme-li násobení, přejde rovnice tato v rovnici tvaru *)

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = 0 \quad (7)$$

z čehož seznáváme, že každá křivka má bod dvojný.

Všeobecná rovnice křivek stupně třetího s dvojným bodem má tvar (7); vyskytuje se v ní šest konstant, z čehož vysvítá, že křivka stupně třetího dvojným bodem, šesti body a bodem dvojným úplně určená jest. Z vyvinutí vysvítá, že v rovnici křivky cissoidální (7) též šesti libovolnými konstantami vládneme, čtyřmi od $K \equiv o$, dvě od $P \equiv o$, z čehož patrno, že každá křivka stupně třetího s dvojným bodem jest křivkou cissoidalnou. Rovnice cissoidy Dioklesovy obdržíme z rovnice všeobecné, položíme-li

$$a = 1,\ b = o,\ c = 1,\ d = -a,\ e = o,\ n = o,\ \frac{m}{p} = -a;$$

ze (6) ve tvaru

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

aneb z rovnic (4), (5) vyjadřenou pomocí parametru u ve formě:

$$x = \frac{au^2}{1+u^2},\quad y = \frac{au^3}{1+u^2}.$$

K rovnicím těmto se v příštím sešitu vrátíme, hodlajíce zevrubně cissoidu Dioklesovu pojednati na základě parametru jednoznačného.

Čtyry poučky o ellipsách a ellipsoidech.

(Sděluje *Fr. Strnad*, technik.)

I.

Budiž dáno n přímek v rovině. Místo bodu, pro který součet čtverců vzdáleností od daných přímek má stálou hodnotu k, jest ellipsa. Různým hodnotám k přísluší ellipsy podobné a podobně rozložené, jejichž společný střed činí součet (k)

---

*) Viz: Dr. *Em. Weyr*: Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Prag 1870, jakož i jeho „Geometrische Mitheilungen I. II. Sitzungsberichte d. k. Akademie 1870 Wien, kdež p. Weyr přečetné zajímavé vlastnosti křivek 3. stupně s dvojným bodem vyvinuje.

hodnotou nejmenší (k_0). *Součet převrácených kvadrátů os ellipsy jest vždy* $\frac{n}{k-k_0}$. (*F. Siacci.*)

Budiž $R_i = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i = 0$ (1)

$(i = 1, 2, \ldots n)$

rovnice přímek daných vzhledem k soustavě pravoúhlých os.

Rovnice hledaného místa geometrického jest pak

$$\Sigma R_i^2 = 0,$$

aneb ve formě rozvinuté:

$$x^2 \Sigma \cos^2 x_i + 2xy \Sigma \cos \alpha_i \sin \alpha_i + y^2 \Sigma \sin^2 \alpha_i - 2x\Sigma p_i \cos \alpha_i - \\ - 2y\Sigma p_i \sin \alpha_i + \Sigma p_i^2 - k = 0, \quad (2)$$

z čehož patrno, že křivka uvažovaná jest stupně 2ho. Snadno lze nahlédnouti, že nemůže míti reálných úběžných bodů, je-li k veličinou reálnou a konečnou a že jest tedy geom. místem bodů vytknuté vlastnosti ellipsa.

K vůli jednoduchosti užijeme známého označení koëfficientů a pišme rovnici její takto

$$E \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} - k = 0. \quad (3)$$

Měníme-li hodnotu k, náleží každé hodnotě k určitá ellipsa E a jest z rovnice (2) patrno, že všechny tak povstalé ellipsy jsou homothetické, t. j. podobné a stejně položené, dále že jsou též soustředné. Pro jistou hodnotu $k = k_0$ přejde příslušná ellipsa ve dvé pomyslných přímek, jichž reálný průsečník jest středem všech ellips. Jest to ona hodnota k, pro kterou determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} - k \end{vmatrix}$$

přejde v nullu.

Přeložíme-li osy souřadné do tohoto středu, ponechajíce směr jich, bude rovnice geom. místa v této soustavě

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} - k = 0.$$

Význam veličiny a'_{33} snadno lze vyšetřiti.

Musí totiž míti platnost rovnice

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33}-k_0 \end{vmatrix} \equiv (a'_{33} - k_0) \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

z kteréž bezprostředně vychází

$$a'_{33} = k_0,$$

tak že lze rovnici ellipsy psáti takto:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + k_0 - k = 0. \tag{4}$$

Jsou-li a a b její poloosy, bude

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{k - k_0} = \frac{\Sigma \cos^2 \alpha_i + \Sigma \sin^2 \alpha_i}{k - k_0} = \frac{n}{k - k_0}.$$

Ze zajímavé této relace plyne též, že k_0 jest minimální hodnota pro k; pro hodnoty menší než k_0 byl by součet $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ negativným a tedy ellipsa příslušná pomyslnou.

II.

Budiž O' bod jedné z těchto ellips a O její střed; dále buďtež P, P' paty kolmic spuštěných s bodů O, O' na jednu z daných n-přímek, pak jest vždy

$$\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = \Sigma\overline{O'P'^2} - \Sigma\overline{OP}^2. \qquad (\textit{Siacci}).$$

Je-li O' libovolný bod ellipsy a O její střed (souřadnice jeho buďtež ξ, η), P' a P pak paty kolmic spuštěných s O' a O na libovolnou z přímek daných, jest, vztahujeme-li vše k osám jdoucím středem,

$$x^2 \Sigma \cos^2 \alpha_i + 2xy \Sigma \cos \alpha_i \sin \alpha_i + y^2 \Sigma \sin^2 \alpha_i + k_0 - k = 0$$

rovnice ellipsy, dále pak

$$\overline{O'P'} = (k - \xi) \cos \alpha_i + (y - \eta) \sin \alpha_i$$

$$\overline{OP} = -(\xi \cos \alpha_i + \eta \sin \alpha_i).$$

Tedy jest $\overline{O'P'} - \overline{OP} = k \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i$

a $\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = x^2 \Sigma \cos^2 \alpha_i + 2xy \Sigma \cos \alpha_i \sin \alpha_i + y^2 \Sigma \sin^2 \alpha_i$,

aneb $\Sigma(\overline{O'P'} - \overline{OP})^2 = k - k_0 = \Sigma(O'P'^2 - OP^2)$, což bylo dokázati a dá se takto vysloviti:

Vedeme-li bodem ellipsy naší svazek přímek rovnoběžných s danými, tvoří součet čtverců vzdálenosti jich od středu stálou veličinu $k - k_0$.

Věta tato, jakož i předešlá, dají se analogicky pro prostor vysloviti, při čemž přímky vynahradíme rovinami, a ellipsa přejde v ellipsoid; důkaz příslušných vět byl by však téměř totožný s důkazy podanými pro útvary rovinné, pročež jej opomíjíme.

III.

Budiž E ellipsa příslušná stálé K a E_α ellipsa pro soustavu přímek daných, vyjmeme-li jednu z nich (α) a opět pro stálou K: ellipsy E a E_α mají dvojný styk v bodech přímky (α). Dvě ellipsy E_α, E_β odpovídající takto dvěma přímkám (α) (β) dané soustavy mezi společné dvě tetivy rozpolující úhly přímek (α), (β). (*Siacci.*)

Je-li $E=0$ rovnicí ellipsy odpovídající konstantě k, jest rovnice ellipsy E_α:

$$E-R_\alpha^2=0, \tag{1}$$

z níž jde na jevo, že ellipsy E a E_α dotýkají se vespolek ve dvou bodech přímky R_α.

Pro ellipsu E_β platila by rovnice

$$E-R_\beta^2=0, \tag{2}$$

kterouž od rovnic 1) odečtouce, obdržíme

$$R_\alpha^2-R_\beta^2=0 \tag{3}$$

co rovnici jisté kuželosečky náležející svazku stanovenému ellipsami E_α a E_β. Jest patrno, že kuželosečka přechází tu ve dvé přímek

$$R_\alpha+R_\beta=0, \qquad R_\alpha-R_\beta=0,$$

rozpolůjících úhel přímek R_α a R_β, čímž věta vyslovená dokázána.

IV.

Přejdeme-li k útvarům prostorovým a značí-li podobně $E=0$ rovnici ellipsoidu odpovídajícího konstantě k, a $P_\alpha=0$ rovnici roviny P_α, bude

$$E-P_\alpha^2=0 \tag{1}$$

rovnicí ellipsoidu E_α, kterýž jest geom. místem bodů, jichž čtverce vzdálenosti od n daných rovin, vyjímaje z nich P_α, tvoří součet k.

Ellipsoid tento, jak porovnáním rovnice jeho s rovnicí ellipsoidu E vychází, dotýká se tohoto podél křivky průsečné s rovinou P_α.

Vytvoříme-li podobným spůsobem ellipsoid E_β vyvinutím roviny P_β, bude rovnice jeho

$$E-P_\beta^2=0, \tag{2}$$

Odečtením rovnice 1) a 2), obdržíme

$$P_\alpha^2 - P_\beta^2 = 0\,, \qquad (3)$$

co rovnici jisté plochy stupně druhého, náležející svazku stanovenému ellipsoidy E_α a E_β.

Že zde plocha ta přechází ve dvě roviny

$$P_\alpha + P_\beta = 0\,, \qquad P_\alpha - P_\beta = 0\,,$$

kteréž úhly rovin P_α a P_β rozpolují, netřeba šířeji vykládati.

Myslíme-li si ještě ellipsoid E_γ, jehož rovnice bude tedy

$$E - P_\gamma^2 = 0\,,$$

protíná tento ellipsoid E_α v rovinách $P_\alpha^2 - P_\gamma^2 = 0$, ellipsoid E_β pak v rovinách $P_\beta^2 - P_\gamma^2 = 0$.

Tyto 4 roviny, rozpolující úhly rovin P_α, P_γ a P_β, P_γ stanoví mimo průsečnice (P_α, P_γ) a P_β, P_γ) ještě 4 přímky, kteréž jsou, jak patrno, geom. místa bodů stejné vzdálenosti od rovin P_α, P_β, P_γ čili osy kuželů točných, dotýkajících se těchto tří rovin.

Vynecháme-li dvě z daných rovin, na př. P_β a P_γ, bude geom. místo bodů, jichž součet čtverců vzdáleností od ostatních n—2 rovin se rovná k, ellipsoid $E_{\beta,\gamma}$ a rovnice jeho

$$E - (P_\beta^2 + P_\gamma^2) = 0.$$

Ellipsoid tento dotýká se ellipsoidu E_β podél průsečnice s rovinou P_γ, ellipsoidu E_γ pak podél průsečnice s rovinou P_β.

Uvážíme-li však vztah ellipsoidů E_β a E_γ k původnímu E, shledáme, že ellipsoid $E_{\beta,\gamma}$ dotýká se ellipsoidu E ve dvou bodech běžících na průsečnici rovin P_β a P_γ.

Máme-li pak konečně na zřeteli tři ellipsoidy $E_{\alpha,\beta}$, $E_{\beta,\gamma}$, $E_{\alpha,\gamma}$, jichž rovnice jsou

$$E - (P_\alpha^2 + P_\beta^2) = 0$$
$$E - (P_\beta^2 + P_\gamma^2) = 0$$
$$E - (P_\alpha^2 + P_\gamma^2) = 0,$$

shledáme, že první dva protínají se v křivkách obsažených v rovinách $P_\alpha^2 + P_\gamma^2 = 0$, $P_\alpha^2 - P_\gamma^2 = 0$, t. j. v těchže křivkách, v kterých se protínají ellipsoidy E_α a E_γ; podobně druhý a třetí pak v průsečnici ellipsoidů E_α a E_β, první a třetí pak v průsečnici ellipsoidů E_β a E_γ.

Z toho tedy následuje, že ellipsoidy $E_{\alpha,\beta}$, $E_{\beta,\gamma}$, $E_{\alpha,\gamma}$ mají vespolek tytéž body společné co ellipsoidy E_α, E_β a E_γ.

Předcházejícími úvahami dokázána věta následující:

„Jest-li E ellipsoid přislušný dané soustavě n rovin a stálé K, a je-li E_α ellipsoid příslušný tytéž stálé K a tytéž soustavě rovin mimo jedinou z nich (α), dotýkají se ellipsoidy E, E_α dle kuželosečky obsažené v rovině α. Jest-li E_β ellipsoid, který obdobně přisluší vynechané rovině (β), protínají se ellipsoidy E_α, E_β dle 2 kuželoseček obsažených v rovinách rozpolujících úhly rovin (α) a (β). Je-li tudíž E_γ ellipsoid přislušný třetí rovině γ, pak protíná E_γ ellipsoidy E_α a E_β v bodech nalezajících se na osách rotačních kuželů opsaných aneb vepsaných trojstěnu ($\alpha\beta\gamma$).

Budiž konečně $E_{\alpha\beta}$ ellipsoid, který pro stálou K obdržíme, vynecháme-li roviny α, β. Ellipsoidy E a $E_{\alpha\beta}$ dotýkají se v 2 bodech na přímce ($\alpha\beta$) se nalézajících a průseky ellipsoidů $E_{\beta\gamma}$, $E_{\gamma\alpha}$, $E_{\alpha\beta}$ jsou též průseky ellipsoidů E a E_β E_γ."

(*Siacci.*)

O kruhu devíti bodů.

(Podává Dr. *E. Weyr.*)

Mějmež libovolný trojúhelník abc (viz obr. 11.) a buďtež a' b' c' body rozpolující strany $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$. Body a' b' c' proložený kruh K nechť protne strany $\overline{bc}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$ v bodech α, β, γ, Poněvadž jak známo $a'b' \parallel ab$, $a'c' \parallel ac$, bude

$$\sphericalangle\, b'\,a'\,c' = \sphericalangle\, b'\,a\,c'$$

avšak jest též

$$\sphericalangle\, b'a'c' = b'\gamma c'$$

(co úhly obdvodové na tímtéž obloukem) tak že

$$\sphericalangle\, b'ac' = b'\gamma c'$$

to jest trojúhelník $\triangle\ ab'\gamma$ jest stejnoramenný aneb $ab' = b\gamma'$ a poněvadž $b'c = ab'$, bude $c\gamma \perp ab$. Bod γ jest tudíž pata s vrchole c spuštěné výšky; obdobně lze dokázat, že α a β jsou paty obou ostatních výšek. Tím dokázáno, že kruh K prochází nejen body rozpolujícími strany, nýbrž i patami výšek.

Výšky trojúhelníku protínají se jak známo na vzájem v tomtéž bodě v. Délky $\overline{va}$, $\overline{vb}$, $\overline{vc}$ nazýváme pak hořejšími