Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

O záření tepla v rozličných ústředích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 3, 153--166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109121

O záření tepla v rozličných ústředích.

(Podává Dr. *Aug. Seydler.*)

I.

Náuka o teple domáhá se teprv oné výše rozvoje, na které spatřujeme mechaniku a opírající se o ni vědy, zejmena astronomii a optiku. Století XVII. a XVIII., jež můžeme nazvati zlatou dobou právě uvedených věd (dostačí v ohledu tom poukázati na jmena: *Kepler*, *Galilei*, *Newton*, *Huyghens*, *Euler*, *Clairaut*, *Young*, *Fresnel*) nemůže vykázati se žádným zvlášť vynikajícím výskumem z oboru náuky o teple. Teprv *Fourier* (1807) počal na základech přesných vyšetřovat pohyb tepla v tělesech pevných, a odtud počíná řada skvělých pokroků v náuce jak o teple samém, tak o vztahu jeho k jiným zjevům. Thermodynamika stala se jaksi ohniskem fysikálního bádání, jež i ostatní odborné náuky světlem svým ozařuje. Že teprv novější doba přistoupila k vyšetření úkazů tepla, z toho následuje, že základní věty (principie), kteréž co poslední výsledky zkusného či induktivního bádání obdržíme, a z nichž opět cestou dedukce vyvoditi můžeme všechny úkazy v jistý obor příslušné, nejsou v náuce o teple ještě úplně ustáleny; nejnovější doba však v té věci značně pokročila a můžeme doufati, že se náuka o teple stane časem právě tak průzračnou jako mechanika. Mezi větami, jež bádání v oboru thermodynamiky odkrylo, přisluší jedno z prvních míst zákonu vyslovenému *Clausiem* takto: *) „teplo nemůže samo sebou přejíti ze studenějšího tělesa v teplejší bez současné náhrady či kompensace, t. j. nenastane-li zároveň jiná příslušná proměna".

Takováto příslušná proměna jest buď současný přechod určitého množství tepla z tělesa teplejšího v studenější, neb proměna určitého množství práce v teplo.

---

[3]) *Clausius* Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie sv. I. str. 134.

Za obyčejných poměrů děje se ovšem přechod tepla od teplejšího tělesa k studenějšímu, ku př. při sdílení tepla, při smísení tekutin rozličné teploty, při záření za poměrů jednoduchých. Tato část věty shora uvedené byla také již dávno mlčky uznána, ano od Fouriera i výslovně upotřebena při založení náuky jeho o sdílení tepla.[1]) Jsou však případy, v kterých jest možno pomocí tělesa proměnlivé teploty převáděti teplo z tělesa studenějšího v teplejší [2]); a v takových případech musí vždy zároveň buď určité množství práce upotřebeno býti k tomu, aby jisté množství tepla vzniklo, aneb nastati současný opačný přechod tepla Patrně jest tedy lichý názor těch, kteří jako *Zeuner* pokládají větu Clausiovu za samozřejmou a tudíž vyslovení její za zbytečné; spíše možno nazvat ji nejvyšším *postulatem* theorie tepla jejž sice přísně dokázati nemůžeme, jehož pravděpodobnost nám však důkaz přísný v dostatečné míře nahražuje. Byl však také z druhé strany vysloven náhled, že by bylo možno, zvláštním soustředením paprsků teplových, pomocí zrcadel a čoček, docíliti toho, aby teplo beze zvláštní náhrady přecházelo z tělesa chladnějšího v teplejší. S náhledem tím, který jest nejlepším důkazem proti samozřejmosti věty Clausiovy, setkáváme se zejmena u *Rankine-a.* Na základě svých a Clausiových prací přišel totiž *W. Thomson* [3]) k výsledku tomu, že vesmír blíží se jakémus stavu rovnováhy, poněvadž se neustále mění práce v teplo a neustále teplo přechází z teplejších v studenější tělesa, kdežto opačná proměna není bez kompensace možná. Konečný tento stav byl by dosažen, když by všechna práce byla spotřebována t. j. proměněna v teplo a všechny rozdíly teploty vyrovnány. Vzhledem k tomuto náhledu obírá se Rankine [4]) otázkou, nejsou-li též naopak možné děje takové, jimiž se rozptylené teplo na jednotlivých místech opět soustřeďuje, čímž by vznikaly nové zdroje práce a pohybu teplového ve vesmíru. Kdybychom na př. předpokládali, že éther (ústředí, v kterém se světlo a teplo zářivé pohybuje) jest obmezen, byly by paprsky teplové přijdouce

[1]) *Fourier.* Théorie analytique de la chaleur; str. 2.

[2]) *Clausius* l. c. Abhandlung I.; srovn. První zpráva jednoty českých mathematiků str. 51 a násl.

[3]) Phil. Mag. Ser. IV. Vol. IV.

[4]) tamtéž.

k hranicím étheru odraženy a mohly by, jak se domnívá Rankine, soustřediti se v jednom neb v několika ohniskách. Myslí tudíž Rankine, že jest možno soustřediti odrazem teplo vycházející od tělesa určité teploty, tak že v ohnisku vzniká teplota větší. Byť tedy hvězdy vyzařováním neustále se ochlazovaly, vyhasínaly a tudíž na nich veškeren život vyhynul, tož by mohly, přijdouce do některého takového ohniska, vzplanouti, v páry se proměniti, čímž by počátek vzala nová doba života jejich.

Rankine tento náhled pronesl všeobecně, co *pouhou možnost*; Clausius *přísně*, pomocí *mathematiky* možnost tuto zkoumal, a výsledek bádání jeho byl záporný, čímž ubájena jest platnost věty svrchu vytknuté. On určil totiž [1]) množství tepla, jež dvě plochy *stejné teploty* za nejrozličnějších poměrů na vzájem vysílají. To dostačí úplně, neboť kdybychom shledali, že z jedné plochy přechází více tepla na druhou než naopak, tož by v nejbližším okamžení byla již teplota první plochy o něco menší než teplota druhé, a přece by ještě, dokud by teplota její neklesla pod jistou mezi, více tepla od ní k druhé ploše přecházelo než ve směru opáčném.

Dospěl pak Clausius k výsledku následujícímu:

1. Máme-li dvě plochy A a B proti sobě ležící, jež k sobě na vzájem teplo vysílají, volíme-li na první ploše A nekonečně malou částici či prvek ds, na druhé ploše B prvek ds', je-li *mohutnost vyzařovací* [2]) první částice e, druhé částice e', je-li dále rychlost tepla v ústředí s částicí ds bezprostředně se stý-

---

[1]) Clausius, l. c. Abhandlung VIII.

[2]) Při stejné teplotě vyzařují rozličná tělesa v stejné době nestejné množství tepla; říkáme, že mají rozličnou mohutnost vyzařovací (vis emissionis), a tuto můžeme jako každou jinou veličinu měřiti. Mohli bychom se domnívati, že tento jednoduchý a vůbec známý úkaz odporuje větě výše vytknuté; jestli že ku př. postavíme proti sobě dvě zrcadla dutá o společné ose, a jestli umístíme v ohnisku každého zrcadla těleso jiné jakosti, tož bude jedno těleso méně tepla vyzařovati než mu těleso druhé pošle. Však tělesa, jež méně tepla vyzařují, též ho méně pohlcují, a sice jest, jak *Kirchhof* dokázal, *mohutnost pohlcovací* (vis absorptionis) v přímém poměru k mohutnosti vyzařovací, tak že v našem případě sice více tepla *dopadne* na jedno těleso než na druhé, ale každé těleso přece jen stejné množství tepla *pohltí*.

kajícím v, a podobně rychlost tepla v ústředí při prvku ds', v': tož jsou množství tepla, jež oba prvky k sobě na vzájem vysílají, v poměru následujícím

$$e v^2 : e' v'^2$$

2. Z toho následuje dále: nechceme-li předpokládati, že již při jednoduchém záření tepla (tedy bez soustředění) svrchu uvedená věta o přechodu tepla své platnosti pozbývá — což by se všem dosavádním zkušenostem příčilo — musí patrně mohutnost vyzařovací při stejné teplotě býti v opačném poměru čtverce teplové rychlosti v ústředí sousedícím. Neboť pak bude

$$e v^2 = e' v'^2 \qquad (1)$$

a množství tepla, jež obě tělesa na vzájem vyzařují, budou stejná.

3. Platí-li věta tato, vyjádřená rovnicí (1), pak si posílají dvě tělesa na vzájem *vždy* stejné množství tepla, ať již nastane nějaké soustředění tepla nebo ne. Byť se i teplo vycházející z jednoho tělesa soustředilo úplně na druhém, nemůže přece těleso toto vyšší teploty nabýti, více tep'a obdržeti než těleso první. —

Postup Clausiových myšlenek jest tedy následující:

Kvantity tepla, jež dvě tělesa stejné teploty na vzájem sobě posílají, mají se k sobě v *každém případě*, tedy při obyčejném záření i při koncentraci, jako

$$e v^2 : e' v'^2$$

Při *obyčejném záření* musíme však na základě všeobecné zkušenosti předpokládati, že není možno, aby teplo přecházelo z tělesa studenějšího v těleso teplejší, a tudíž také aby při stejné teplotě více tepla přecházelo z tělesa jednoho v druhé nežli ve směru opáčném; *proto* musí platiti rovnice (1). Pak ale musí i při soustředení paprsků platiti věta o přechodu tepla častěji již uvedená. Z vývodu toho patrno, že není věta tato samozřejmou; všeobecné platnosti nabývá jen tehdy, platí-li pro jistý obmezenější kruh úkazů (totiž pro obyčejné záření). Tuto platnost smíme však na základě všeobecné zkušenosti dobrým právem předpokládati. Zajímavé jest též, že Clausius hledaje důkaz pro větu svou nalezl zároveň ještě větu jinou, která stanoví poměr mezi mohutností vyzařovací a rychlostí tepla v sousedním ústředí. —

Clausius dokazuje tyto věty své z toho, že paprsky světlové a ovšem i teplové potřebují vždy minimum času, aby od jednoho bodu přišly k druhému, t. j. ze všech možných cest zvolí si vždy nejkratší. Na základě *této* věty mohl ovšem důkaz svůj provésti, aniž by při tom k cestě přihlížel, kterouž se v každém zvláštním případě paprslek bráti musí, a rozřešiti tudíž úlohu svou spůsobem velmi všeobecným a zároveň elegantním. Dlužno však připomenouti, že věta o nejmenší cestě světla neb tepla jest posledním členem v dlouhé řadě dedukcí; aby tedy důležité věty (1.—3.) Clausiem vyslovené staly se všeobecně přístupnějšími, jest velmi žádoucno míti pro ně důkaz jiný, opírající se o věty více známé a průzračné. Jest účelem tohoto pojednání, ukázati, jakým as spůsobem by se důkaz takový dal vésti.

II.

Především lze velmi snadno ukázati, že případ koncentrace nevyžaduje jakési zvláštní úvahy, jelikož se od všeobecnějšího případu jakéhokoliv záření (bez soustředění paprsků) podstatně nelíší. Soustředění nastane tehdáž, kdy se paprsky vycházející z jednoho bodu opět v jednom bodu scházejí, tak že se dvě plochy vyzařující na vzájem teplo v případu tom k sobě mají, jako předmět a příslušný obraz, a že každému bodu jedné plochy přisluší bod plochy druhé.

Pozorujme nyní dvě částice plochové, jež *bez soustředění* na vzájem teplo vyzařují. K vůli jednoduchosti si představme, že částice ty jsou kolmé na kuželech paprskových, jež vyzařují (v. obr. 1). Tohoto zjednodušení smíme vždy upotřebiti, t. j. místo skutečných částic plochových smíme vždy vzíti průměty jejich na rovinu kolmou k vyzářenému kuželi paprskovému; neboť průměty ty budou sice v poměru kosinusovém menší než plochy samé, ale vyzařování jejich bude v poměru právě opáčném větší. Množství tepla, jež částice ds plochy A (obr. 1.) vysílá k částici ds' plochy A', jest v přímém poměru

1. k mohutnosti vyzařovací e (částice ds),
2. k velikosti částice ds,
3. k otvoru $d\sigma$ kužele paprskového, který vycházeje z ds má za základní plochu částici ds', který jest tedy utvořen

z paprsků vycházejících z kteréhokoli bodu částice *ds* a vedených k obvodu částice *ds'*. Je-li částice *ds* nekonečně malá, jest ovšem bod, z kterého kužel vychází, lhostejný. Množství tepla vyzářeného od částice *ds* k částici *ds'* jest tedy (volíme-li přiměřenou jednotku pro míru tepla):

$$dQ = e\,ds\,d\sigma \qquad (2)$$

Právě tak lze vyjádřiti množství tepla vyslaného od částice *ds'* k částici *ds*:

$$dQ' = e' ds'\,d\sigma'. \qquad (3)$$

Když však nastane soustředění paprsků, tož může se státi *ds'* obrazem částice *ds* a naopak, a my pravíme: *každému bodu* částice *ds* přisluší jistý bod částice *ds'*, a všechny z onoho bodu vycházející paprsky sbírají se v tomto. To jest však jen geometrická abstrakce, která ze stanoviska fysikálního není zcela oprávněna. V skutečnosti nejsou žádné *body*; ony body obsažené v částicích *ds* a *ds'*, jež jsou v sobě v poměru předmětu a obrazu, jsou v skutečnosti nekonečně malé částice vyššího (druhého) stupně.

Kdežto při obyčejném záření teplo vycházející z částice nekonečně malé přes konečnou plochu se rozprostírá, sbírá se při soustředění na ploše velmi (nekonečně) malé. Z toho již patrno, že žádných mezí nestává mezi obyčejným zářením a mezi soustředěním paprsků; my bychom byli v rozpacích, kdybychom měli udati, *jak malá* musí býti plocha ozářená všemi paprsky vycházejícími z jedné částice protějšího tělesa, aby záření přestalo býti obyčejným a aby nastalo soustředění.

Proto můžeme pojednávati o soustředění tímž způsobem jako o záření obyčejném.

Co se týče otvorů *dσ* a *dσ'* kuželů paprskových, dlužno ještě následující podotknouti. Kdyby bylo soustředění dokonalé, t. j. kdyby skutečně paprsky vycházející z jednoho bodu spojovaly se opět v bod jediný, pak by patrně kužel paprskový měl dva vrchole. Otvor jednoho vrchole byl by libovolný, otvor druhého vrchole byl by však prvním určen. Tato neurčitost jednoho otvoru byla by podstatným rozdílem mezi soustřeďováním paprsků a zářením obyčejným; neboť při tomto jest velkost obou otvorů určena velkostí a tvarem příslušné (protilehlé) částice plochové. V skutečnosti má se však věc poněkud jinak.

Mysleme si, že ústředí mezi částicemi ds a ds' (obr. 2) jsou tak uspořádána, že částici ds' přísluší nepoměrně velký otvor $d\sigma$ příslušného kužele paprskového u ds; tož i naopak otvor $d\sigma'$ u ds' bude nepoměrně velký u porovnání s částicí ds.

V případě tom budou paprsky BA' a AB' sobě velmi blízky; čím menší jejich vzájemná odchylka, tím menší chyby se dopustíme, předpokládáme-li, že se spojují v paprsek jediný, což také při soustředění skutečně činíme. Mohli bychom tedy pojmouti soustředění paprsků též takovýmto spůsobem: při obyčejném záření jest poměr částice ozářené k otvoru příslušného kužele paprskového konečný, při soustředění nekonečně malý; aneb: všechny paprsky vycházející z plochy nekonečně malé pokrývají na protějším tělese plochu konečnou, při soustředění však plochu nekonečně malou.

III.

Pro množství tepla, které dvě částice na vzájem vyzařují a které lze vyjádřiti stejným spůsobem jak při obyčejném záření tak při soustředění paprsků, můžeme si zjednati vedle svrchu uvedeného výrazu (rovnice 2. a 3.) též následující. Mysleme si, že vychází z ds kužel paprskový s otvorem $d\omega$ a jiný stejného otvoru z ds'; první kužel vykrojí z plochy ds' částici df', druhý z ds částici df; mezi těmito veličinami a mezi veličinami dříve uvedenými budou pak platit rovnice:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{ds'}{df'}, \quad \frac{d\sigma'}{d\omega} = \frac{ds}{df} \tag{4}$$

a tudíž i další rovnice

$$dQ = \frac{e\, ds\, ds'\, d\omega}{df'} \tag{5}$$

$$dQ' = \frac{e'\, ds\, ds'\, d\omega}{df} \tag{6}$$

a konečně

$$\frac{dQ}{dQ'} = \frac{e\, df}{e'\, df'} \tag{7}$$

Z rovnice té plyne následující věta:

„Množství tepla, jež dvě libovolné částice plochové na vzájem vysílají, mají se k sobě jako částice plochové, které jsou vykrojeny z daných ploch dvěma kuželi paprskovými stejného otvoru, násobené příslušnou mohutností vyzařovací.“

Známe-li tedy velkost částic těchto, jest nám tím i množství tepla z jedné strany na druhou přecházejícího (až na jakýs stálý koefficient) dáno; a úlohou naší by bylo v každém zvláštním případě velkost tu vypočítati. Úloha ta jest v složitějších případech dosti obtížná; obmezím se zde pouze na následující velmi jednoduchý případ.

Mezi oběma plochama P a P' budiž obsaženo dvojí ústředí jedno oddělené od druhého plochou tvaru jakéhokoliv. Rychlost paprsků v ústředí u P budiž v, u P' v'.

Paprsek vycházející z bodu A (obr. 3.) plochy P a dopadající na bod B oddělující obě plochy láme se tak, že dopadá na bod B' plochy P'. Utvořme nyní kužel paprskový následujícím spůsobem: v B sestrojíme normálu BZ a proložíme přímkami BZ a BA rovinu BXZ, k této pak sestrojíme kolmici BY, čímž si zjednáme soustavu souřadnic $BXYZ$; v rovině BXY si vytkneme obdélník $BCDE$ a uvedeme též k bodům C, D, E paprsky z A, čímž obdržíme kužel paprskový v podobě jehlance $ABCDE$. Je-li uhel $BAC = d\alpha$, $BAE = d\beta$, platí pro otvor $d\omega$ kužele paprskového rovnice

$$d\omega = d\alpha\, d\beta \tag{8}$$

Příslušná částice df' na ploše P' jest pak obdélník $B'C'D'E'$, předpokládáme-li, což nám dle jedné dřívější poznámky vždy je dovoleno, že částice ta je kolmá k dopadajícímu paprsku. Položme $AB = u$, $BB' = u'$, úhel dopadu $ABZ = \varphi$, úhel lomu $= \varphi'$ $BC = db$, $BE = db'$, $B'C' = dc'$; budiž dále CZ' (obr. 4.) normála k ploše dělící v bodu C, $d\varrho$ její naklonění k normale BZ, r poloměr křivosti oblouku BC na ploše dělící, konečně $d\alpha'$ naklonění lomených paprsků BB' a CC' a u'' vzdálenost jich průseku A' od B. Pak jest

$$dc' = (u' + u'')\, d\alpha' \tag{9}$$

aneb, poněvadž

$$db = \frac{u d\alpha}{\cos\varphi} = \frac{u'' d\alpha'}{\cos\varphi'} \tag{10}$$

$$dc' = \frac{u\cos\varphi'\, d\alpha + u'\cos\varphi\, d\alpha'}{\cos\varphi} \tag{11}$$

Nyní bude naší úlohou vyjádřiti $d\alpha'$ pomocí $d\alpha$. K tomu nám bude napomocna rovnice mezi úhlem dopadu a lomu:

$$\frac{\sin\varphi}{v} = \frac{\sin\varphi'}{v'} \tag{12}$$

z které vyvodíme další rovnici:

$$\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{v} = \frac{\cos\varphi'\, d\varphi'}{v'} \tag{13}$$

differencováním.

Patrně jest

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -(d\alpha + d\varrho) \\ d\varphi' &= -(d\alpha' + d\varrho) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

a když tyto hodnoty do rovnice (13) vložíme, a $d\alpha'$ z ní určíme, obdržíme

$$d\alpha' = \frac{v'\cos\varphi\, d\alpha + (v'\cos\varphi - v\cos\varphi')\, d\varrho}{v\cos\varphi'} \tag{15}$$

Dále máme rovnici

$$d\varrho = \frac{db}{r} = \frac{u\, d\alpha}{r\cos\varphi} \tag{16}$$

a tudíž

$$d\alpha' = \frac{v' r\cos\varphi^2 + u(v'\cos\varphi - v\cos\varphi')}{v\, r\cos\varphi\cos\varphi'}\, d\alpha \tag{17}$$

Vložíme-li výraz ten do (11), obdržíme konečně

$$dc = \frac{r(u v\cos\varphi'^2 + u' v'\cos\varphi^2) + u u'(v'\cos\varphi - v\cos\varphi')}{r\cos\varphi\cos\varphi'}\,\frac{d\alpha}{v} \tag{18}$$

můžeme tudíž položiti

$$dc' = B\frac{d\alpha}{v} \tag{19}$$

Myslíme-li si nyní, že podobným spůsobem vychází plochý svazek paprskový v téže rovině jako dřívější svazek ABC od plochy P' z bodu A', tož určuje na ploše P malý oblouček dc (co obdobu obloučku dc') a abychom délku jeho určili, nepotřebujeme leč zaměniti ve výrazu pro dc' veličiny u a u', v a v', φ a φ', mimo to ale vzíti buď úhel $d\varrho$ určený oběma normálama neb příslušný poloměr křivosti r záporně. Tím se však veličina B (součinitel zlomku $\frac{d\alpha}{v}$ v rovnici 18.) nemění a my můžeme tudíž bezprostředně napsati rovnici

$$dc = B\frac{d\alpha}{v'} \tag{20}$$

Podobným spůsobem lze určiti veličinu $B'E' = de'$ a obdobnou veličinu de (v. obr. 5.)

Nazveme-li $d\varrho'$ úhel normaly EZ'' v bodu E s normalou BZ, r' příslušný poloměr křivosti, $d\beta'$ naklonění lomeného paprsku EE' k BB', u''' vzdálenost průseku obou paprsku A'' od bodu B, máme pak následující rovnice

$$B'E' = de' = (u' + u''')\, d\beta' \tag{21}$$

$$db' = ud\beta = u'''\, d\beta' \tag{22}$$

a tudíž i

$$de' = ud\beta + u'\, d\beta' \tag{23}$$

Poněvadž se úhel dopadu i lomu paprsku AE od příslušných úhlů φ a φ' paprsku AB neliší leč malou veličinou druhého stupně, tož musíme jiným spůsobem než dříve vyjádřiti $d\beta'$ pomocí $d\beta$. K tomu poslouží nám podmínka, že paprsek dopadající AE, paprsek lomený EE' a normála EZ'' v jedné rovině ležeti musí. Jsou-li $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1\ \lambda_2$ atd. kosinusy směru tří přímek, tož podmínka, že přímky ty mají ležeti v jedné rovině, jest vyjádřena jak známo, rovnicí:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jsou pak úhly směru

přímky AE : $90^0 - \varphi$, $90^0 + d\beta$, φ
přímky EE' : $90^0 - \varphi'$, $90^0 + d\beta$, φ'
přímky EZ'': 90^0 $90^0 - d\varrho'$, $d\varrho'$

Obdržíme tudíž podmiňující rovnici

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi, & -d\beta, & \cos\varphi \\ \sin\varphi', & -d\beta', & \cos\varphi' \\ 0 & d\varrho', & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

aneb

$$\sin\varphi\,(\cos\varphi'\, d\varrho' + d\beta') = \sin\varphi'\,(\cos\varphi\, d\varrho' + d\beta) \tag{25}$$

čili

$$v\,(\cos\varphi'\, d\varrho' + d\beta') = v'(\cos\varphi\, d\varrho' + d\beta). \tag{26}$$

a tudíž

$$d\beta' = \frac{v' d\beta + (v' \cos\varphi - v \cos\varphi') d\varrho'}{v} \tag{27}$$

Jest však

$$d\varrho' = \frac{u d\beta}{r'} \tag{28}$$

a následovně

$$d\beta' = \frac{r' v' d\beta + u (v' \cos\varphi - v \cos\varphi') d\beta}{r' v} \tag{29}$$

a konečně

$$de' = \frac{r' (uv + u'v') + u u' (v' \cos\varphi - v \cos\varphi')}{r'} \frac{d\beta}{v} \tag{30}$$

čili

$$de' = \frac{B' d\beta}{v} \tag{31}$$

My vidíme, že se výraz nazvaný B' opět uemění, zaměníme-li veličiny u a u', v a v', φ a φ' a položíme-li místo r', $-r'$; tato proměna dostačí, abychom si zjednaly výraz pro délku oblouku, jejž určuje na ploše P svazek paprskový vycházející od plochy P' a procházející osou BY. Je-li tedy otvor svazku tentýž jako otvor svazku ABE, totiž $d\beta$, obdržíme rovnici

$$de = \frac{B' d\beta}{v'} \tag{32}$$

Jelikož jsou částice plochové df a df' obdélníky o stranách dc, de, dc', de', máme rovnice

$$df = \frac{B B' d\alpha\, d\beta}{v'^2} \tag{33}$$

a

$$df' = \frac{B B' d\alpha\, d\beta}{v^2} \tag{34}$$

Vložíme-li výrazy ty do rovnice (7) obdržíme konečně hledanou rovnici

$$\frac{dQ}{dQ'} = \frac{e v^2}{e' v'^2} \tag{35}$$

kterouž jest důkaz Clausiovy věty proveden; neboť mají-li kvantity tepla, jež dvě částice plochové na vzájem vysílají, býti stejné, musí platiti rovnice

$$e v^2 = e' v'^2$$

A je-li vyhověno této rovnici, pak jsou také ona množství tepla skutečně stejná, ať již přechod tepla spojen jest se soustředěním paprsků či ne. Důkaz zde provedený platí ovšem jen pro případ velmi jednoduchý: tehdy, kdy mezi oběma plochama nachází se toliko dvojí ústředí, u každé plochy jedno; ale my bezprostředně nahlížíme, jakým spůsobem by se dal všeobecnějším učiniti. Dostačí k tomu pokračovati stále touže cestou. Kdyby místo plochy P', která dopadající paprsky pohlcuje, zaujímala jiná plocha dělící druhé ústředí od třetího, tož bychom museli paprsky po lomu jejich do třetího ústředí stejným spůsobem vyšetřiti. Jediný rozdíl byl by ten, že by průmět svazku paprskového na dělící plochu P' nebyl všeobecně obdélník, nýbrž rovnoběžník (obr. 6). My bychom pak mohli doplniti rovnoběžník ten spůsobem v obrazci naznačeným v obdélník o dvojnásobné ploše, a svazek paprskový, jehož základní plocha by byl obdélník ten, bychom v jeho dalším průběhu vyšetřovali spůsobem dříve vyvinutým. Co by pak platilo o jednom svazku paprskovém, platilo by ovšem i o druhém, jehož základní plocha by byla polovice základnice prvé. Rovněž bychom pokračovali, kdyby se nalezala čtyry nebo více ústředí mezi oběma plochama. ano i tehdy, kdyby se ústředí nepřetržitě měnilo, v kterém případě bychom museli přejíti od konečného počtu ústředí k nekonečnému. Odraz by mohl při tom pojímán býti co lom, při kterém exponent lomu jest — 1. Tyto poznámky vzhledem k cestě, jakou bychom se chtíce důkaz úplný provésti, bráti měli, dostačí, neb při skutečném počítání obdržíme pro veličiny B a B' výrazy na nejvýš složité, aniž by se nám při tom něco nového a poučného naskytlo.

IV.

Ke konci této úvahy nebude snad zbytečno seznati některé případy, v kterých by se při povrchnějším ohledání dala předpokládati možnost přechodu tepla z tělesa studenějšího v těleso teplejší, čili (což jest stejné) možnost rozdílu v množství tepla, jež dvě tělesa stejné teploty na vzájem vysílají.

Mysleme si ellipsoid rotační (obr. 7.) jehož dutá vnitřní plocha jest zrcadlem; v ohniskách jeho umístěna jsou dvě tělesa A a B na vzájem teplo vyzařující, jež dopadá z jednoho tělesa na druhé buď přímo buď po odražení od vnitří plochy ellipsoidu. Tělesa ta buďtež tak malá, že teplo přímo dopadající můžeme u porovnání s množstvím tepla odraženého zanedbati. Teplo na vzájem vysílané budiž v tomto případě stejné. A nyní obalme těleso A atmosférou průhlednou, v které rychlost paprsků jest a-kráte menší než v ostatním prostoru. Je-li skutečně platen dřívější zákon, že vyzařování jest v opáčném poměru čtverce rychlosti, tož bude v tomto případě vyzařování tělesa A a^2-kráte větší než v prvním.

Jest-li že jsou kvantity tepla, jež obě tělesa A a C v prvním případě na vzájem vysílají, stejné, tož zdá se, obdrží v druhém případě těleso C více tepla než těleso A, poněvadž jeho mohutnost vyzařovací zůstala nepromĕněnou, kdežto vyzařování tělesa A se stalo a^2-kráte větší.

Skutečně by tomu tak bylo, kdyby tělesa A a C byla pouhými body, poněvadž však toto fysikálně jest nemožno, tož nemohou se soustřediti všechny z A vycházející paprsky na tělese C, nýbrž určitá část jich musí se minouti toho tělesa a přispěti k oteplení prostoru samého.

Jestliže tedy provedeme proměnu svrchu uvedenou, a tím změníme množství tepla z A vycházejícího, promění se tím zároveň ne sice veškeré teplo z B vycházející ovšem ale část jeho na A dopadající v stejném poměru, takže teplo na vzájem vysílané bude opět na obou stranách stejné. Budiž na př. těleso A i atmosféra jeho koulí, tož patrně zahalují paprsky vycházející z A a dotýkající se povrchu jeho, na př. CC' (obr. 8.) po lomu svém kouli A' jejíž poloměr r' má následující poměr k poloměru r koule A:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = a.$$

Můžeme tedy těleso A, je-li obklopeno ústředím o rychlosti paprsků $= \frac{1}{a}$, nahraditi jiným tělesem A', jehož povrch jest a^2-kráte větší povrchu tělesa A, jehož mohutnost vyzařovací rovná se mohutnosti tělesa B. Patrně platí substituce ta jak vzhledem k teplu vyslanému od tělesa A k tělesu B, tak i vzhledem k teplu naopak od B k A vyslanému.

Podobný případ byl by následující: dva rotační ellipsoidy protínají se v kruhu, jehož rovina jest kolmá k společné ose a prochází společným ohniskem C (obr. 9.); část obou ellipsoidů ležící v prostoru uzavřeném jest odňata. V ohniskách A, B, C umístěna jsou tři tělesa, která jsouce stejné jakosti, velkosti a teploty na vzájem proti sobě teplo vyzařují. Jsou-li tělesa ta u porovnání s ellipsoidy dostatečně malá, můžeme opět zanedbati teplo přímo vysílané a přihlížeti pouze k teplu odraženému Odráží se však do ohniska C všechno teplo vycházející z A a dopadající na plochu DFE, tedy vyzářené uvnitř prostoru $ADFE$, a toliko paprsky ležící v kuželu DAE minou se tělesa C; totéž platí o paprscích vycházejících z B; i zde nedopadají na C jen paprsky kužele DBE; ostatní všechny (tak zdá se) slouží k oteplení tělesa C. Mohlo by se tedy na první pohled mysliti, (a to vším právem, kdyby bylo možno, aby tělesa A, B, C stala se mathematickými body) že těleso C více tepla příjme než vydá, že teplota jeho tedy stoupá; neboť zdá se, že přijímá všechno teplo vycházející od dvou jemu rovných těles, vyjma teplo vyzářené v obou kuželích paprskových DAE a DBE, jež lze přiměřenou volbou obou ellipsoidů libovolně zmenšiti. Případ ten mohli bychom rozšířiti tak, že bychom sestavili libovolný počet ellipsoidů okolo společného ohniska a umístili v tomto těleso C, v ostatních pak ohniskách stejný počet těles A, B.., jež by vysílala na těleso C odrazem od ellipsoidických zrcadel teplo své. Zde bychom při povrchním rozumování očekávali u větší ještě míře soustředění tepla na tělese C; snadno však odkryjeme při podrobnějším rozboru podobným jako v prvém případě spůsobem v čem by záležela chyba naše. A tak by nás skoumání jednotlivých případů vedlo cestou induktivní k téže větě, kterou Clausius všeobecným spůsobem dokázal.