Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

W. W. Heinrich

O methodě instantánních oscillací v asteroidickém problému tří těles

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 5, 320--335

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109097`

obdržíme pro poslední integrál

$$R_n = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{x^n dx}{1+x}$$

pomocí poslední identity v případě $a = 1$ vyjádření

$$R_n = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu!} \int_0^\infty e^{-\omega x} x^{n-1} (e^{-x} - 1)^\nu dx,$$

t. j. $$R_n = -(n-1)! \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{C_\nu}{\nu!} \Delta^\nu \frac{1}{\omega^n}, \quad \Delta\omega = 1.$$

Příklad. $\omega = 15$, $n = 5$

u	u^{-5}
15	$0{\cdot}0^7 87791$
16	59605
17	41429
18	29401
19	21260

$\Delta\omega^{-n} = -0{\cdot}0^7 28186$, $\Delta^2\omega^{-n} = 0{\cdot}0^7 10010$,
$\Delta^3\omega^{-n} = -0{\cdot}0^8 3862$, $\Delta^4\omega^{-n} = 0{\cdot}0^8 1601$.

Podržíme toliko deset míst; pak máme poslední člen

$$\frac{C_4}{4!} \Delta^4 = 0{\cdot}0^9 4,$$

takže s napsanými členy vystačíme.

O methodě instantánních oscillací v asteroidickém problému tří těles.

W. W. Heinrich v Praze.

(Odpověď ku článku pana J. Svobody „Několik poznámek . . .“ Čas. XLVIII 1919 p. 37., jakož i ku článku pana K. Petra „Dvě poznámky ku spec. případu problému tří těles“ Časop. XLVII. 1918 str. 268.)

1. Když koncem let osmdesátých vydal Poincaré svou základní práci Sur le problème de trois corps Acta math. XIII. a později svoje Methodes nouvelles, ocitly se dosavadní methody theoretické astronomie ve zcela novém stadiu. Bylo úkolem nejbližším tyto abstraktní cesty Poincaréovy propracovati explicitně a tak je přiblížiti ku konkretním otázkám přírodní vědy. Tím teprve se osvětlí, jak dalece jsou ony metody schopny životnosti či jak jsou upotřebitelné v přírodě.

V čem spočívá jich základní myšlenka? Kdežto staré theorie považovaly za prvé přiblížení dráhy, platné při existenci těles toliko dvou, a další přiblížení doplnily teprve přibráním tělesa třetího, postupuje se v nových metodách zcela jinak. Ihned v prvém přiblížení uvažují se jistá, ponejprv zde analyticky nalezená přesná řešení úplného problému tří těles a postup další zkoumá již jen relativně malé odchylky vznikající tím, že reální přírodní dráha svými počátečními podmínkami vždy je trochu odchylná od volené dráhy abstraktní.

Tato druhá approximace zkoumá se metodou kmitů volných (Lejeune-Dirichlet, Hill).

Přírodní vědu interessuje především množství oněch známých exaktních řešení, z nichž počet vychází. Bude-li snad dokonce v sousedství každé pozorované dráhy planetární nalézati se nějaké takové známé řešení, pak vidno, že problém úplně řešen. V obecném případě je míněných řešení směšně málo, a nebyla ještě ani konstruována, zpravidla zjištěna jenom jich existence. Nebudu se o věci dále šířiti připomínaje jen, že tu z každé existence plyne konvergence řad trigonometrických a tím zaručenost tak zvané temporární stability, otázka důležitá pro kosmogonii.

Omezme případ obecný na případ užší, jejž ostatně sám Poincaré především studuje. Uvažme konkrétní systém Slunce, Jupiter (obíhající v ellipse), a planetoida hmoty nulové. Poměry jsou tu málo lepší a periodických řešení známo sotva několik (obecně druhá sorta Poincarého). Specialisujme dále předpokladem, že Jupiter obíhá v kruhu. Jak nepatrný to ústupek. Starší theorie svádí k mínění, které tam platí od doby Laplaceovy, přes sto let — že podobné zanedbání nemá skoro vlivu.

Vyšetřeme pro ten případ řešení periodická. Objeví se jich celé spousty (obecně první sorty Poincaréovy). Mimovolně vnucuje se myšlenka z toho těžiti a vycházeti do onoho neznáma z těchto drah známých a méně komplikovaných. Ne marně praví Poincaré: „C' est la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrez dans une place jusqu'ici réputée inabordable.“

Jak nepatrně vyjímá se zde ona úchylka od obecné cesty Poincaréovy. Kdežto tam rozvinuty metody ke studování kmitů volných, setkáme se s jich studiem též zde, a krom toho dlužno přibrati zcela nepatrné rušivé síly povahy periodické řádu $\frac{5}{100000}$.

Tedy již existence a husté rozsetí oněch známých drah svádělo k tomu, aby na ně byly navazovány konkrétní dráhy přírodní. Poincaré věřil, že problém planetoid a specielně nejnepřístupnější z nich Hecuby takto uspokojivě řešen. Jak vidno je cesta na pohled hladkou, nicméně objevily se potíže nepřekonatelné. Uvádím určení dráhy Hecuby typu $\frac{1}{2}$ od Simonina (Sur l'orbite de (108) Hecube, Paris thèse 1897), jenž vysvětloval si svoje nesnáze ne zcela detailními základy počtu. Zmíním i případu planetoidy Chicago (334), typu $\frac{3}{2}$, na němž Kępinski konstantoval výsledek zcela negativní.

Abych osvětlil ony nepochopitelné jevy formuloval jsem před léty úlohu takto:

Studovati problém restringovaný (excentricita dráhy Jupiterovy nullou), rušený silou povahy periodické, pochodící od vlivu excentricity.*) Fantasie viděla cosi jako klopotné quadratury Darwinovy, zatím co instinkt rozvinoval mocnosti excentricity. To rozhodlo o volbě systému, i zobecněny rovnice Darwinovy a postupováno metodou následující, již ve 2. odst. zevrubněji líčím. Napřed jsem si představoval celou dráhu konstruovánu z malých tratí, z nichž jednotlivé bylo lze obdržeti jako dráhy oskulující, které poskytuje rozvoj původních diferenciálních rovnic v libovolném místě pohybu. Zůžení intervalu nemá dolní meze stejně jako při obyčejné mechanické quadratuře. Poslednější konstruuje ony partiální trati numericky pomocí drah problému dvou těles, a fortiori je to možno prostřednictvím drah problému těles tří restringovaného. Metoda je tedy pokus o *analytické* provádění numerických quadratur. I ukázalo se, že — aniž z obecného tvaru kmitu instantánního možno poměry pohybové přehlédnouti, — vystupují v theorii nutně jisté divisory.

*) Über gewisse Ungleichheiten im asteroidischen Problem Astron. Nachr. Bd. 194 (1913) nro 4644 p. 209.

Pro stručnost značím v následujícím:

R.S. — recensi Svobodovu Časop. XLVIII. 1919 str. 37.

D. — svůj článek o Darwinových satellitech Časop. LXII. str. 175, 407. 1913.

U. — (týž německy, vyšel v Astron. Nachr. jako Über gewisse Ungleichheiten im asteroidischen Problem) A. N. Bd. 194 (1913) č. 4644 p. 209.

C. — práci v Král. Čes. Spol. Nauk, Zas. zprávy 1917: Über ein neues singuläres Curvensystem im asteroidischen Dreikörperproblem.

J. — článek přítomný O instantánních oscillacích.

Je to úplné analogon Poincaréových divisorů v řešeních asymptotických, jichž existenci nutno při důkazu konvergence se vyhnouti méně obecnými předpoklady. Na tom založen klasický důkaz konvergence obecně známý. V našem případu arciť nelze se divisorům vyhnouti, ale na štěstí lze je přehlédnouti ve formě jistých křivek. Nazval jsem objevené křivky resonančními a konstatoval, že dovolují odkryti a najíti dotud neznámé *singulární body* příslušných rozvojů, které jsou příčinou nezdaru Poincaréových metod. Spletilá otázka řešena způsobem názorným, jakoby vyryta v písku, objeví se náhle všechna ona zapovězená místa roviny najednou. Pro moderní metody plyne pak následující výsledek: Dosavadně konstruovaná a známá hustě rozsetá řešení první sorty nepodají skoro v žádném případu reálního vzoru dráhy existující v přírodě. Neboť jakmile přistoupíme ke studiu oscillací volných, jsme nuceni přibrati také ony nepatrné termy řádu $\frac{5}{100000}$, pochodící od excentricity — ale pak řady vystoupí z oboru konvergence následkem nalezených divisorů.

Asi v této formě, jak až posud vylíčeno, referoval jsem o formulaci problému i výsledcích svojí diskusse ve své přednášce na sjezdu astronomů v Hamburku 1913.

Na témže sjezdu přednášel současně pan A. Wilkens o kommensurabilitách a záhadě Simoninově. Došel pak výsledku, že *zatím* nutno omeziti se na řídká řešení sorty druhé. Aniž se zabýval analytickou stránkou zmíměné potíže, podotkl okolnost neméně zajímavou, že ještě před smrtí Poincarého podařilo se mu svou korrespondencí pohnouti ho, aby sdílel názor, jehož sám se přidržuje: Cesta, kterou Poincaré označil Simoninovi je nesprávnou a potíže její jsou rázu asi hlubšího, spočívajíce dle všeho v neoprávněném seřadění tak zvaných členů kritických.

Výsledek tento potvrzuje tedy nepřímo moji diskussi vlastní. Odkrytá diskontinuita křivková i nalezení singulárních bodů rozvojů, zahrnuje totiž jako zvláštní případy netoliko záhadu Wilkens-Simoninovu (Hecuba $\frac{1}{2}$) a záhadu Kempinského (Chicago $\frac{3}{2}$), nýbrž postihuje i celou uvedenou spoustu hustých periodických řešení první sorty.

Přirozeně, že během sjezdu bylo o thématu živě diskutováno, mezi námi oběma i dále s panem Oppenheimem (Vídeň) a Charlierem (Lund).

Vizme nyní positivnější stránku věci. Jak zachrániti ona hustá centra a tím moderní metody. Odpovědi zatím není.

Nevzdal jsem se posud mínění o možnosti důkazu a konstrukce jistých periodických řešení, jež chci zváti sekulárními a která dle všeho souvisí s oněmi, jež Poincaré nazývá du deuxième genre.

2. Vyložím předem stručně a to explicitně až na veličiny řádu vyššího v excentricitě dráhy rušící planety (e-) metodu oscilací instantánních. Její základ podán ve článku Příspěvek k theorii Darwinových satellitů (D) se zanedbáním druhých mocností e, aniž aproximace další od studované první znatelně se liší. Obecně vyšetřuje se sousedství libovolného bodu otáčivé roviny. Ježto pak nejjednoduššími drahami periodickými jsou řešení Lagrangeova (L) odhodlal jsem se tehdy studovati je *touto metodou*, bych objasnil případ daleko spletitějších řešení ostatních.

Zejména podal jsem tu počtem obšírný sice, ale poučný důkaz Lagrangeovy věty pro ellipsu, vyjde-li se z kruhu ($e = 0$) Lagrangeova. To jest nalezl jsem zejména kmity ryzí vynucené (u_1, v_1 viz dále) studiem rovnic variačních (2. druh kmitů J. p. 328.).

Výslovně podotýkám, že na první pohled neběželo mi o rozeznávání neb podrobné studium jednotlivých kmitových kategorií. Studium těchto jest předmětem jiných prací, jež z pochopitelných důvodů vedeny v koordinátách kanonických. (Über die periodischen Bahnen des Librationscentrums Sitzungsber. d. böhm. Gess. d. Wiss. 1913). Bylo tedy hlavním cílem článku nalezení oné neznámé dosud diskontinuity, jakož i dlouhý důkaz věty Lagrangeovy, metodou instantánních kmitů. Za tím účelem podal jsem napřed zobecnění Darwinových rovnic na případ $e \neq 0$).

I spatřuji meritorní stránku svojí práce vedle metody i fakt snesených v tomto i předchozím odstavci zejména v celé formulaci i pojetí fundamentální, dotud neznámé otázky theoretické astronomie, jejíž konsekvence — ač zatím negativní — hluboko vnikají do kořenů „moderních metod“ *objímajíce jako zvláštní případy nejen záhadu Simonin-Wilkensovu a Kempinského (Chicago), nýbrž postihujíce i celou uvedenou spoustu řešení sorty první.*

Bylo vyloženo, proč řešení tato jsou zvláště cenná pro konkrétní otázky našeho systému slunečního, i jedná se o to, jak jich použitelnost zachrániti. Je pochopitelno, že čtenář, který s moderními metodami není blíže seznámen, — jakoby neměl porozumění pro jemnou skulpturu.

Mnohé na pohled *samozřejmé věci* uvedené v zmíněném článku nepřenese z oněch jednoduchých řešení (L) na případ daleko složitějších řešení Poincaréových, zůstávaje vzdálen *jich* interpretace. To týká se zejména důkazu věty Lagrangeovy, jakož i jiných jednotlivostí, jež vysvítají teprve z práce druhé (C), neb se o nich ještě zmíním.

Pohybové rovnice jsou tvaru: *D*, *p* 414 (11)

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M(\xi-\varkappa) - Q(\eta-\lambda) &= K + e\mu K' + e^2\mu K'' + \dots \\
&\quad + e\mu M'(\xi-\varkappa) + e\mu Q'(\eta-\lambda) \\
&\quad + e^2\mu M''(\xi-\varkappa) + e^2\mu Q''(\eta-\lambda) \\
&+ R_{200}(\xi-\varkappa)^2 + R_{110}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda) + R_{020}(\eta-\lambda)^2 + R_{002}\zeta^2 \\
&+ \mu e R'_{200}(\xi-\varkappa)^2 + \mu e R'_{110}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda) + \mu e R'_{020}(\eta-\lambda)^2 \\
&\quad + \mu e R'_{002}\zeta^2 \\
&+ R_{300}(\xi-\varkappa)^3 + R_{210}(\xi-\varkappa)^2(\eta-\lambda) + R_{120}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda)^2 \\
&+ R_{030}(\eta-\lambda)^3 + R_{102}(\xi-\varkappa)\zeta^2 + R_{012}(\eta-\lambda)\zeta^2 + R_{003}\zeta^3 + \dots, \\
\ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - Q(\xi-\varkappa) - N(\eta-\lambda) &= L + e\mu L' + e^2\mu L'' + \dots \\
&\quad + e\mu Q'(\xi-\varkappa) + e\mu N'(\eta-\lambda) + \\
&\quad + e^2\mu Q''(\xi-\varkappa) + e^2\mu N''(\eta-\lambda) + \\
&+ T_{200}(\xi-\varkappa)^2 + T_{110}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda) + T_{020}(\eta-\lambda)^2 + T_{002}\zeta^2 \\
&+ \mu e T'_{200}(\xi-\varkappa)^2 + \mu e T'_{110}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda) + \mu e T'_{020}(\eta-\lambda)^2 \\
&\quad + \mu e T'_{002}\zeta^2 \\
&+ T_{300}(\xi-\varkappa)^3 + T_{210}(\xi-\varkappa)^2(\eta-\lambda) + T_{120}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda)^2 \\
&+ T_{030}(\eta-\lambda)^3 + T_{102}(\xi-\varkappa)\zeta^2 + T_{012}(\eta-\lambda)\zeta^2 + T_{003}\zeta^3 + \dots, \\
\ddot{\zeta} - P\zeta &= S_{002}\zeta^2 + S_{200}(\xi-\varkappa)^2 + S_{110}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda) \\
&\quad + P' e\mu\zeta + \dots + S'_{002} e\mu\zeta^2 + \dots + S_{020}(\eta-\lambda)^2 \\
&+ S_{300}(\xi-\varkappa)^3 + S_{210}(\xi-\varkappa)^2(\eta-\lambda) + S_{120}(\xi-\varkappa)(\eta-\lambda)^2 \\
&+ S_{030}(\eta-\lambda)^3 + S_{102}(\xi-\varkappa)\zeta^2 + S_{012}(\eta-\lambda)\zeta^2 + S_{003}\zeta^3 + \dots
\end{aligned}
$$

Písmeny tečkované značí derivace, čárkované jsou periodické řady s mnohonásobnými argumenty *nt*, jinak význam písmen je týž jako v mém čl. (*D.*)

Rozvoje jsou něco zjednodušeny tím, že platí obecně (l. c. p. 414) $\frac{\partial^k \Omega}{\partial z \partial x^l \partial y^{k-l-1}} = 0$. Jde-li o instantánní kmit, položme v okolí libovolného bodu roviny dle rozšířené věty Cauchy-Poincaré, platící všude mimo nejbližší okolí bodu μ

$$\begin{aligned}\xi - \varkappa &= e(u_0 + u_1) + e^2u_2 + e^3u_3 + \dots\\ \eta - \lambda &= e(v_0 + v_1) + e^2v_2 + e^3v_3 + \dots\\ \zeta &= ew_0 \qquad\quad + e^2w_2 + e^3w_3 + \dots\end{aligned}$$

Při tom máme na mysli zejména periodická řešení L a ona první sorty. Tu značí př. eu_0, ev_0, $ew_0 \leqq e$ kmit volný, eu_1, ev_1 vynucený.

Proveďme nyní známé rozpoltění rovnic srovnajíce stejné potence e a značíce

$$u_0 + u_1 = u, \quad v_0 + v_1 = v, \quad K = e\tilde{K}, \quad L = e\tilde{L}.$$

Tím získáme pro první approximaci rovnice

$$\begin{aligned}\ddot{u} - 2n\dot{v} - Mu - Qv &= \tilde{K} + \mu K'\\ \ddot{v} + 2n\dot{u} - Qu - Nv &= \tilde{L} + \mu L'\\ \ddot{w}_0 - Pw_0 &= 0.\end{aligned}$$

Pro druhou etapu počtu

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2 - 2n\dot{v}_2 - Mu_2 - Qv_2 &= K''\mu + \mu M'(u_0 + u_1) + \mu Q'(v_0 + v_1)\\ &+ R_{200}(u_0 + u_1)^2 + R_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) + R_{020}(v_0 + v_1)^2\\ &+ R_{002}w_0^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{v}_2 + 2n\dot{u}_2 - Qu_2 - Nv_2 &= L''\mu + \mu Q'(u_0 + u_1) + \mu N'(v_0 + v_1)\\ &+ T_{200}(u_0 + u_1)^2 + T_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) + T_{020}(v_0 + v_1)^2\\ &+ T_{002}w_0^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{w}_2 - Pw_2 &= P'\mu w_0\\ &+ S_{002}w_0^2 + S_{200}(u_0 + u_1)^2 + S_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1)\\ &+ S_{020}(v_0 + v_1)^2.\end{aligned}$$

Pro etapu třetí

$$\begin{aligned}\ddot{u}_3 - 2n\dot{v}_3 - Mu_3 - Qv_3 &= K'''\mu + \mu M'u_2 + \mu Q'v_2\\ &+ \mu M''(u_0 + u_1) + \mu Q''(v_0 + v_1)\\ &+ 2R_{200}(u_0 + u_1)u_2 + R_{110}[(u_0 + u_1)v_2 + u_2(v_0 + v_1)]\\ &+ 2R_{020}(v_0 + v_1)v_2 + 2R_{002}w_0w_2\\ &+ \mu R'_{200}(u_0 + u_1)^2 + \mu R'_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) + \mu R'_{020}(v_0 + v_1)^2\\ &+ \mu R'_{002}w_0^2\\ &+ R_{300}(u_0 + u_1)^3 + R_{210}(u_0 + u_1)^2(v_0 + v_1) + R_{030}(v_0 + v_1)^3\\ &+ R_{120}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1)^2 + R_{102}(u_0 + u_1)w_0^2 + R_{012}(v_0 + v_1)w_0^2\\ &+ R_{003}w_0^3\end{aligned}$$

$$\ddot{v}_3 + 2n\dot{u}_3 - Qu_3 - Nv_3 = L'''\mu + \mu Q'u_2 + \mu N'v_2$$
$$+ \mu Q''(u_0 + u_1) + \mu N''(v_0 + v_1)$$
$$+ 2T_{200}(u_0 + u_1)u_2 + T_{110}[(u_0 + u_1)v_2 + u_2(v_0 + v_1)]$$
$$+ 2T_{020}(v_0 + v_1)v_2 + 2T_{002}w_0w_2$$
$$+ \mu T'_{200}(u_0 + u_1)^2 + \mu T'_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1) + \mu T'_{020}(v_0 + v_1)^2$$
$$+ \mu T'_{002}w_0^2$$
$$+ T_{300}(u_0 + u_1)^3 + T_{210}(u_0 + u_1)^2(v_0 + v_1)$$
$$+ T_{120}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1)^2 + T_{030}(v_0 + v_1)^3 + T_{102}(u_0 + u_1)w_0^2$$
$$+ T_{012}(v_0 + v_1)w_0^2 + T_{003}w_0^3$$
$$\ddot{w}_3 - Pw_3 = \mu P''w_0 + P'\mu w_2$$
$$+ \mu S'_{002}w_0^2 + \mu S'_{200}(u_0 + u_1)^2 + \mu S'_{110}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1)$$
$$+ \mu S'_{020}(v_0 + v_1)^2$$
$$+ 2S_{002}w_0w_2 + 2S_{200}(u_0 + u_1)u_2 + S_{110}[(u_0 + u_1)v_2$$
$$+ (v_0 + v_1)u_2] + 2S_{020}(v_0 + v_1)v_2$$
$$+ S_{300}(u_0 + u_1)^3 + S_{210}(u_0 + u_1)^2(v_0 + v_1)$$
$$+ S_{120}(u_0 + u_1)(v_0 + v_1)^2 + S_{030}(v_0 + v_1)^3$$
$$+ S_{102}(u_0 + u_1)w_0 + S_{012}(v_0 + v_1)w_0^2 + S_{002}w_0^3.$$

Jsou tedy typy diferenciálních rovnic stále tytéž lineární s konstantními coeficienty a druhým členem (Euler). — Na základě těchto approximačních kroků přehlédneme ihned, že obecná křivka *divisorů v rovině* v mé práci předem a beze zvláštních explicitních počtů správně udána ve tvaru (D. p. 419) pro všecka k, neboť levé strany rovnic právě uvedených zachovávají týž tvar ve všech etapách. I měl jsem tyto levé strany na mysli podotýkaje *D. p.* 415, že stačí pro celý počet řešiti jednou pro vždy rovnice tvaru něco obecnějšího.

Dle toho rozvinují se tedy coeficienty přesně ve tvaru

$$A_k = A_{k_1}e + A_{k_2}e^2 + A_{k_3}e^3 + \ldots$$

Pokud tkne se vzorce obecného, zní (16) p. 417.

$$x = a - \varkappa + G \cos\text{hyp}\, h_1 t + H \sin\text{hyp}\, h_1 t + E \cos\text{hyp}\, h_2 t +$$
$$+ F \sin\text{hyp}\, h_2 t + \sum_1^\infty A \cos knt + \sum_1^\infty B \sin knt + \ldots$$
$$y = b - \lambda + G' \cos\text{hyp}\, h_1 t + H' \sin\text{hyp}\, h_1 t + E' \cos\text{hyp}\, h_2 t +$$
$$+ F' \sin\text{hyp}\, h_2 t + \sum_1^\infty C \cos knt + \sum_1^\infty D \sin knt + \ldots$$
$$z = R \cos\left(t\sqrt{\frac{1}{\overline{\overline{\varrho_1^3}}} + \frac{\mu}{\overline{\overline{\varrho_2^3}}}} + S\right) + \ldots,$$

přirozeně je zde $\overline{\overline{\varrho}}_1 = \varrho_1$ ($z = o$, $e = o$), neboť se dle obou argumentů rozvíjí! Z celého postupu vidno, že v obecném případě jsou pravé strany řady Fourierovy obsahujíce členy následujících kategorií:

1. Kmity volné od e explicitě neodvislé, argumentů ikh_1t, ikh_2t.

2. Kmity vynucené závislé na e explicitně, argumentů knt.

3. Koëxistenční vynucené, argumentů $(ilh_1 + imh_2 + kn)t$, kdež $l, m, k =$ celá čísla a $i = \sqrt{-1}$.

Omezme se jako v mém článku (D.) p 424. na první etapu počtu, zanedbávajíce $e^2 \doteq \xi e \doteq \xi^2$, pak kategorie (3) odpadá i vidno, že správné je moje tvrzení, D. p. 418., že excentricitou dráhy vynucené kmity jeví se obecně jako termy ryze trigonometrické periody oběhu planety.

Slovům D. p. 417. „v obecném případě" je patrně rozuměti, „v libovolném bodě roviny."

Vzorec (16) psán ve formě kondensované, implicitní a jistým nedopatřením při tisknutí práce se stalo, že opomenuty znaky $+ \ldots$

Kritika, na níž odpovídám v odstavci 4. vznikla falešnou interpretací tohoto omylu.

Jaký důsledek plyne ze vzorců těchto pro nové metody nebeské mechaniky vyloženo zevrubně v mojí práci druhé (C). V citovaném článku (D) shrnuty tyto konsekvence a aplikovány jediné na případ L jakožto ideální a nejjednodušší typ řešení periodických.

Jako v obecném případě existují dvě sorty řešení, sorta první hustě setá ($e = o$) a sorta druhá ($e \neq o$) extrémně řídká, tak lze v případu L mluviti o kruhu a ellipse Lagrangeově. Jedná-li se specielně o úlohu variační, lze v druhém případu studovati tyto variace pomocí diferenciálních rovnic lineárních s koeficienty *periodickými*, neboť varírovaná generatrix je *pohyblivé centrum*, a rovnice nemají vůbec druhého členu (cesta II). Naproti tomu v případu kruhu Lagrangeova jedná se pak o volné oscilace kombinované s vynucenými kmity a specielně pro $u_0 = v_0 = o$, o kmity ryze vynucené u_1, v_1. Generatrix je tu *pevné centrum* a rovnice mají druhý člen, studium variací *nutno* tu prováděti v etapách aproximačních, z nichž každá skýtá diferenciální rovnice lineární s koeficienty *konstantními* a druhým členem povahy periodické (Euler) (cesta I.)

Je patrno, že v obou případech I. a II. jsou i tvar rovnic i funkcionální forma coeficientů neznámých *od sebe rozdílné.* I je zejména *naprosto vyloučeno* při cestě I. čítati pomocí rovnic typu Floquet jako při cestě II., neboť i variace koordinat mají zde zcela jiný význam obsahujíce vedle kmitů obdobných cestě II. ještě kmity seřazené dle potencí excentricity. Při řádovém seřadění dle e^k nutno přibrati v každém kroku též příslušné členy tak zv. druhého členu. *I vycházely by pak pro členy určitého stupně v e^k výsledky obsahující členy stupňů také jiných.* — Jak jsem uvedl šlo ve stati (D) především o explicitní nalezení ryze vynucených kmitů (u_1, v_1) a to jak (D. p. 424) uvedeno až na veličiny řádu druhého (e^2, $e\xi$, $\xi^2 \ldots$). Patrně za tím účelem, abych srovnal obě řešení periodická (tedy spec. $u_0 = o$), neboť se mi zdálo též z hlediska metod Poincarého interessantním objasniti, proč řešení je jen jedno, proč síla řádu $\mu\ e$ vynucuje jen existenci periodického řešení řádu e a nikoli snad také řešení řádu μe D. p. 419, 420 nejhořeji.

Nežli přejdu ke kritice domácí, zmíním se o zahraniční. Na základě mého pojednání o Darwinových satellitech, jal se prof. Charlier z Lundu, vynikající astronom Švédský, pochybovati o platnosti svojí theorie stability centra Merkurova*), již vyšetřoval se zanedbáním excentricity. Patrně na jeho popud vznikla práce mathematika Henryka Blocka**), jež příslušnou otázku náležitě objasnila. Týž, ač tedy otázka jím diskutována týká se zejména kategorií kmitových a dle (J. 2. p. 324 nesouvisí vlastně s mou prací a specielně s mým něco zobecněným důkazem věty Lagrangeovy, uznal za dobré výslovně uvésti, že podává mezi jiným také *modifikaci mojí metody l. c. p.* 6). Že jako dokonalý odborník porozuměl okamžitě i mojí brachylogii, která nevšímajíc si členů vyššího řádu e, udává hned uhodnutý výsledek pro křivky $k > 1$, o tom svědčí jeho poznámka: „Il se sert de *développements* suivant les puissances de l' excentricité.“ *l. c. p.* 1,

*) Astron. Nachr. Bd. 193, 15.

**) H. Block Sur la stabilité d'une petite planète aux points triangulaires de Mercure. Arkiv för Math., Astronomi och Fysik Band 10. nro 4. 1914.

tedy *plural*. Aniž tedy připouští, že explicitně neprovedené počty pro další potence dávaly by výsledek falešný pro kmity $k = 2, 3 \ldots$

O některých důsledcích theorie zmíněno též K. F. Sundmanem v Enc. d. math. Wiss. Göttingen Bd VI. 2. Heft. 6. *p*. 804. Dále F. Freundlichem v Astron. Jahresbericht 1913 a Fortschritte der Mathematik 1913 Bd. 44. Heft. 3. *p*. 1074—5. Dr. B. Hostinský referoval o práci v České Vědě (1914) způsobem stručným a věcným.

3. Přejdu nyní ke zmínce týkající se článků od K. Petra a V. Nechvíle: Dvě poznámky ku specielnímu případu problému tří těles, Časopis pro pěstování math. a fys. XLVII. 1918 str. 268. Autor nalezl prý v řečené poznámce jiné východisko k řešení otázky a dospěl k přesvědčení, p. 268, že nalezený systém je výhodnějším k účelu mnou sledovanému. Rovnice moje zove pak málo výhodné. Nicméně soudím, že tvrzení toto zakládá se na nedorozumění. Kdežto systém citovaný sestaven především, aby se obešly rozvoje dle excentricity, měl autor na mysli patrně jenom podrobné studium bodů L (kmitových kategorií). Proti tomu — jak vícekráte jsem praecisoval, sledoval jsem sám úkol daleko obecnější a nikoli onen specielní, kromě snad důkazu věty Lagrangeovy. I věřím sotva, že by odvozené rovnice k takovému úkolu byly vhodnější, podotýkaje jenom, že v uvedeném systému dráhy první sorty problémem dané následkem nepřirozené deformace roviny vlastně neexistují a nelze studovaných kmitů isolovati.

4. Pokud týká se recense Svobodovy překvapuje především, že po stránce meritorní jeví naprosté neporozumění.

Tedy kdežto já v odst. 2 J. zřetelně vidím cíl i evoluci ve fundamentální otázce theoretické astronomie — mnou poprvé zřetelně a obecně formulované, jakož i v tam uvedených výsledcích: zejména ve zobecnění systému Darwinova, v metodě sloužící k určení kmitů vynucených, a tím pro specialisaci $u_0 = v_0 = o$ ku přesnému důkazu věty Lagrangeovy, kdežto tedy jedná se o výsledky vnikající hluboko do kořene nových metod Poincaréových — pan recensent zábrán byl výhradně jednotlivostmi, jež ještě naprosto falešně vyložil.

1.) Tak především vytrhnuv z celku závěrečný obrázek a považuje jeho výklad za důkaz Lagrangeovy věty — provázel ho sarkasmem (R. S. p. 41 řádek 12 zdola). Ve skutečnosti měla se věc tak. Veškery snahy i celá metoda celého odstavce 2. D. p. 410—420 a počátku 3. p. 420—423 jak ostatně akcentuji v odst. 2. této stati necílily explicitně k jinému leč k určení vynucených a volných kmitů $u_0 + u_1$, $v_0 + v_1$, to je něco *obecněji* vedený důkaz Lagrangeovy věty, neboť krom elipsy nalézá i její sousedství. Zbýval tedy k důkazu samotné věty malý krok: Provésti především ještě specialisaci $u_0 = v_0 = o$ vzorce (17), kde pochopitelně rozepsány už jen u_1, v_1 (značení srv J odst. 2.) a dále ukázati, že tyto *počtem nalezené* a tedy diferenciálním rovnicím hovící vzorce koincidují s příslušnými koordinatami ellipsy otočené o 60^0 kol bodu $\odot$ t. j. shodují se s ξ, η na str. 422, kdež za ξ_1, η_1 samozřejmě položiti hodnoty (10) D. p. 413.

Jinak řečeno, po výsledcích druhého odstavce (D) bylo třeba vedle zmíněné malé specialisace $u_0 = v_0 = o$ dokázati jenom, že otočená ellipsa Jupiterova koinciduje přesně s výrazy, jež nalezeny byvše v odst. 2 z rovnic diferenciálních pohybových nutně jim hoví a tím větu Lagrangeovu prokazují. Že věci věnován celostránkový obrázek překvapuje dle (J p. 325 jen čtenáře, který s metodami Poincaréovými blíže se nezanášel. Kdo však hledá interpretaci této na pohled nepatrné věci na případech složitých řešení periodických vidí, že tu poprvé zaváděn znázorněním pojem hyblivého centra libračního pro řešení periodická, okolnost důležitá k propracování se pojmů práce druhé (C) i pro moderní metody vůbec.

2.) Na počátku recense domnívá se pan Svoboda, že řešení rovnic à la Floquet (!) bylo mi naznačeno Tisserandem (R. S. p. 38). Ježto tvrzení vzbuzuje zdání, že užil jsem Tisseranda jako vzoru a neuznal snad za vhodno citovati ho, podotýkám následující. Práce Darwinova Acta math. XXI. vyšla rok po smrti Tisserandově 1897. Nemohly tedy rovnice *Darwinovy*, z nichž jsem vyšel a je předem zobecnil býti v Tisserandovi. Rovnice, jež myslí pan Svoboda jsou zcela jiného druhu než moje. Varírují *generatrix pohyblivou* (librační centrum v okolí hmoty), nemají přirozeně druhého členu a připouští patrně jen cestu II. majíce ostatně velmi omezenou platnost na nejbližší okolí hmoty (♃). Vyjda z rovnic podobných nebyl bych tedy mohl nikdy v oboru jich platnosti nalézti křivek ani bodů singulárních — a pan recensent nevědomky prozrazuje, že i zde zaměnil obě cesty, z nichž o cestě I naprosto neměl pojmu (viz dále J. p. 332 ř. 11. zdola).

3.) Pan recensent vidí dále fundamentální meritum v otázce třetí rovnice mnou vhodně zobecněných rovnic Darwinových, neboť o něm pochybuje, velkou řadu pojednání cituje, ba dokonce i p. Hostinského se dovolává. (Poslední odst. R. S. p. 42). Aniž přičítám věci takou důležitost, podotýkám, že skutečně jsem zobecnil rovnice Darwinovy na dosti malý *sklon a excentricitu*, neboť citované prameny př. Moulton podávají sice zobecnění na uvažovaný sklon ne však současně na excentricitu. I nalézám, že pro tento případ excentricita má vliv na sklon teprve v etapě druhé, a daleko ne, že by měla vliv již na etapu prvou, což tvrdí nesprávně pan Svoboda (R S. p. 40 nahoře,) ač *přece tedy nalezl už vše v citovaných* (!!) *pracích* zejména v učebnici Moultonově (!!)

I byla zcela věcná zmínka p. Hostinského, nejvýše, že měla být uvedena vhodněji při referátu o § 3.

Než obraťme se již ke studiu jeho výtek, které mají se týkati obou prací po stránce věcné. Pan Svoboda konkluduje tak (R. S. p. 38—39). Autor vynechal prý za prvé členy $e\xi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\,t$ a dále ξ^2 —, jinak řečeno: zapomněl prý, že coeficienty rovnic (11) (D. p. 414) jsou periodické. V důsledku toho je prý falešný vzorec (16) (D. p. 417) platící prý zhruba jen pro $k = 1$, — a tudíž chybná je i obecná rovnice křivek, zejména počínaje od $k = 2$, a tím padá prý i později publikovaná práce (C). Věc má se takto: Recensent zaměnil obě cesty počtu (J. odst. 2.) domnívaje se, že existuje jenom cesta II. O cestě I. a zejména o celém aproximačním algorithmu J. odst. 2. nezjednal si naprosto informace. Rovnice moje (11) mají druhý člen a tím jakož i výrazy vystupujícími v coeficientech liší se od rovnic myšlených Svobodou.

Zjednodušme na okamžik suposicí $u_0 = v_0 = o$ považujíce za generatrix pevný bod. Pak lze se též postaviti na stanovisko algoritmu Poincarého řešení periodických, jichž existence tu patrná. Týž vyžaduje přesnou dekomposici a seřadění dle potencí parametru μ (zde e). Ježto pak periodické členy v našich diferenciálních rovnicích, pokud vůbec vystupují, násobeny pokaždé potencí e, dospějeme nutně ke stejné osnově, co udána v J odst. 2., a jednotlivé aproximace jsou *nevyhnutelně* definovány rovnicemi typu Euler s koeficienty konstantními. (Srv. J. p. 329.).

Řady získané v tomto jakož i v obecném případě libovolného bodu — jsou dle věty Cauchy-Poincaré essencielně konvergentní dle potencí e, takže je naprosto vyloučena uvedená kritikova domněnka, že vzorce moje dávají jen *hrubou aproximaci* pro $k = 1$.

Vizme ostatně jak i v tomto samotném tvrzení recensentově je rozpor. Tvrdí — pokud mluvíme o kroku $k = 1$, že neprávem vynechávám člen prý prvého řádu $\xi e \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} nt$ (R. S. p. 38) ale dále tvrdí, zaražen patrně srovnáním správného výsledku D. p. 420, že přes tuto chybu obdržím aspoň pro $k = 1$ „hrubou aproximaci.“ (R. S. p. 41 řádek 4 zdola). Arciť je *přesná* aproximace proto správná, že člen jako řádu druhého (ξ samo řádu e) — právem *nutno* vynechati.

Dle odst. 2. J. je ihned zřejmo, proč vynechány ξ^2 a současně $e\xi$. Pravím-li tedy v textu německém, (U. p. 211.) a v českém (D. p. 424) že je vynechávám, leží důvod v tom, že jsem nechtěl mimo první, další aproximace prováděti pro stručnost, — zejména pak není pravdou, jak pan recensent věří, že by přibrání také těchto členů v etapách dalších nebylo možné. Každý čtenář pohlédna na odst. 2. J pozná okamžitě, že celá práce provedena explicitně jen pro etapu prvou. Že ostatně odborníkům moje brachylogie stačila, vidno z poznámky Blockovy (J. odst. 2., která výslovně podotýká, že míním rozvoje dle *mocností* excentricity. Nevyložil tedy proto práci falešně aniž připouští, že by dávala výsledek nesprávný pro $k = 2, 3$.

Pana Svobodu arci omlouvá trochu nejasná stylisace jakož i nedopatření tiskové (J. odst. 2. p. 328.) uvedené.

Řady (16) jsou ovšem Fourierovými jak recensent praví — ale v případu mnou fixované etapy první vypadají skutečně tak, jak já nalézám. Viz (J. odst. 2. p. 328.).

Poznámka Svobodova, že zanedbáním periodických členů vynechávám členy řádu μe R. S. p. 40 řádek 15 shora — je dle celého odst. 2. (J.) nesprávná, neboť zanedbané termy periodické jsou násobeny kmitem instantánním a tedy řádu e^2.

Rovnice pro A_k (R. S. str. 40 dole) daleko není recensentem uvedeného tvaru nýbrž A_k rozvíjí se dle odst. 2. ve formě

$$A_k = A_{k_1}\, e + A_{k2}\, e^2 + A_{k3}\, e^3 + \ldots$$

při čemž A_{kn} naprosto zůstane nedotčeno každým aproximačním krokem dalším. Jednotlivá A_{kn} jsou dána vždy rovnicemi $R A_{kn} = T_n$, kdež R je totéž pro všechny kroky (naše rovnice křivková). Proto je tvrzení o nesprávnosti podmínky resonanční zcela jalové.

Poznámka o řešení rovnice pro ζ (R. S. p. 40 nejhořeji) dokazuje, že pan recensent nerozeznává tak řečených poruch různých řádů theorií klasických (ζ samo řádu e). Vzorec je přirozeně přesný pro etapu první, jižjsem jediné sledoval v práci (D). Zavedení snad nového znaku, máme li samozřejmě za závorku dosaditi konstantu, zdá se mi jen stěžováním lektury. Pan Svoboda užívá ostatně nevědomky po mně závorky, jako znaku dosazení konstanty, jenž je v podobném případě i obecně běžný i z D. p. 179 (1) a D. p. 180 řádek 13 z dola patrný (Srv. J. odst. 2. i dále p. 332 odst. 3.).

Poznámka o řešení rovnice II. stupně (R. S. str. 41 nahoře) je ve Svobodově recensi zcela nemístná.*)

Obecná řešení (16) D. p 417. nejsou chybná, jak praví R. S. p. 41 řádek 5 z dola, nýbrž přesná. Pan recensent mýlí se tu stejně jako R. S. p. 39 řádek 13 z dola, ježto tvrzené dosazení ve skutečnosti neprovedl. Výsledky koincidují dle J. odst. 2., p. 328 s tvrzením Svobodovým v první etapě počtu, jež v mém článku

*) Uvedená formule je rovnicí jedné z velkého počtu objevených křivek, udanou vlastně v paranthesi. Pro tuto křivku $\mu = 0{\cdot}001$ udány dva tvary, jeden obecný, správný, druhý omylem falešně zkrácený, současně výslovně podotčeno, že příslušný obraz zjednán z formule první t. j. správné Jen tím, že dle falešné formule nečítáno, ušla chyba pozornosti, jinak byla by se prozradila, an dle principu kontinuity jednotlivé křivky každou sousední průběhem počtů kontrolovaly. Na přehlédnutí byl jsem ostatně během tisku upozorněn prof. Koboldem z Kielu, dříve než Svobodou. Vyjme-li tedy kritik z práce obsahující tolik pracných numerických počtů, v níž čítáno na 100 různých formulí, — jednu nepoužitou, chce tím patrně dokázati, či vzbuditi zdání, že *proto* všechny ostatní křivky „neexistují"!

(D.) jediné explicitně prováděna. Vypočty, obdržené ve vzorcích (17) (p. 420. D.) shodují se nutně s výrazy ellipsy Lagrangeovy, I nebyly z ní vzaty, nýbrž provedeno srovnání s výsledkem zjednaným metodou instantánních kmitů (D odst. 2. p. 410—20) — a tím podán důkaz Lagrangeovy věty a to pro celé okolí bodu L. Ve specielním případu $u_0 = v_0 = o$, samo sebou bylo lze srovnati přímo s Lagrangeovou ellipsou, otočenou o 60^0 a stačilo to provésti tím spíše, že i případ event. srovnaného výsledku cesty II. J. p. 328 vyžaduje dle známé věty Moultonovy Amer. Journ. of. Math. vol. XXXIII. p. 63, vyšetření téhož determinantu, (t. j. rovnice nalezených resonančních křivek).

Soudí-li pan Svoboda (R. S. p. 42 řádek 6 shora), že výsledek není nový, tu se mýlí jen proto, že nemá příslušné představy o složitých periodických řešeních obecných. Tak Charlier dobře ocenil pro svou theorii centra Mercurova L_4, že nebylo nalezeno př. nějaké řešení řádu 1000kráte menšího (μc), jakož i ohrožení stability následkem bezprostřední blízkosti křivky $k = 1$ Srv. J. konec odst. 2.

Odvozenou větu bylo nutno *zvláště vytknouti*, neboť platí pamětihodně pro L, ale jak z metody patrno daleko neplatí pro všechna řešení periodická, což až dosud všichni autoři neprávem mlčky předpokládali.

Shrna ještě jednou výsledky recense Svobodovy uzavírám, že recensent následkem neinformovanosti o metodě approximační jakož i významu a metodě cesty I, chybně vyložil implicitně psanou formuli (16) (D. p. 417), (v níž chybělo nad to $+ \ldots$) — a jež je tak důležitá, že př. v práci německé (C.) z důvodů formálných ani uvedena není, — zaměniv krom toho obě uvedené cesty I. a II., jichž zásadní různosti si neuvědomil.

Ježto pak průpočet etap, v odst. 2. J, jasně ukazuje, kterak levé strany zachovávají týž tvar, patrno, že rovnice křivek pro jednotlivá k je přesně — arciť skoro bez počtu uvedena — i je dle toho změniti illusorní tvrzení obsažená v úvodním odstavci recense Svobodovy, že druhá práce by „postrádala smyslu."