Pozorovatel	Methoda	δ	Pravdě-podobná chyba
Maskelyne 1774–1776	Přítažlivost horstva	4·7	
Carlini 1824	Kyvadlo na vrchu a paty hory	4·84	
Airy 1836	Měření v důlu	5·48	
Cavendish 1798	Kyvadlo horiz.	5·48	
Reich 1852	"	5·48 – 5·58	
Baily 1846	"	5·675	
Cornu a Baille 1873	"	5·50—5·56	
V. Boys 1887–1894	Kyvadlo malých rozměrů, křemenové vlákno	5·527	
Pater Braun 1886–1894	Kyvadlo malé ve vakuu	5·527—5·528	
Poynting 1878, 1891	Váhy	5·4934	
Jolly 1881	Váhy s dlouhými závěsy	5·692	± 0·068
Wilsing 1887	Vahadlo	5·594	± 0·032
Wilsing 1889	"	5·577	± 0·013
Richarz a Krigar-Menzel 1884—98	Váhy s krátkými závěsy	5·505	± 0·009

Poznámka o některých integrálech omezených.

Sdílí

M. Lerch,

professor university ve Fribourgu švýcarském.

Buď C oblouk určité křivky, a znamenejme $\varphi(z)$ funkci komplexní proměnné z, která se na oblouku C chová pravidelně a hoví podmínce

$$(1) \qquad \int\limits_C \varphi(z)\,dz = 0.$$

Je-li pak $f(z)$ funkce mající svoji realnou část kladnou na všech místech oblouku C, bude existovati integrál

$$(2) \qquad J = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x} \int\limits_C e^{-xf(z)}\,\varphi(z)\,dz,$$

poněvadž funkce proměnné x

$$\int\limits_C e^{-xf(z)}\,\varphi(z)\,dz$$

mizí pro $x = 0$.

Béře-li se ohled k podmínce (1), lze psáti integrál (2), jak následuje

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x} \int\limits_C (e^{-xf(z)} - e^{-x})\,\varphi(z)\,dz,$$

aneb, po obrácení pořádku integračního,

$$J = \int\limits_C \varphi(z)\,dz \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xf(z)} - e^{-x}}{x}\,dx;$$

poněvadž však

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xf(z)} - e^{-x}}{x}\,dx = -\log f(z),$$

vyjde

$$(3) \qquad J = -\int\limits_C \varphi(z) \log f(z)\,dz.$$

V tomto vzorci volme $\varphi(z) = 1$, $f(z) = -\log z$ a za čáru C volme kruh mající střed v počátku a vycházející z bodu z_0, při čemž komplexní veličina z_0 má svoji absolutní hodnotu menší jedné. Za těchto okolností podmínky theorému jsou splněny a bude pak integrál (2) míti hodnotu

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_C e^{x \log z}\, dz = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_C z^x dz\,;$$

avšak integrál

$$\int z^x dz$$

má ve tvaru neurčitém hodnotu $\frac{z^{x+1}}{x+1}$, a v našem případě bude na horní mezi tato zníti

$$\frac{z_0{}^{x+1} e^{2\pi i(x+1)}}{x+1}.$$

Tudíž

$$\int_C z^x dz = \frac{e^{2x\pi i} - 1}{x+1} z_0{}^{x+1},$$

a integrál J zní v našem případě

$$\mathrm{J} = z_0 \int_0^\infty \frac{e^{2x\pi i} - 1}{x(x+1)} z_0{}^x dx,$$

a znamenáme-li

$$z_0 = e^{-a},$$

takže a značí veličinu, jejíž realná část je kladná, bude lze tento výraz psáti

$$\mathrm{J} = e^{-a} \int_0^\infty \frac{e^{2x\pi i} - 1}{x(x+1)} e^{-ax} dx.$$

Podle vzorce (3) má týž integrál hodnotu

$$\mathrm{J} = -\int_C \log \log \frac{1}{z}\, dz$$

aneb, klademe-li $z = e^{-a+ix}$,

$$\mathrm{J} = -ie^{-a} \int_0^{2\pi} \log(a - ix)\,.\, e^{ix} dx.$$

Porovnáme-li tento výraz s posledním tvarem integrálu J, obdržíme

$$(4) \quad -i\int_0^{2\pi} \log(a - ix) \,.\, e^{ix} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{2x\pi i} - 1}{x(x+1)} e^{-ax} dx.$$

Vztah tento je platným pro všecky hodnoty a s kladnou částí realnou.

Abychom jej uvedli na tvar realný, předpokládejme

$$a = u + \pi i,$$

kde u je realné a kladné; tu obdržíme především

$$-\int_0^{2\pi} \log(u + \pi i - ix)\, e^{ix} dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x\pi}{x(x+1)} e^{-ux} dx,$$

a upravíme-li levou stranu pomocí substituce $x = z + \pi$, vyjde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(u - iz) \,.\, e^{iz} dz = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x\pi}{x(x+1)} e^{-ux} dx.$$

Užijeme-li v levo výrazů

$$\log(u - iz) = \frac{1}{2}\log(u^2 + z^2) - i \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{u},\ e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

obdrží vztah náš tvar elegantnější

$$(4^*) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\cos x \log(u^2 + x^2) + 2 \sin x \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{u}\right] dx \\ &\qquad = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin x\pi}{x(x+1)} e^{-ux} dx\ ; \end{aligned} \right.$$

vzorec tento platí pro všechna kladná u.

Z rovnice této možno odvoditi mocninový rozvoj funkce

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x\pi}{x(x+1)} e^{-ux} dx,$$

užije-li se řad

$$\log(u^2+x^2) = 2\log u + \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu}}{\nu\,.\,u^{2\nu}},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{u} = \frac{x}{u} - \frac{x^3}{3u^3} + \frac{x^5}{5u^5} - \frac{x^7}{7u^7} + \dots.$$

Tu bude potřebí znáti integrály

$$\int_0^\pi \cos x\,.\,x^{2\nu}dx, \qquad \int_0^\pi \sin x\,.\,x^{2\nu+1}dx,$$

jež mají hodnoty

$$(-1)^\nu(2\nu)!\left[2 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{\nu-1}\pi^{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}\right],$$

resp.

$$(-1)^\nu(2\nu+1)!\left[2 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^\nu\pi^{2\nu}}{(2\nu)!}\right].$$

Znamenáme-li tedy k vůli stručnosti

$$\lambda_\nu = 2 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^\nu\pi^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

$$\lambda_0 = 2,$$

bude

$$\int_0^\pi \cos x\,.\,x^{2\nu}dx = (-1)^\nu(2\nu)!\,\lambda_{\nu-1},$$

$$\int_0^\pi \sin x\,.\,x^{2\nu+1}dx = (-1)^\nu(2\nu+1)!\,\lambda_\nu,$$

načež uvažovaný rozvoj bude zníti

$$2\int_0^\infty \frac{\sin x\pi}{x(x+1)}e^{-ux}dx = -\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(2\nu)!}{\nu u^{2\nu}}\lambda_{\nu-1} + 2\sum_{\nu=0}^\infty \frac{(2\nu+1)!\,\lambda_\nu}{(2\nu+1)u^{2\nu+1}}$$

aneb po krátké redukci

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x\pi}{x(x+1)}e^{-ux}dx = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(2\nu)!\,\lambda_\nu}{u^{2\nu+1}} - \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(2\nu+1)!\,\lambda_\nu}{u^{2\nu+2}},$$

při čemž konvergence vyžaduje $u > \pi$.