Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda
O některých základních úlohách nové geometrie

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 1--9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109085

O některých základních úlohách nové geometrie.

Napsal

Dr. **Ant. Sucharda**, t. č. ve Štrasburku.

1. V seminárních cvičeních, jež se v letním běhu r. 1899. konala řízením prof. Dra Th. Reye na universitě Štrasburské, a jichž mi bylo dopřáno se účastniti, přišla na přetřes také otázka, uvésti dvě recipročné rovinné soustavy, nebo dva recipročné prostorové svazky v polohu involuční. Povím v krátce, proč jsem si dovolil promluviti na tomto místě o těchto úkolech v podstatě známých. Obracím se napřed k prvému z nich.

Buďtež A A′ roviny daných soustav, bodům a b c d roviny A buďtež recipročně přidruženy přímky A' B' C' D' roviny A′. Jest známo, že tyto dvě soustavy recipročné v polohu involuční uvádějí se takto: Vyhledáme především k úběžné přímce U_∞ roviny A příslušný bod u' roviny A′, podobně k úběžné přímce U'_∞ roviny A′ příslušný bod u v rovině A. Tyto body u u', tak řečená *centra* oněch dvou soustav rovinných, z pravidla leží v konečnu. Jest patrno, že kdyby jeden z nich byl bodem úběžným, byl by jím i druhý a úloha obecně nebyla by řešitelna.

Úběžným bodům $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$ $\mathfrak{c}_\infty$ ... roviny A, ležícím na paprscích $\overline{ua}$ $\overline{ub}$ $\overline{uc}$ ... přísluší v rovině A′ paprsky $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$ $\mathfrak{C}'$ ... svazku u', s přímkami A' B' C' D' rovnoběžné. Nabýváme takto dvou promětných svazků paprskových

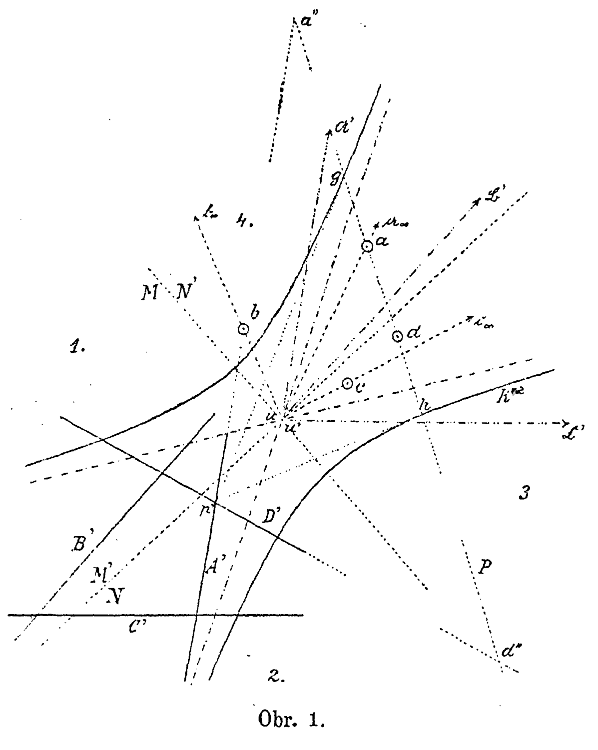
$$u\,(\mathfrak{a}_\infty\ \mathfrak{b}_\infty\ \mathfrak{c}_\infty \ldots) \barwedge u'\,(\mathfrak{A}'\ \mathfrak{B}'\ \mathfrak{C}' \ldots),$$

jež nutno uvésti v polohu involuční.

K tomu třeba především sjednotiti jejich roviny i jejich středy a pak jeden z obou svazků tak kolem společného středu otočiti, aby se sjednotila pravoúhelná dvojina paprsková M N

jedné soustavy s pravoúhelnou dvojinou M' N' soustavy druhé, arci tím způsobem, aby splynulo M s N' a M' s N. Obdržené takto dvě přímky jsou potom osami vzniklé polárné soustavy a příslušné direkční kuželosečky K^2, jež má ve dvojných paprscích involuce o středu $u \equiv u'$ své asymptoty.

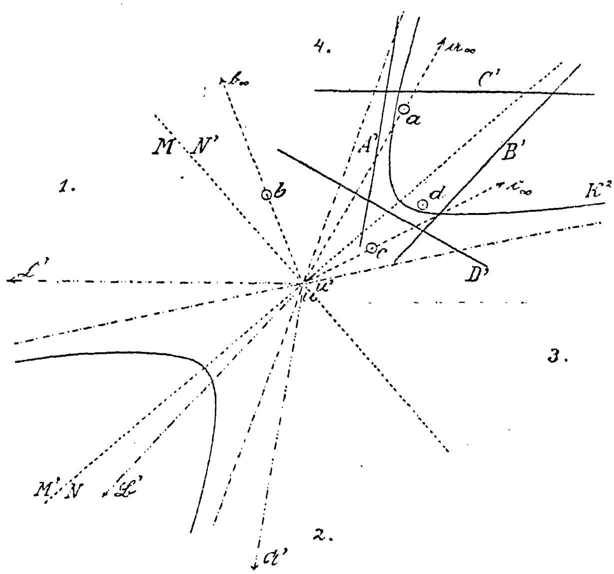
Poněvadž dva rovinné prometné paprskové svazky 1. stupně lze *dvojím* způsobem uvésti v polohu involuční, zdálo by se, že má úkol předložený pouze dvě různá řešení. Totéž vyslovuje Fiedler ve své deskriptivní geometrii, vyd. II., pag. 657. Naproti tomu poznamenává prof. Reye ve své knize, vyd. III., 2.



Obr. 1.

díl, pag. 268. bez důkazu, že úkol předložený má *čtyři* různá řešení. Okolnost tato zdála se mi dosti zajímavou, abych tuto provedl důkaz řečeného tvrzení, jehož prof. Reye v rozhovoru seminárním jen zběžně se dotkl, a abych přičinil ještě některé skrovné poznámky. Soudě, že není od místa, podpírati správnost úvah theoretických přiměřenou konstrukcí, přičiňuji tuto také příslušné obrazce. (Obr. 1.)

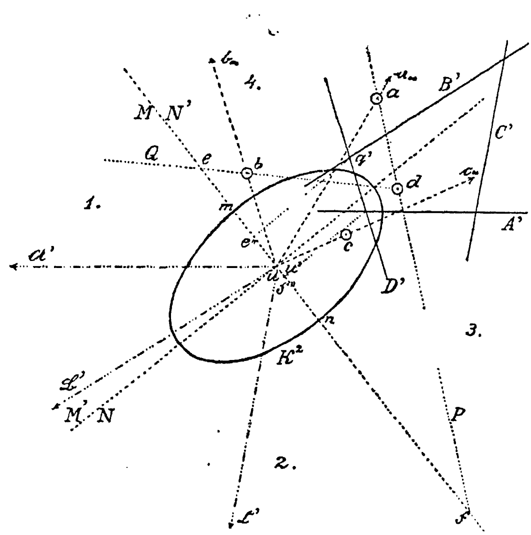
Každý z nich vyjadřuje jedno řešení úlohy svrchu vytčené, vycházeje od týchž dvou recipročných soustav rovinných A ($a\, b\, c\, d \ldots$) A′ ($A'\, B'\, C'\, D' \ldots$), jež pro usnadnění práce předpokládány obě vloženy v rovinu nákresny. Soustava A ($a\ b\ c\ d \ldots$) předpokládána ve všech případech pevnou a pro snazší srovnání zobrazena ve všech čtyřech případech v téže poloze v nákresně. Kdyby šlo pouze o to, řečené prve dva promětné svazky 1. stupně



Obr. 2.

uvésti v polohu involuční, měla by ovšem úloha jen dvě různá řešení. Jedno záleží v tom, že svazky v rovině tak na sebe přiložíme, aby jejich středy $u\ u'$ splynuly a jeden z obou že pak v rovině té kol $u \equiv u'$ otočíme tou měrou, aby M na N', M' na N připadlo. Druhé řešení liší se od prvého tím, že jeden z obou svazků, na př. u', napřed kolem některého jeho paprsku jako osy o plošný úhel 180^0 do jeho roviny sklopíme, a pak teprve otočením ve společné rovině kol středu $u' \equiv u$ M s N' a M' s N sjednotíme. Lze tedy polohy této nabyti přímo z prvé polohy involuční, oklopíme-li paprsek u' o plošný úhel 180^0 kol M nebo N z roviny společné zase do této roviny.

V úkolu předloženém jest úvaha složitější. Třeba zde totiž povážiti, že recipročné soustavy dány byly čtyřmi čtveřinami prvků příslušných, jichž svazky u u' nejsou postačujícím representantem. Skládajíce tedy tyto svazky v polohu involuční, mějme také ještě na zřeteli řečené dvě čtveřiny prvků původně daných, nebo, co postačí, jedinou jen dvojici jejich, na př. a A'. Abychom poznali, že tu opravdu dlužno rozeznávati čtyři různé případy,



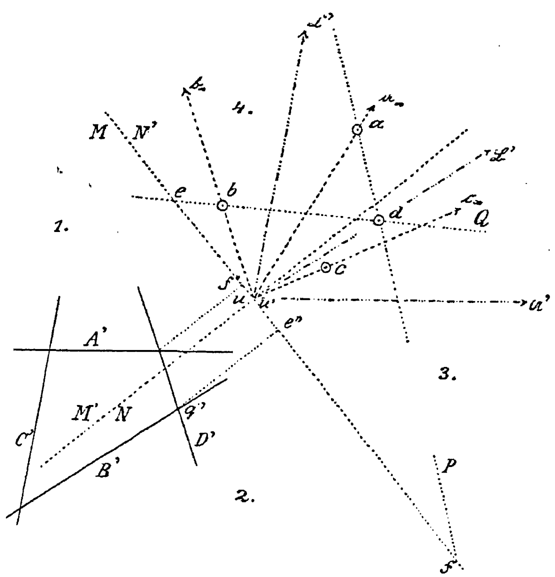
Obr. 3.

označme kvadranty, způsobené paprsky k sobě kolmými $M \equiv N$, $M' \equiv N$, jdouce ve smyslu kladných rotací a počínajíce při M, postupně čísly 1 2 3 4. Poznáme takto následující čtyři případy:

Případ I. Svazky o společném středu $u \equiv u'$ složeny tak, že $M \equiv N'$, $M' \equiv N$. Bod a (obr. 1.) jest v kvadrantu čtvrtém, příslušná přímka A' protíná kvadranty prvý, druhý a čtvrtý.

Případ II. (obr. 2.)

Vycházejíce od případu I., otočme svazek u' ve společné rovině kolem společného středu o 180^0. Svazek sám arci tím se nemění, ježto každý polopaprsek splývá s druhou polovinou svého paprsku příslušného,*) involuční poloha obou svazků zůstává tedy také zachována, případ však přece liší se od předešlého. Kdežto totiž bod a zůstává v klidu vzhledem k podmínce svrchu vytčené, tedy v kvadrantu čtvrtém, přímka A' zaujímá nyní polohu k předešlé souměrnou dle bodu $u \equiv u'$, procházejíc kvadranty druhým, třetím a čtvrtým.



Obr. 4.

Případ III. (obr. 3.) obdrží se nyní z prvního, jestliže svazek u' sklopíme kol paprsku M jako osy o úhel 180^0 z roviny společné zase do této roviny. Tehdy budou oba svazky zase v poloze involuční, bod a ovšem zůstane ve své poloze, přímka A' nyní

*) Pro snazší srovnání v obrazcích jen polopaprsky jsou zobrazeny.

však bude protínati kvadranty prvý, třetí a čtvrtý, dle M jsouc souměrná k poloze, již měla v případě I.

Případ IV. (obr. 4.) konečně obdržíme z II. obdobně jako jsme III. obdrželi z případu I. Kdežto bod a zachová svoji polohu, přímka A' bude souměrna vůči stejnojmenné přímce případu II. dle osy M. Bude nyní protínati kvadranty prvý, druhý a třetí.

Čtyřem různým soustavám polárním, jež jsme takto obdrželi, náležejí také čtyři různé direkční kuželosečky K^2. Poněvadž v uvedených čtyřech případech soustava A určená body $a\,b\,c\,d$ předpokládá se pevnou a body tyto vyjádřeny jsou stejnolehlými čtyřmi tečkami, jest na jevě, že též osy $M\,N$ těchto čtyř soustav polárných jsou ve všech čtyřech případech na vzájem rovnoběžny. Jest dále patrno, že jsou-li v případě I. asymptoty reálny, jsou reálny i v II., ježto jsou to tyže dvě přímky, a že jsou v obr. 1. a 2. vyjádřeny čarami střídavě rovnoběžnými. Abychom nabyli příslušných hyperbol direkčních, považme, že libovolnou přímku P, (obr. 1.) určenou body na př. $a\ d$, protínají přímky $A'\ D'$ v bodech $a''\ d''$, tak že určuje se na ní involuční řada bodová ($a\ d.\ a''\ d'', \ldots$), jejíž dvojné body g, h náležejí direkční kuželosečce, která v nich má tečny procházející bodem p', v němž přímky $A'\ D'$ se pronikají. Hyperbola direkční, jejíž asymptoty již známe, jest takto ovšem nadbytečně určena. Nebude snad od místa připomenouti, že mají v případě I. a II. též osy obou direkčních hyperbol na vzájem stejné délky, arci v tom způsobu, že reálná jedné rovná se laterálné druhé a naopak, a stejně dlouhé osy že leží v přímkách rovnoběžných, že tedy hyberboly jsou komplementární. Na důkaz stačí připomenouti, že v případě I. i II. jest $a\ A'$ polem a polárou vůči kuželosečce K^2, a že při pevném a polára v případě II. jest souměrna dle středu $u \equiv u'$ k poláře v případě I. Za těchto okolností musí obě hyperboly býti hyperbolami komplementárními, jak bylo tvrzeno. Co se dotýče případu III., jest arci na jevě, srovnáme-li jej s případem I., že tu asymptoty musí býti imaginárny. Direkční kuželosečka jest ellipsou. Připomeňme, že i osy této ellipsy jsou stejně dlouhé s osami hyperboly z případu II., obsaženými v přímkách rovnoběžných.

Třeba si zase jen povšimnouti, že prvému bodu a v těchto dvou případech příslušejí poláry A' souměrné vůči hlavní ose těchto křivek. Okolnost tato stačí k odůvodnění toho, co jsme o jejich osách právě pověděli.

Jako jsme stanovili na libovolné přímce P (obr. 1.) body g, h, v nichž ji seče direkční kuželosečka, lze body stanoviti i na kterékoli ose této křivky a tím přímo nalézti její vrcholy. Protíná-li (obr. 3.) přímka Q, určená body b, d, osu M v bodě e, třeba jen uvážiti, že této ose přísluší úběžný bod m'_∞ směru k ní kolmého, přímce Q pak průsečík q' přímek B' D'. Sestrojíme-li z něho kolmici ku M, bude tedy její pata již bodem e''. Určíme-li podobně ještě body ff'' užitím přímek $P \equiv \overline{ad}$, A' a D', bude takto v ose M již stanovena bodová involuce $(ee''. ff'', \ldots)$, jejíž dvojné body jsou žádanými vrcholy m, n osy M. V případě III. involuce ta jest hyperbolická, body tyto jsou reálny. Srovnáme-li případ ten se IV. (obr. 4.) a povážíme-li, že body a, b, d místa svého nezměnily, přímky A' B' D' však že jsou souměrny dle středu u se stejnojmennými přímkami případu III., nahlédneme, že v případě IV. k bodům e, f, jež zůstaly pevny, přísluší body e'', f'' souměrné dle středu u s body e'', f'' případu III. Z toho však ihned následuje, že involuce na M tu jest elliptická, vrcholy kuželosečky K^2 imaginárny.

Poněvadž též asymptoty jsou imaginárny, jest direkční kuželosečka v tomto případě imaginárna.

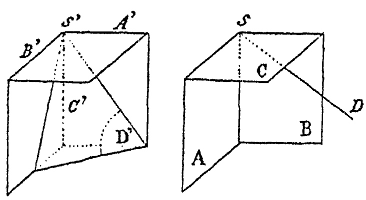
Shrnouce nyní v jedno výsledky obdržené, můžeme tudíž říci: *Dvě recipročné rovinné soustavy lze čtverým způsobem uvésti v polohu involuční, polárné soustavy tak obdržené mají každá jinou direkční kuželosečku. Tato jest dvakráte hyperbolou, potřetí ellipsou, počtvrté kuželosečkou imaginárnou. Hyperboly i ellipsa mají osy navzájem stejné, reálná osa jedné hyperboly rovná se imaginárné ose hyperboly druhé a naopak, takže jsou to hyperboly komplementární.*

2. Obraťme se nyní k následující úloze: Dva recipročné svazky prostorové s s' uvésti v polohu involuční.

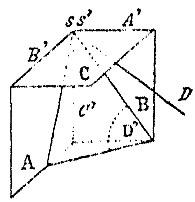
Jak známo, řeší se úkol ten nejsnáze tak, že vyhledáme v těchto svazcích dva homologické trojhrany, jež potom tak na sebe položíme, aby každá hrana jednoho ležela naproti příslušné stěně druhého. Jde tu pak zase jen o to, kolikerým způsobem toho lze docíliti.

Na otázku tuto odpovídá Reye ve své knize II. díl, p. 269, vyd. 3., že *čtverým*, důkazu nepodávaje.

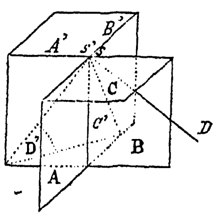
Myslím, že se pravdivost tohoto tvrzení nejsnáze dovodí způsobem následujícím, který dodatečně prof. Reyem také byl schválen. Předpokládejme, že svazek s jest nehybný a v něm že jest řečený pravoúhlý trojhran o stěnách A B C (obr. 5.). Příslušný k němu trojhran svazku s' o hranách $A' B' C'$ znázorněn též v obr. 5. Oba trojhrany zúmyslna kresleny tak, že hrany jejich jen polopaprsky jsou vyjádřeny.



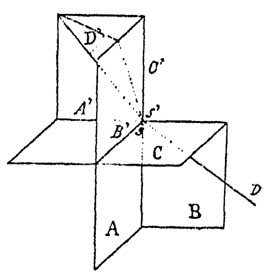
Obr. 5.



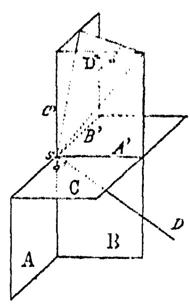
Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.



Obr. 9.

Obraz 6. ukazuje, kterak trojhrany poprvé na sebe jsou přiloženy, aby se vyhovělo požadavku svrchu vytčenému. Ostatní polohy žádanému účelu hovící, znázorněny jsou v obr. 7.—9. a možná jich nejsnáze nabyti tím, že vycházejíce od případu obr. 6. znázorněného, a ponechávajíce prvý trojhran v klidu, druhý otočíme z polohy, již v obr. 6. má, kol jeho hrany C' (obr. 7.) nebo kol B' (obr. 8.) nebo kol A' (obr. 9.) o 180°. V každém z těchto případů nabudou trojhrany vzájemné polohy, jíž se polohou involuční vyhledává. Snadně pak poznáme, že nabývá se tak čtyř různých poloh, jimiž vyčerpávají se veškeré případy tu možné, obrátíme-li při tom též zřetel k jedné dvojici prvků recipročných, na př. k paprsku D svazku s a k reciproční rovině D′ svazku s'. Kdežto paprsek D v nehybném svazku s zůstává v klidu, zaujme rovina D′ jemu příslušná ještě třikráte polohu jinou, otočíc se zároveň se svým trojhranem a ovšem s celým svazkem kol jedné ze tří hran o úhel 180°.

3. Budiž tu do třetice uvedena ještě úloha, dva kollinearné svazky prostorové s s' uvésti v polohu perspektivnou.

Třeba tu, jak známo, nalézti v těchto svazcích dva shodné svazky rovin. Nabývá se jich tím, že se v obou svazcích stanoví fokální osy, jež buďtež nazvány v prvém U V, v druhém U' V'. Čtyřem rovinám A B C D svazku U, jež tak zvolíme, aby bylo A $\perp$ C, B $\perp$ D a aby (A B C D) $= -1$, příslušejí ve svazku U' roviny A′ B′ C′ D′, o nichž platí obdobné relace a jež tedy lze na prvnější tak přiložiti, aby obdobně označené roviny splynuly. Úkolu předloženému tím jest dosti učiněno, a nastává zase jen otázka, kolikerým způsobem toho lze dosíci. Také zde jest odpověď, že *čtverým.* Jest totiž možná docíliti vzájemné polohy žádoucí poprvé tím, že provedeme, co prve bylo řečeno, prohlédajíce k osám U a U', podruhé, že obdobné provedeme vzhledem k osám V a V'. Případ třetí a čtvrtý nastává pak z prvého, resp. druhého, jestliže svazek z elementů čárkovaných složený otočíme kolem společné osy $U \equiv U'$, resp. $V \equiv V'$ o 180°, svazek prvý v klidu ponechajíce. Poněvadž při takovém otočení každá rovina v sebe samu přejde, bude základní podmínce perspektivné polohy pokaždé zase vyhověno, představíme-li si však v některé rovině svazku U' resp. V' libovolnou přímku A' prostorového svazku s', nahlédneme, že po řečeném otočení nabude polohy pokaždé jiné vůči příslušné pevné přímce A svazku s, na důkaz, že vzniklé otočením případy třetí a čtvrtý podstatně od prvých dvou se liší.
