Václav Jeřábek; Jan Roháček

Nové zobecnění teorému o přímce Simsonově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 3, 151--155

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109078`

Nové zobecnění teorému o přímce Simsonově.

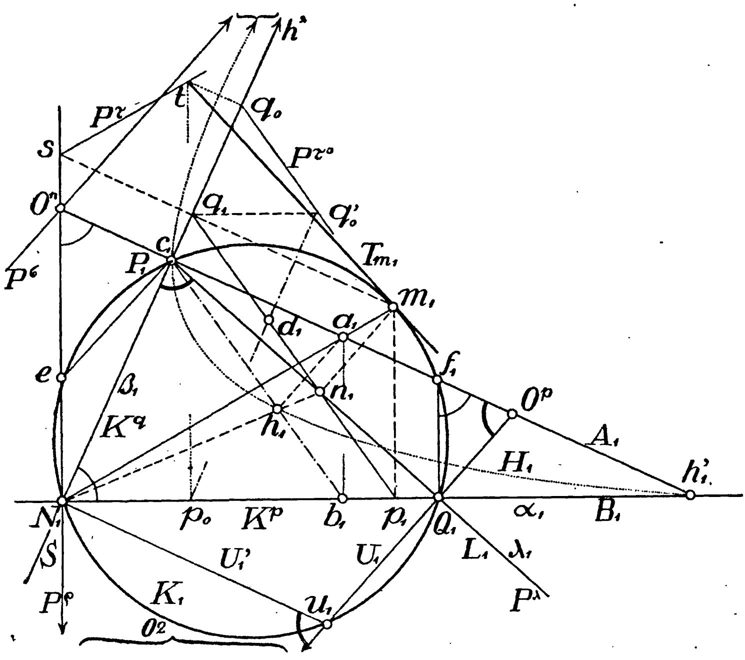
V. Jeřábek a dr. *J. Roháček.*

Opišme danému trojúhelníku $N_1P_1Q_1$ v rovině π jakýkoliv trojúhelník $O^nO^pO^q$. Geom. místem bodu m_1, kterým vedené rovnoběžky m_1n_1, m_1p_1, m_1q_1 se stranami opsaného trojúhelníka protínají strany daného trojúhelníka v bodech n_1, p_1, q_1, které leží na jedné přímce, jest kuželosečka K_1, danému trojúhelníku opsaná.

1. Abychom tvrzení toto dokázali, sestrojme přímku $n_1p_1q_1$, jejíž směr budiž dán zvolenou přímkou P_1b_1, protínající stranu N_1Q_1 v bodě b_1. Protněme stranu trojúhelníka O^nO^p rovnoběžkou $b_1a_1 \parallel O^nO^q$ v bodě a_1. Vedeme-li pak v trojúhelníku $a_1b_1P_1$ příčku $a_1h_1 \parallel O^pO^q$ a spojíme-li její patu h_1 s vrcholem N_1, vytne tato spojnice na straně P_1Q_1 bod n_1 hledané přímky $n_1p_1q_1 \parallel P_1b_1$, která seče stranu N_1Q_1 v bodě p_1 a stranu třetí N_1P_1 v bodě q_1; neboť trojúhelníky $a_1b_1P_1$, $m_1p_1q_1$ jsou podle středu N_1 podobné a podobně položené, jejich příčky $a_1h_1 \parallel m_1n_1$ jsou homologické; leží tudíž bod m_1 hledaného geom. místa na paprsku N_1a_1.

2. Buďtež $A_1 \equiv O^nO^p$, $B_1 \equiv N_1Q_1$ průměty dvou různoběžek A, B určující rovinu ϱ, mající svou stopu $P^\varrho \equiv O^nO^q$; na níž nalézají se stopy O^n, N_1 přímek A a B. Průmětům a_1, b_1 náležejí na přímkách A, B resp. body a, b, jejichž spojnice $ab \parallel a_1b_1$ leží v rovině ϱ. Stanovme nyní přímkou $P \perp \pi$, vedenou v P_1, přímkou B a průmětnou π hyperbolický paraboloid (P, B, π), jehož jedna površka $bc \parallel b_1c_1$ seče přímku P v bodě c, majícím svůj průmět c_1 v P_1. Průmětu h_1 na b_1c_1 náleží bod h površky bc. Přímkou $ah \parallel a_1h_1$ a přímkou A stanovená rovina σ má stopu $P^\sigma \parallel a_1h_1 \parallel ah$ procházející stopou O^n přímky A. Rovina σ seče hyp. paraboloid (P, B, π) v hyperbole H, jejíž jedním bodem je h a tudíž h_1 jedním bodem jejího průmětu H_1. Této hyperbole patří též body, ve kterých přímka A roviny σ protíná řídicí přímky P, B hyp. paraboloidu, z nichž jeden promítá se do P_1 a druhý do průsečíků h_1 průmětů A_1 s B_1.

Stanovme nyní konoid (N, H, π) přímkou $N \perp \pi$, jejíž průmět je ve vrcholu N_1, hyperbolou H a průmětnou π. Tento konoid je stupně třetího, ježto jeho úběžná přímka dvojná má s hyperbolou H jeden bod společný. Proložme přímkami P a Q, z nichž prvá má svůj průmět v bodě P_1, druhá v Q_1, rovinu $\lambda \perp \pi$. Rovina tato, jejíž stopa P^λ spojuje body P_1, Q_1, seče konoid v určité křivce L stupně třetího, mající svou asymptotu v přímce Q a isolovaný bod dvojný, v němž dvojná přímka konoidu protíná rovinu λ. Proložme křivkou L válec $\parallel \pi$, jehož jedna površka $mn \parallel m_1n_1$ prochází bodem n společným konoidu a křivce L. Určíme-li ještě hyp. paraboloid (N, A,



π) přímkami $N \perp \pi$, A a průmětnou π, protne jeho povrchová přímka rovnoběžná s π a mající svůj průmět v N_1a_1 přímku $nm \parallel n_1m_1$ válce v bodě m křivky K společné válci a hyp. paraboloidu (N, A, π). Náleží tudíž bod m_1, ve kterém m_1n_1 a N_1a_1 se sekou, křivce K_1, do níž promítá se křivka K. Křivka K je stupně šestého. Ježto ale úběžným bodem isolovaným křivky L ležícím na úběžné přímce hyp. paraboloidu procházejí dvě přímky válce, které s úběžnou přímkou hyp. paraboloidu splývají, rozpadá se křivka K v řečené dvě přímky a v křivku stupně čtvrtého. Hyp. paraboloid (N, A, π) a válec mají ještě jednu přímku společnou, jejíž průmět prochází bodem N_1 a je rovnoběžný s m_1n_1. Rozpadá se tedy křivka K ještě ve jmenovanou přímku a křivku stupně třetího.

3. Bodem úběžným asymptoty Q křivky K procházející površka válce U leží v nekonečně vzdálené rovině a promítá se do $U_1 \equiv O^p O^q$. Úběžným bodem řídící přímky $N \perp \pi$ hyper. paraboloidu (N, A, π) jdoucí površka U' rovnoběžná s π promítá se do $U'_1 \parallel A_1$ jdoucí bodem N_1. Přímky U, U', ležíce v nekonečně vzdálené rovině, sekou se v bodě úběžném u křivky K, jehož průmět u_1 je v průsečíku průmětů U_1, U'_1. Roviny $(UU_1) \perp \pi$, $(U'U'_1) \perp \pi$ jsou asymptotickými rovinami resp. válce a hyp. paraboloidu, mají společnou přímku $u_1 u \perp \pi$, která je asymptotou křivky K. Promítá se tudíž křivka K rovnoběžně s $u_1 u$ do kuželosečky K_1.

4. *O šesti zvláštních bodech kuželosečky.* Průsečíkem h' přímek A, B prochází společná přímka, rovnoběžná s π, konoidu (N, H, π) a hyper. paraboloidu (N, A, π); její průmět je ve spojnici $N_1 h'_1$. Tato přímka seče přímku Q, stojící v bodě Q_1 kolmo na π, ve společném bodě křivek K, L. Je tedy Q_1 průmětem řečeného bodu a tudíž jedním bodem kuželosečky K_1.

Buď bod f_1 průsečíkem přímky A_1 s přímkou $Q_1 f_1$ vedenou bodem Q_1 rovnoběžně s $a_1 b_1$. Zaujme-li přímka $P_1 b_1$, která je proměnná, polohu přímky $P_1 Q_1$, přijde bod b_1 do Q_1 a bod a_1 po přímce A_1 do bodu f_1. Přímky $a_1 h_1$, $m_1 n_1$ sjednotí se s přímkou s nimi rovnoběžnou, jdoucí bodem f_1, takže bod m_1, pohybující se po K_1, přijde do f_1. Bod f_1 náleží tudíž kuželosečce K_1 a přímka $n_1 p_1 q_1$ zaujme polohu přímky $P_1 Q_1$. Zároveň je patrno, že průsečík řídicí přímky A hyp. paraboloidu (N, A, π) s křivkou K promítá se do f_1.

Přímka A hyperbolického paraboloidu (N, A, π), ležíc v rovině σ, seče přímku $P \perp \pi$ hyp. paraboloidu (P, B, π) v jednom bodě hyperboly H a v témž bodě konoid (N, H, π) a jeho křivku L. Náleží tudíž tento bod křivce K, ježto se v něm protíná jedna přímka hyp. paraboloidu (N, A, π) s jednou přímkou válce, proloženého křivkou L. Promítá se tedy řečený bod do bodu P_1 kuželosečky K_1.

Stopa S hyper. paraboloidu (P, B, π) protíná stopu P^σ roviny σ v bodě h'' hyperboly H, a poněvadž přímka S je zároveň přímkou konoidu, seče rovinu λ v bodě P_1 křivky L. Vedeme-li tedy bodem P_1 površku válce $P_1 e$ rovnoběžně s $m_1 n_1 \parallel mn$, seče tato přímku P^ϱ hyp. paraboloidu (N, A, π) ležící v π v bodě e křivky K i jejího průmětu K_1.

Površkou N hyp. paraboloidu (N, A, π) proložená rovina rovnoběžně s $mn \parallel m_1 n_1$ seče určovací válec ve dvou přímkách, v jedné nad průmětnou π a druhé pod ní; přímky ty mají společný průmět v rovnoběžce vedené bodem N_1 s $m_1 n_1$. První z jmenovaných přímek patří proniku válce s hyp. paraboloidem, jak jsme již dříve poznali, druhá pak seče přímku povrchovou N hyp. paraboloidu v bodě, jenž náleží křivce K. Jeho průmět totožný s N_1

je tedy bodem kuželosečky K_1. Kuželosečka K_1 je tudíž pěti z jmenovaných bodů u_1, Q_1, f_1, P_1, e, N_1 dostatečně určena.

5. *Tečna křivky K_1 v bodě m_1.* Tečna T_m křivky K v bodě m dotýká se v témž bodě válce, proloženého křivkou K kolmo k průmětně π a hyp. paraboloidu (N, A, π), který má s válcem společnou křivku K. Průmět T_{m_1} tečny T_m je tečnou kuželosečky K_1 v bodě m_1 a lze ji známým způsobem sestrojiti. Abychom určili stopu t tečny T_m, položme tečnou T_m a příslušnou površkou hyp. paraboloidu (N, A, π) rovnoběžnou se svým průmětem N_1m_1 tečnou rovinu τ a sestrojme v ní přímku ms paraboloidu, jejíž průmět m_1s je rovnoběžný s A_1. Stopu s přímky ms na stopě $S \equiv N_1O^n$ vytíná $m_1s \parallel A_1$. Stopa $P^\tau \parallel N_1m_1$ jdoucí bodem s protíná T_{m_1} v hledané stopě t tečny T_m.

6. *O obalové křivce proměnné přímky p_1q_1.* Položme přímkou B_1 rovinu $\alpha \perp \pi$ a spojnicí N_1P_1 rovinu $\beta \perp \pi$. Mění-li bod m na křivce K svou polohu, vytvoří přímka $mp \parallel m_1p_1$ plochu válce jednoho a $mq \parallel m_1q_1$ plochu válce druhého. Obě tyto válcové plochy jsou tedy křivkou K rovnoběžně s π proložené. Bod p v rovině α popíše křivku K^p a bod q v rovině β křivku K^q. Současně přímka $pq \parallel p_1q_1$ vytvoří zborcenou plochu, jejíž řídícími útvary jsou: K^p, K^q a π. Průmět p_1q_1 proměnné površky $pq \parallel p_1q_1$ obaluje křivku D_1, jež je průmětem obrysové křivky D plochy zborcené. Tečnou T_m křivky K a površkou mq je stanovena tečná rovina válce (K, K^q) v bodě m a poněvadž T_m má svoji stopu v t je $tq_0 \parallel m_1q_1 \parallel mq$ stopou této tečné roviny a bod q_0, v němž protíná stopu roviny β, stopou tečny qq_0 křivky K^q v bodě q. Podobně se určí stopa p_0 tečny pp_0 křivky K^p v bodě p přímkou $tp_0 \parallel m_1p_1 \parallel mp$ na stopě roviny α. Položme přímkou pq a tečnou qq_0 rovinu tečnou τ_0 v bodě q ke zborcené ploše. Stopa $P^{\tau 0}$ této roviny prochází bodem q_0 a je rovnoběžná s $p_1q_1 \parallel pq$. V rovině τ^0 veďme nyní bodem q přímku qq'_0, jejíž průmět $q_1q'_0$ je rovnoběžný s průmětem p_1p_0 tečny pp_0 křivky K^p v bodě p. Průmět $q_1q'_0$ vytíná na $P^{\tau 0}$ stopu q'_0 přímky qq'_0. Přímkami pp_0, qq'_0, z nichž první dotýká se plochy zborcené v bodě p a druhá v bodě q a průmětnou π stanovme hyperbolický paraboloid, dotýkající se plochy zborcené podél površky pq. Stopa p_1q_1 společné roviny tečné kolmé k π plochy zborcené a hyp. paraboloidu seče jeho površku $p_0q'_0$, ležící v π v bodě d_1, v němž postavená kolmice d_1d na π je přímkou druhé soustavy hyp. paraboloidu a bod d, v němž tato površka seče pq, je dotyčným bodem tečné roviny $pqp_1q_1 \perp \pi$ a d_1 je dotyčným bodem tečny p_1q_1 křivky D_1, proměnnou přímkou p_1q_1 obalené.

Je-li opsaný trojúhelník $O^nO^pO^q$ podobný základnímu trojúhelníku $N_1P_1Q_1$ tak, že strany stojí navzájem na sobě kolmo, pak kuželosečka K_1 je kružnicí, jak snadno dá se z rovností úhlů v obrazci naznačených dokázati; přímka $p_1q_1n_1$ je pak přímkou *Simsonovou* a křivka D_1 křivkou *Steinerovou.*

7. Na základě předchozí úvahy možno všeobecně říci: Je-li do kuželosečky K vepsán trojúhelník abc a šestiúhelník $ab_1ca_1bc_1$, určují průsečíky protějších stran $ab_1 \times a_1b \equiv \gamma$, $b_1c \times ca_1 \equiv \alpha$, $ca_1 \times c_1a \equiv \beta$ přímku Pascalovu. Spojnice kteréhokoli bodu m kuželosečky K s body γ, α, β protínají příslušné strany trojúhelníka ab, bc, ca v resp. bodech c', a', b', ležících na přímce S.[1]) Případ v článku uvedený je specielním případem této všeobecné věty, kde v šestiúhelníku $P_1f_1Q_1u_1N_1e$ je Pascalova přímka úběžná.

*

Une généralisation du théorème sur la droite de Simson.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné, dans un plan un triangle $N_1P_1Q_1$ et trois directions, le lieu du point m_1, ayant la propriété que les droites passant par lui et ayant les directions données coupent les côtés du triangle en trois points d'une droite, est une conique M_1. L'auteur démontre cette proposition à l'aide des méthodes de la géométrie descriptive. Si les directions données sont choisies de manière que le triangle circonscrit au triangle donné et dont les côtés ont les directions données, est semblable au triangle donné, les côtés respectifs des deux triangles étant perpendiculaires, la conique M_1 est un cercle.

---

[1]) Dr. Ant. Pleskot: „Zobecnění theoremu o přímce Simsonově." Č. J. Č. M., roč. 37, str. 277.