Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 5, 366--400

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109037

korffa a tím trubici Geisslerovu v druhé ruce rozsvítiti, netřeba ani podotýkati.

* * *

Nikola Tesla narodil se 1857 ve Smiljanu v župě Lické král. Chorvatsko-Slavonského. Otec jeho byl duchovním církve řecké. Prvního vzdělání dostalo se Teslovi na veřejné škole v Gospiči, kdež po 4 letech vstoupil na tamější školu realnou; vyšší realku studoval v Karlovci v Chorvatsku. Ve studiích svých pokračoval od r. 1873 na polytechnice Štýrsko-Hradecké, kdež připravoval se k úřadu učitelskému na školách středních, kteréhožto úmyslu se však již po prvním roce vzdal, a vstoupil na dráhu inženýrskou. Jazykům cizím učil se mimo jiné též v Praze, kde byl posluchačem české vysoké školy technické. Jako inženýr zaměstnán byl v Paříži; brzy však obrátil se do Ameriky, kdež mu spojení s Edisonem přineslo nemalého užitku. Tam žije dosud. Bližší viz Čas. pro pěst. mat. a fys. XIX. str. 155.

Úlohy.

Úloha 31.

A vyšel z vrcholu a obdélníkového pozemku abcd a šel po úhlopříčně do bodu c; B vyšel současně z a do c touž rychlostí, ale šel po obvodě přes vrchol b; A se vrátil do a v tom okamžiku, když B na zpáteční cestě dospěl do b; který jest poměr stran trojúhelníka abc? Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Matěj Liška*, stud. VIII. tř. gymn. v Plzni.)

Označme strany obdélníka

$$\overline{ab} = x, \quad \overline{bc} = y;$$

jelikož oba chodci A i B kráčeli stejnou rychlostí a první z nich vykonal dráhu $2.\overline{ac}$ v téže době co druhý ušel $\overline{ab} + 2.\overline{bc}$, máme rovnici

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2y.$$

Z této obdržíme $\quad 3x^2 - 4xy = 0,$

tudíž $\quad x : y = 4 : 3.$

Přepona jest pak

$$\overline{ac} = \sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} = \frac{5}{4}x.$$

Strany trojúhelníka *abc* jsou tedy v poměru $3 : 4 : 5.$

Úloha 32.

Majitel pravoúhlého pozemku abcd, o straně ab = 120 m, vyšel z vrcholu a přímo do místa m na straně bc; jeho syn vyšel současně z a a současně došel do m, ale šel po obvodě pozemku přes vrchol b; poměr rychlostí $= \frac{5}{7}$.

a) Jak daleko jest bod m vzdálen od bodu b?

b) Do kterých míst strany bc dospěl by otec dříve než syn a do kterých syn dříve než otec?

Prof. *Ad. Mach.*

Řešení. (Zaslal p. *Oldřich Košťál*, stud. VI. tř. real. v Praze, Ječná ul.)

a) Označíme-li $\overline{bm} = x$, vede úloha k rovnici

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x + a} = \frac{5}{7}$$

čili

$$12x^2 - 25ax + 12a^2 = 0;$$

odtud vypočítáme

$$x = \frac{a}{24}(25 \pm 7),$$

tedy

$$x_1 = 160,\ x_2 = 90.$$

Vyhovují tudíž úloze dvě místa ve vzdálenosti 160 *m* nebo 90 *m* od vrcholu *b*.

b) Zvolme na $\overline{bc}$ bod *n* a položme $\overline{bn} = y$. Otec přijde dříve než syn do takových míst, pro které jest

$$7\sqrt{y^2 + a^2} > 5(a + y)$$

čili

$$24(y^2 + a^2) - 50ay > 0,$$

tudíž

$$24\left(y - \frac{4a}{3}\right)\left(y - \frac{3a}{4}\right) > 0.$$

Jsou to místa, pro která jest

$$99 < y < 160;$$

do ostatních přijde syn dříve než otec.

Úloha 33.

Obdélník daný rozděliti jest ve dva obdélníky navzájem sobě podobné. Mimo to jest dokázati:

a) Kružnice opsané o tyto dva obdélníky protínají se pravoúhelně.

b) Čtverec společné tečny těchto kružnic rovná se polovici původního obdélníka.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Novák,* stud. VII. tř. gymn. v Třebíči.)

Buďtež $a > b$ rozměry daného obdélníka; je-li tento rozdělen příčkou k a kolmou ve dva obdélníky navzájem podobné, jsou jich rozměry

$$a_1, b; \quad b, a_2$$

a jest

$$a_1 + a_2 = a, \quad a_1 : b = b : a_2.$$

Polokružnice na průměru a sestrojená stanoví tudíž v protější straně žádaný bod dělící.

a) Úhlopříčky obou podobných obdélníků podle sestrojení vykonaného jsou tečnami opsaných jim kružnic a stojí patrně na sobě kolmo.

Poloměry kružnic těch jsou

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b^2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_2^2 + b^2};$$

tudíž jest

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + 2b^2)$$

$$= \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2) = \frac{a^2}{4},$$

čímž kolmost kružnic opět stvrzena.

b) Čtverec společné tečny jest

$$t^2 = \frac{a^2}{4} - (r_1 - r_2)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - 2r_1 r_2\right) = 2r_1 r_2;$$

to jest však obsah trojúhelníka pravoúhlého omezeného stranami a, $2r_1$, $2r_2$, kterýž rovná se polovici původního obdélníka.

Úloha 34.

Je-li r poloměr kružnice opsané trojúhelníku, u_1, u_2, u_3 části výšek počítané od vrcholů ku společnému výšek průsečíku, jest dokázati relaci

$$4r^3 - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\, r - u_1 u_2 u_3 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Schüller*, stud. VIII. tř. gymn. v Chrudimi.)

Užijme známého označení stran a úhlů trojúhelníka; potom jest

$$u_1 = b\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 2r\cos\alpha$$

a obdobně

$$u_2 = 2r\cos\beta, \quad u_3 = 2r\cos\gamma.$$

O úhlech trojúhelníka jest však platnou relace

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1;$$

dosadíme-li za cosiny hodnoty z předešlých rovnic plynoucí, obdržíme vztah, který bylo dokázati.

Poznámka: Svrchu vypsanou rovnici o úhlech trojúhelníka takto lze dokázati:

Jelikož

$$\gamma = 2\mathrm{R} - (\alpha + \beta),$$

jest

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta.$$

Zdvojmocněním obdržíme

$$\begin{aligned}\cos^2\gamma &= (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &\qquad + \cos^2\alpha\cos^2\beta \\ &= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\ &= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,\end{aligned}$$

pročež

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Úloha 35.

Dokázati, že o úhlech trojúhelníka v platnosti jest relace

$$\begin{aligned} tg\,\alpha\, tg\,\beta + tg\,\beta\, tg\,\gamma + tg\,\gamma\, tg\,\alpha \\ = 1 + \sec\alpha\sec\beta\sec\gamma. \end{aligned}$$

Stud. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hulla,* stud. VII. tř. gymn. v Olomouci.)

Jelikož $\alpha + \beta + \gamma = 2R,$

jest $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -1$

čili $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma = -1.$

Vyvineme-li dále, obdržíme

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = -1\end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta \\ = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1\,.\end{aligned}$$

Dělíme-li obě strany součinem $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, nabudeme relace vyslovené v úloze.

Úloha 36.

Jsou-li F_1, F_2 ohniska ellipsy, M libovolný bod na ellipse a je-li

$$\measuredangle F_2F_1M = \alpha, \quad \measuredangle F_1F_2M = \beta,$$

jest

$$tg\,\frac{\alpha}{2}\,.\,tg\,\frac{\beta}{2}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,,$$

značí-li ε číselnou výstřednost ellipsy.

Stud. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum*, stud. VII. tř. g. v Benešově.)

Jelikož jest

$$F_1M+F_2M=2a\,,$$
$$F_1F_2=2e\,,$$

jest dle věty Cagnoliovy

$$\frac{F_1M+F_2M}{F_1F_2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

čili

$$\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\,.$$

Odtud plyne

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,,$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,,$$

tudíž

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,.$$

Poznámka: Pro hyperbolu jest obdobně

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{e}{a}=\varepsilon\,,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}.$$

Viz: Časopis, ročník XIV. str. 194 a ročník XV. str. 35.

Úloha 37.

Jsou-li dány na ellipse dva body M, N a vepíšeme-li do trojúhelníků F_1MF_2, F_1NF_2 kružnice, mají se poloměry těchto kružnic k sobě v poměru

$$\varrho_1 : \varrho_2 = y_1 : y_2 = tg\frac{\varphi}{2} : tg\frac{\psi}{2},$$

značí-li y_1, y_2 pořadnice bodů M, N a je-li

$$\sphericalangle F_1MF_2 = \varphi, \quad \sphericalangle F_1NF_2 = \psi.$$

Stud. fil. *Karel Nečas.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Bystřický*, stud. VII. tř. r. v Plzni.)

Označíme-li plochy trojúhelníků

$$\triangle F_1MF_2 = P_1, \quad \triangle F_1NF_2 = P_2,$$

jest

$$P_1 : P_2 = y_1 : y_2.$$

Zároveň jest

$$P_1 = (a + e)\varrho_1, \quad P_2 = (a + e)\varrho_2,$$

tedy

$$P_1 : P_2 = \varrho_1 : \varrho_2,$$

pročež

$$\varrho_1 : \varrho_2 = y_1 : y_2.$$

Směrnice průvodiče F_1M jest

$$A_1 = \frac{y_1}{x_1 - e},$$

směrnice normály půlící úhel φ jest

$$A_2 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

tedy jest

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{A_1-A_2}{1+A_1A_2}=\frac{ey_1}{b^2}.$$

Obdobně jest

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=\frac{ey_2}{b^2},$$

pročež

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}:\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}=y_1:y_2$$

a také

$$\varrho_1:\varrho_2=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}:\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}.$$

Úloha 38.

Na ellipse

$$4x^2+9y^2=900$$

stanoviti jest dva body souměrně sdružené dle přímky

$$6x+4y-5=0.$$

Kterak lze body takové přímo sestrojiti?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Brix,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.)

Souměrnost bodů $a(x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$ dle dané osy vyjádřena jest podmínkami

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{2}{3},$$

$$6x_1+4y_1-5=-(6x_2+4y_2-5);$$

první značí, že spojnice $\overline{ab}$ kolma jest k ose souměrnosti, druhá pak, že oba body jsou od této osy stejně vzdáleny. Jelikož body ty jsou na ellipse, jest

$$4x_1^2+9y_1^2=900,\quad 4x_2^2+9y_2^2=900.$$

K určení souřadnic bodů hledaných máme tedy 4 navzájem neodvislé rovnice.

Rovnici druhé lze dáti podobu

$$3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 5; \tag{1}$$

rozdíl posledních dvou rovnic

$$4(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 9(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$$

lze se zřetelem k rovnici první upraviti na tvar

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = 0. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vypočítáme

$$x_1 + x_2 = 3, \quad y_1 + y_2 = -2;$$

vyjádříme-li odtud x_2, y_2 a dosadíme do rovnice čtvrté, obdržíme

$$4(3 - x_1)^2 + 9(2 + y_1)^2 = 900,$$

kterouž rovnicí společně se

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 900$$

stanoveny jsou neznámé x_1, y_1.

Rozdílem obou rovnic nalezneme

$$2x_1 - 3y_1 - 6 = 0;$$

a jelikož jest také

$$2x_2 - 3y_2 - 6 = 0,$$

jsou hledané body průsečíky dané ellipsy s přímkou

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

Souřadnice jich jsou

$$a(12, 6), \quad b(-9, -8).$$

Body souměrné ku přímce O lze na ellipse sestrojiti takto: Ku směru kolmému k O ustanovme průměr sdružený P; průsečíkem přímek O, P prochází přímka M $\perp$ O určující v ellipse body žádané.

Úloha 39.

Bodem $c(x_0, y_0)$ na parabole $y^2 = 2px$ vésti jest tětivu omezující úseč plošného obsahu U. Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Granát*, stud. VII. tř. real. v Pardubicích.)

Budiž žádaná tětiva $\overline{ca}$, při čemž bod a měj souřadnice x_1, y_1. Sestrojíme-li si obrazec, snadně poznáme, že jest

$$U = \frac{2}{3}(x_1 y_1 - x_0 y_0) - \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 + y_0).$$

Uvážíme-li, že

$$y_0^2 = 2px_0, \quad y_1^2 = 2px_1,$$

můžeme U vyjádřiti jen pořadnicemi y; po jednoduché úpravě shledáme známý vzorec

$$U = \frac{(y_1 - y_0)^3}{12p}.$$

Dle toho, je-li $y_1 > y_0$ aneb $y_1 < y_0$, obdržíme dvě toliko znaménkem různé hodnoty U a můžeme tedy klásti

$$y_1 = y_0 \pm \sqrt[3]{12pU}.$$

Poznámka. Bodem c lze vésti dvě tětivy ca, cb, omezující úseče parabolické stejného obsahu. Jsou-li souřadnice bodu $a(x_1, y_1)$ a bodu $b(x_2, y_2)$, jest

$$y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2);$$

pročež $\overline{ab}$ jest rovnoběžné s tečnou v bodě c. Pro různé hodnoty U obdržíme tedy tětivy $\overline{ab}$ tvořící osnovu rovnoběžek.

Úloha 40.

Bodem $c(x_0, y_0)$ na parabole $y^2 = 2px$ vedeny jsou tětivy $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, k nimž přiléhají úseče parabolické stejného obsahu U. Jest dokázati, že plocha trojúhelníka abc rovná se 6U.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Inocenc Hanzlík,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Označme souřadnice bodů $a(x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$; potom jest

$$y_1^2 = 2px_1, \quad y_2^2 = 2px_2$$

a dle úlohy předcházející

$$y_1 - y_0 = y_0 - y_2 = \sqrt[3]{12p\mathrm{U}};$$

označme tuto odmocninu stručně písmenem k. Obsah trojúhelníka abc můžeme takto vyjádřiti:

$$\varDelta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}p\begin{vmatrix} y_0^2 & y_0 & 1 \\ y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

čili

$$\varDelta = \frac{1}{4p}[y_0^2 + y_1y_2 - y_0(y_1 + y_2)](y_1 - y_2).$$

Jest však

$$y_1 + y_2 = 2y_0, \; y_1 - y_2 = 2k, \; y_1y_2 = y_0^2 - k^2,$$

tudíž

$$\varDelta = \frac{k}{2p}(2y_0^2 - k^2 - 2y_0^2) = -\frac{k^3}{2p}.$$

Prostá hodnota $\varDelta$ jest pak

$$\varDelta = 6\mathrm{U},$$

jak bylo dokázati.

Úloha 41.

Řešiti jest rovnici

$$(x^2 - 2)^5 + x^5 = 5x^2(x - 1)(x + 2)(x^2 - 2)^2.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jindř. Kopecký*, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově.)

Dělíce rovnici výrazem x^5, dejme jí podobu

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^5 + 1 = 5\left(x - \frac{2}{x} + 1\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^2$$

a položme

$$x - \frac{2}{x} = y;$$

tím nabudeme rovnice reciproké

$$y^5 - 5y^3 - 5y^2 + 1 = 0.$$

Jeden její kořen jest patrně

$$y_1 = -1;$$

ostatní čtyry kořeny plynou z rovnice

$$y^4 - y^3 - 4y^2 - 4y + 1 = 0$$

čili

$$y^2 + \frac{1}{y^2} - (y + \frac{1}{y}) - 4 = 0.$$

Klademe-li

$$y + \frac{1}{y} = z,$$

jest

$$z^2 - z - 6 = 0,$$

z čehož

$$z_1 = -2, \ z_2 = -3;$$

k tomu náleží hodnoty

$$y_{2,3} = -1, \ y_{4,5} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}).$$

Jelikož ke každému y přísluší dvojí x, obdržíme pro x celkem 10 hodnot, k nimž vedou rovnice tyto:

a) pro

$$y_1 = y_2 = y_3 = -1$$

jest

$$x - \frac{2}{x} = -1,$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \ x_4 = x_5 = x_6 = -2;$$

b) pro

$$y_4 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

jest

$$2x^2 - (3 + \sqrt{5})\,x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}[3 + \sqrt{5} \pm \sqrt{46 + 6\sqrt{5}}]$$

$$= \frac{1}{4}[3 + \sqrt{5} \pm (1 + 3\sqrt{5})]$$

$$x_7 = 1 + \sqrt{5},\ x_8 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5});$$

c) pro

$$y_5 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

jest

$$2x^2 - (3 - \sqrt{5})\,x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}[3 - \sqrt{5} \pm (1 - 3\sqrt{5})]$$

$$x_9 = 1 - \sqrt{5},\ x_{10} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Úloha 42.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$lg_y\, x - lg_x\, y = \frac{8}{3}$$

$$xy = 16.$$

Red. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Čanský,* stud. VII. tř. real. v Karlíně.)

Položíme-li

$$\lg_y x = u,\ \lg_x y = v,$$

jest

$$u - v = \frac{8}{3},$$

$$y^u = x,\ x^v = y = x^{\frac{1}{u}},$$

tudíž

$$uv = 1.$$

Z obou rovnic pro u, v vyplývá

$$u - \frac{1}{u} = \frac{8}{3},$$

$$3u^2 - 8u - 3 = 0,$$

tudíž

$$u_1 = 3,\ u_2 = -\frac{1}{3},$$

$$v_1 = \frac{1}{3},\ v_2 = -3.$$

Při hodnotách u_1, v_1 jest

$$x = y^3,$$

pročež

$$y^4 = 16,$$

$$y_1 = 2,\ y_2 = -2,\ y_3 = 2i,\ y_4 = -2i$$

$$x_1 = 8,\ x_2 = -8,\ x_3 = -8i,\ x_4 = 8i;$$

při hodnotách u_2, v_2 jest

$$y = x^{-3},$$

pročež

$$x^2 = \frac{1}{16},$$

$$x_5 = \frac{1}{4},\ x_6 = -\frac{1}{4}$$

$$y_5 = 64,\ y_6 = -64.$$

Úloha 43.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{10^{-5}}{x^{91\, lg\, x}}\, x^{19\, lg^2 x + 101} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} x^{10\,(lg^2 x + 1)}.$$

Stud. fil. *Josef Knobloch.*

Řešení (Zaslal p. *Frant. Týra,* stud. VII. tř. gymn. v Č. Budějovicích.)

Kladouce

$$\lg x = y$$

obdržíme po zlogarithmování rovnice a krátkém upravení

$$9(y^3 - 1) - 91y(y - 1) = 0$$

čili

$$(y - 1)(9y^2 - 82y + 9) = 0.$$

Odtud plyne

$$y_1 = 1,\ y_2 = 9,\ y_3 = \frac{1}{9}$$

$$x_1 = 10,\ x_2 = 10^9,\ x_3 = 10^{\frac{1}{9}}.$$

Úloha 44.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$(10y)^{1+2\lg y} = 10^{3\lg xy}$$
$$x^{2\lg x}\, 10^{-7\lg y} = (10x)^{-4\lg y}.$$

Stud. fil. *Jos. Knobloch.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Voska,* stud. VIII. tř. gymn. na Král. Vinohradech.)

Položme

$$\lg x = u,\ \lg y = v;$$

zlogarithmujme dané rovnice a dosaďme tyto hodnoty, i bude

$$2v^2 + 1 = 3u$$
$$2u^2 + 4uv = 3v.$$

Sečtením obdržíme rovnici

$$2(u + v)^2 - 3(u + v) + 1 = 0,$$

z níž vypočítáme

$$u + v = \frac{3 \pm 1}{4}.$$

Spojíme-li tento výsledek s rovnicí

$$2v^2 + 1 = 3u,$$

shledáme vyloučením u

$$8v^2 + 12v - (5 \pm 3) = 0.$$

Takto ustanovíme

$$v_1 = -2,\ v_2 = \frac{1}{2},\ v_3 \frac{-3+\sqrt{13}}{4},\ v_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{4}$$

$$u_1 = 3,\quad u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{5-\sqrt{13}}{4},\ u_4 = \frac{5+\sqrt{13}}{4},$$

k čemuž příslušné hodnoty x, y jsou

$$x = 10^u,\ y = 10^v.$$

Úloha 45.

Při kterých hodnotách veličiny a má rovnice

$$x^2 + 10x + 6ax + 5a^2 + 44a + 19 = 0$$

kořeny realné různé, kdy dva kořeny realné stejné a kdy kořeny soujemné?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Valach*, stud. VII. tř. gymn. v Kroměříži.)

Řešíce danou rovnici dle x nalezneme

$$x = -(5 + 3a) \pm \sqrt{4a^2 - 14a + 6}$$

čili

$$x = -(5 + 3a) \pm \sqrt{(2a - 6)(2a - 1)}.$$

Pokud jest

$$2a - 6 > 0$$

aneb

$$2a - 1 < 0,$$

to jest

$$a > 3$$

aneb

$$a < \frac{1}{2},$$

jest diskriminant kladný a kořeny rovnice jsou realné. Je-li

$$\frac{1}{2} < a < 3,$$

jsou kořeny rovnice komplexními.

Při hodnotách

$$a = 3, \ a = \frac{1}{2}$$

má rovnice oba kořeny realné stejné, totiž

$$x = -14 \text{ aneb } x = -\frac{13}{2}.$$

Úloha 46.

Které úhly menší než 360° vyhovují rovnici

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0?$$

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Vomela,* stud. VI. tř. real. v Kutné Hoře.)

Vyjádříme-li funkcemi jednoduchého úhlu, nabude rovnice podoby

$$\sin x + 2 \sin x \cos x + 3 \sin x \cos x - \sin^3 x$$
$$+ 4 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

čili

$$\sin x \cos x (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0.$$

Jest tedy buď

$$\sin x = 0, \ x = 0, \ 2\,R, \ 4\,R, \ \ldots$$

aneb

$$\cos x = 0, \ x = R, \ 3\,R, \ \ldots$$

aneb

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0,$$

z čehož

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

$$x = 72^0,\ 144^0,\ 216^0,\ 288^0.$$

Jiné řešení.

Jelikož

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$
$$\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin 3x \cos x,$$

přechází rovnice daná v tuto:

$$\cos x\,(\sin 2x + \sin 3x) = 0$$

čili

$$\cos x \,.\, \cos \frac{x}{2} \,.\, \sin \frac{5x}{2} = 0.$$

Odtud obdržíme týž výsledek jako dříve.

Úloha 47.

Které úhly vyhovují rovnici

$$\cos x\,(\cos x + \cos 7x) = \sin^2 2x - \frac{1}{4}?$$

Stud. fil. *Jaroslav Jeništa.*

Řešení. (Zaslal p. *Ignát Velísek,* bohoslovec v Olomouci.)

Násobíme-li rovnici 2ma, můžeme ji psáti

$$2 \cos^2 x + 2 \cos x \cos 7x - 2 \sin^2 2x + \frac{1}{2} = 0;$$

užijeme-li pak vzorců známých, lze jí dáti podobu

$$1 + \cos 2x + \cos 6x + \cos 8x - 1 + \cos^2 2x - \sin^2 2x + \frac{1}{2} = 0$$

čili

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \frac{1}{2} = 0.$$

Položme

$$2x = z$$

a upravme rovnici na tvar

$$1 + \cos z + \cos 2z + \cos 3z + \cos 4z = \frac{1}{2}.$$

Víme, že

$$1 + y + y^2 + y^3 + y^4 = \frac{1 - y^5}{1 - y} = s;$$

položíme-li

$$y = \cos z + i \sin z,$$

jest dle Moivreovy poučky

$$y^5 = \cos 5z + i \sin 5z$$

a proto

$$s = \frac{1 - (\cos 5z + i \sin 5z)}{1 - (\cos z + i \sin z)}$$

$$= \frac{(1 - \cos 5z - i \sin 5z)(1 - \cos z + i \sin z)}{1 - 2 \cos z + \cos^2 z + \sin^2 z}.$$

Realná část tohoto výrazu, jež jest součtem levé strany rovnice pro z, jest

$$\frac{1 - \cos 5z - \cos z + \cos z \cos 5z + \sin z \sin 5z}{2 (1 - \cos z)}$$

$$= \frac{1 - \cos z + \cos 4z - \cos 5z}{2 (1 - \cos z)} = \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2} + 2 \sin \frac{9z}{2} \sin \frac{z}{2}}{2 . 2 \sin^2 \frac{z}{2}}.$$

Jest tedy

$$\frac{\sin \frac{z}{2} + \sin \frac{9z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{2},$$

z čehož

$$\sin \frac{9z}{2} = 0;$$

proto

$$\frac{9z}{2} = 0,\ 2R,\ 4R, \ldots$$

$$z = 40^0,\ 80^0, \ldots$$

a konečně

$$x = 20^0,\ 40^0, \ldots$$

Úloha 48.

Dán jest trojúhelník abc a bod o; jsou-li strany trojúhelníka a, b, c a značí-li x, y, z poloměry kružnic opsaných o trojúhelníky bco, cao, abo, jest platnou relace

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-\frac{a}{x}\right)\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}\right) = \frac{abc}{xyz}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Liška,* stud. VIII. tř. gymn. v Brně.)

Jsou-li α, β, γ úhly trojúhelníka a leží-li bod o uvnitř, jest

$$\sphericalangle boc = 2\alpha,\ \sphericalangle coa = 2\beta,\ \sphericalangle aob = 2\gamma$$
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4R.$$

Mimo to jest

$$\sin 2\alpha = \frac{a}{2x},\ \sin 2\beta = \frac{b}{2x},\ \sin 2\gamma = \frac{c}{2x},$$
$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\gamma = 0.$$

Z rovnice této plyne

$$\frac{a}{2x}\sqrt{1-\frac{b^2}{4y^2}} + \frac{b}{2y}\sqrt{1-\frac{a^2}{4y^2}} + \frac{c}{2z} = 0.$$

Položme za příčinou stručnosti

$$\frac{a}{2x} = A,\ \frac{b}{2y} = B,\ \frac{c}{2z} = C;$$

potom jest

$$A\sqrt{1-B^2} + B\sqrt{1-A^2} + C = 0.$$

Učiníme-li tuto rovnici racionalnou, nabude podoby

$$2A^2B^2 + 2B^2C^2 + 2C^2A^2 - A^4 - B^4 - C^4 = 4A^2B^2C^2$$

čili

$$(A+B+C)(B+C-A)(C+A-B)(A+B-C) = 4A^2B^2C^2.$$

Vrátíme-li se pak k označení původnímu, jest

$$\left(\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}+\frac{c}{2z}\right)\left(\frac{b}{2y}+\frac{c}{2z}-\frac{a}{2x}\right)\left(\frac{c}{2z}+\frac{a}{2x}-\frac{b}{2y}\right)$$
$$\left(\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}-\frac{c}{2z}\right)=\frac{4a^2b^2c^2}{64x^2y^2z^2},$$

tudíž, jak tvrzeno,

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-\frac{a}{x}\right)\left(\frac{c}{z}+\frac{a}{x}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}\right)$$
$$=\frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}.$$

Úloha 49.

Kouli poloměru r opsán jest dotyčný kužel, jehož vrchol má od středu koule vzdálenost s. Ustanoviti jest obsah té části kužele, která leží vně koule. Který jest výsledek při $s = 2r$?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Mik. Šmok*, stud. VIII. tř. gymn. v Hradci Králové.)

Kužel dotyčný skládá se z úseče kulové U a z části vnější K omezené oblinou kuželovou a vrchlíkem kulovým.

Výška v úseče dána jest úměrou

$$(r-v):r = r:s$$

a jest tedy

$$v = \frac{r(s-r)}{s}.$$

Poloměr dotyčné kružnice jest

$$\varrho = \sqrt{r^2-(r-v)^2} = \frac{r}{s}\sqrt{s^2-r^2}.$$

Obsah dotyčného kužele jest

$$K + U = \frac{1}{3}\pi\varrho^2(s - v) = \frac{\pi r^2}{3s^3}(s^2 - r^2)(s^2 - rs + r^2),$$

obsah úseče

$$U = \frac{\pi}{2}\varrho^2 v + \frac{\pi}{6}v^3 = \frac{\pi r^3}{3s^3}(s - r)^2(2s + r).$$

Proto jest

$$K = \frac{\pi r^2}{3s^3}[(s^2 - sr + r^2)(s^2 - r^2) - r(s - r)^2(2s + r)]$$

čili

$$K = \frac{\pi r^2}{3s^3}(s - r)[s^3 - 2rs^2 + r^2 s + 2r^3].$$

Úloha 50.

Nalézti poloměr koule opsané pravoúhlému čtyrstěnu ABCD je-li

$$DA = a,\ DB = b,\ DC = c$$

a jsou-li hrany DA, DB, DC navzájem kolmé.

Stud. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Cyril Vítěz*, stud. VIII. tř. gymn. v Přerově.)

Střed s žádané koule jest průsečíkem rovin, které uprostřed hran DA, DB, DC k těmto kolmo vztyčíme; roviny tyto půlí také hrany AB, BC, CA. Vzdálenosti bodu S od kolmých stěn čtyrstěnu (BCD, CAD, ABD) jsou $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$. Poloměr koule opsané čtyrstěnu ABCD jest tedy

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2 + c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Poznámka redakce:
Obsah daného čtyrstěnu jest

$$T = \frac{1}{6}abc,$$

povrch jeho

$$P = \frac{ab + bc + ca}{2} + \varDelta,$$

značí-li $\varDelta$ obsah trojúhelníku ABC.

Jelikož

$$T = \frac{1}{3} P\varrho,$$

jest-li ϱ poloměr koule *vepsané*, jest

$$\varrho = \frac{3\,T}{P}$$

čili

$$\varrho = \frac{abc}{ab + bc + ca + 2\varDelta}.$$

Strany trojúhelníka ABC jsou

$$\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \sqrt{c^2 + a^2};$$

obsah jeho dle vzorce Heronova jest

$$\varDelta = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Proto jest

$$\varrho = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

Úloha 51.

Má-li kosoúhlá základna pravoúhlého čtyrstěnu úhly φ_1, φ_2, φ_3, jest ustanoviti stěnové úhly, které základna tato s pobočnými stěnami tvoří.

Stud. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Brablec*, stud. VIII. tř. gymn. v Olomouci.)

Zovme úhlům φ_1, φ_2, φ_3 protější stěnové úhly σ_1, σ_2, σ_3. Z pravoúhlých trojhranů plynou rovnice

$$\cos \varphi_1 = \operatorname{ctg} \sigma_2 \operatorname{ctg} \sigma_3$$
$$\cos \varphi_2 = \operatorname{ctg} \sigma_3 \operatorname{ctg} \sigma_1$$
$$\cos \varphi_3 = \operatorname{ctg} \sigma_1 \operatorname{ctg} \sigma_2.$$

Znásobením vyjde

$$\operatorname{ctg} \sigma_1 \operatorname{ctg} \sigma_2 \operatorname{ctg} \sigma_3 = \sqrt{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3},$$

tudíž

$$\operatorname{ctg} \sigma_1 = \frac{\sqrt{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}}{\cos \varphi_1}$$

čili

$$\operatorname{tg} \sigma_1 = \sqrt{\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2 \cos \varphi_3}};$$

obdobně σ_2 a σ_3.

Úloha 52.

Dány jsou stejné úsečky $\overline{ab} = \overline{cd}$ určené v pravoúhlé soustavě souřadnic body

$$a\,(2,\ 1),\ b\,(6,\ 4)$$
$$c\,(1,\ 4),\ d\,(-2,\ 8).$$

Kolem kterého středu a o který úhel jest otočiti jednu z těchto úseček, aby se sjednotila s druhou?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Habrich*, stud. VII. tř. real. v Prostějově.)

Z daných souřadnic zřejmo, že jest $\overline{ab} = \overline{cd} = 5$.

a) Má-li se po otočení sjednotiti *a* s *c*, *b* s *d*, musí střed otáčení býti na osách souměrnosti úseček $\overline{ac}$ a $\overline{bd}$.

Rovnice těchto os jsou:

$$O_{\overline{ac}} \left\{ y - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) \right.$$

čili

$$O_{\overline{ac}} \equiv x - 3y + 6 = 0,$$
$$O_{\overline{bd}} \left\{ y - 6 = 2\,(x - 2) \right.$$

čili

$$O_{\overline{bd}} \equiv 2x - y + 2 = 0;$$

průsečík obou os těchto jest střed s_1 a souřadnice jeho, z rovnic obou os vypočítané, jsou

$$x_1 = 0,\ y_1 = 2.$$

Úhel, o který třeba úsečku $\overline{ab}$ otočiti kolem s_1 tak, aby sjednotila se s $\overline{cd}$, jest

$$\omega_1 = \sphericalangle as_1c = \sphericalangle bs_1d.$$

Jelikož směrnice přímek $\overline{s_1a}$, $\overline{s_1c}$ jsou

$$A_1 = -\frac{1}{2},\ B_1 = 2,$$

tudíž

$$A_1 B_1 = -1,$$

jest

$$\omega_1 = 90^0.$$

b) Úsečky obě mohou také tím způsobem se sjednotiti, že po otočení kolem určitého středu s_2 splyne a s d, b s c. Střed tento jest průsečíkem os souměrnosti úseček $\overline{ad}$, $\overline{bc}$.

Rovnice těchto os jsou

$$O_{\overline{ad}} \equiv 8x - 14y + 63 = 0$$
$$O_{\overline{bc}} \equiv 2x - 7 = 0$$

a souřadnice jich průsečíku s_2 (druhý střed otáčení)

$$x_2 = 3\frac{1}{2},\ y_2 = 6\frac{1}{2}.$$

Úhel otočení ve druhém případě jest

$$\omega_2 = \sphericalangle as_2d = \sphericalangle bs_2c;$$

ze směrnic poloměrů $\overline{s_2b}$, $\overline{s_2c}$

$$A_2 = -1,\ B_2 = 1$$

patrno, že jest opět

$$\omega_2 = 90^0.$$

Výsledek $\omega_1 = \omega_2 = 90^0$ mohl býti předvídán, ježto dle souřadnic daných zřejmo, že jest

$$ab \perp cd.$$

Poznámka redakce: Střed m úsečky ab opisuje při obojím otočení dráhu stejného poloměru

$$\overline{s_1 m} = \overline{s_2 m} = \frac{1}{4}\sqrt{65}.$$

Úloha 53.

Ke kružnici

$$K \equiv x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

vedeny bodem c tečny protínající osu Y v bodech a, b. Které jest geom. místo bodu c, má-li úsečka $\overline{ab}$ stálou délku d?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Gustav Graf*, stud. VII. tř. real. v Hradci Králové.)

Nazveme-li $\varDelta$ obsah trojúhelníka abc, jest

$$2\varDelta = dx = (2d + 2t)\, r;$$

při tom značí t délku tečny vedené bodem c ke kružnici K a jest

$$t = \sqrt{x^2 + y^2 - 2rx}.$$

V rovnicích těchto jsou x, y souřadnice bodu c; jest tedy o nich v platnosti rovnice

$$dx = 2r\,(d + \sqrt{x^2 + y^2 - 2rx})$$

čili

$$2r\sqrt{x^2 + y^3 - 2rx} = d\,(x - 2r).$$

V racionálném tvaru jest rovnice tato

$$(4r^2 - d^2)\, x^2 + 4r^2 y^2 - 4r\,(2r^2 - d^2)\, x - 4d^2 r^2 = 0.$$

Rovnice tato značí ellipsu, hyperbolu neb parabolu dle toho, je-li

$$d < 2r,\ d = 2r \text{ neb } d > 2r.$$

Je-li $d = 2r$ nabývá rovnice podoby

$$y^2 + 2rx - 4r^2 = 0$$

čili

$$y^2 = 2r\,(2r - x).$$

Poznámka redakce: Výsledek v tomto případě obsažený lze vysloviti takto:

Dána-li jest parabola $y^2 = 2px$ a kružnice $x^2 + y^2 - 2px = 0$ a vedeme-li z bodu paraboly tečny ke kružnici, má část přímky $x = 2p$ obsažená mezi oběma tečnami stálou délku $2p$.

Úloha 54.

Rovnostranný trojúhelník umístěn jest v pravoúhlé soustavě tak, že jedna strana jeho jest v ose Y, výška v ose X. Trojúhelníku opsána jest kružnice a ellipsa, jejíž střed jest v počátku soustavy.

Které jsou rovnice obou křivek? Jak velká jest vnější plocha omezená obloukem kruhovým a elliptickým? V kterém úhlu protínají se obě křivky?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Ogoun*, stud. VIII. tř. gymn. v Kroměříži.)

Budiž strana trojúhelníka $s = 2$, tedy výška $v = \sqrt{3}$.

Potom jest poloměr kružnice $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ a rovnice její

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3}$$

čili

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{3} = 1;$$

poloosy ellipsy jsou $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ a rovnice ellipsy

$$x^2 + 3y^2 = 3.$$

Žádaná plocha jest

$$P = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{(a - r)\,b}{2} - \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi}{12}\left[16 - 3\sqrt{3}\right] + \frac{1}{6}\sqrt{3}$$
$$= 3{\cdot}117\ldots$$

Úhel obou křivek v průsečících na ose Y jest patrně 30^0.

Úloha 55.

Bodem M (x_1, y_1) má procházeti ellipsa a tečna k ní tak, aby trojúhelník omezený tečnou a osou měl obsah co nejmenší. Určiti jest rovnici ellipsy a tečny.

(Příklad: $x_1 = 5\sqrt{2},\ y_1 = 3\sqrt{2}$*).*

Stud. fil. *Jos. Knobloch.*

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Hanus,* stud. VII. tř. gymn. v Opavě.)

Rovnice ellipsy jest

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

a rovnice tečny v bodě M

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2.$$

Tečna tato má na osách úseky

$$\alpha = \frac{a^2}{x_1},\ \beta = \frac{b^2}{y_1};$$

pročež obsah trojúhelníka omezeného tečnou a osami jest

$$\varDelta = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{a^2b^2}{2x_1y_1}.$$

Jelikož bod M leží na ellipse, jest

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Vylučme z posledních dvou rovnic hodnotu b^2; nabudeme rovnice

$$y_1a^4 - 2\varDelta x_1a^2 + 2\varDelta x_1^3 = 0,$$

z níž plyne

$$a^2 = \frac{1}{y_1}\left[\varDelta x_1 \pm \sqrt{\varDelta^2x_1^2 - 2\varDelta x_1^3y_1}\right].$$

Má-li býti a^2 realné, musí býti

$$\varDelta^2x_1^2 \geqq 2\varDelta x_1^3y_1,$$

pročež

$$\varDelta_{min} = 2x_1y_1.$$

K této minimalné hodnotě Δ přísluší

$$a = x_1\sqrt{2},\ b = y_1\sqrt{2}$$
$$\alpha = 2x_1,\quad \beta = 2y_1.$$

Z toho zřejmo, že v případě tom část tečny obsažená mezi osami půlena jest bodem dotyčným.

Rovnice ellipsy jest pak

$$y_1^2x^2 + x_1^2y^2 = 2x_1^2y_1^2,$$

rovnice tečny

$$y_1x + x_1y = 2x_1y_1.$$

V daném číselném příkladě jest $a = 10$, $b = 6$.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 2. až 5., 31., 32., 33., 35., 42., 43., 44., 46., 49.

Bačina Jan, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 31., 32., 38. až 47., 49., 54., 55.

Bartoň Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 32., 33., 35., 41. až 44., 46., 49.

Beláček Frant., stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 31., 32., 41. až 46., 49., 50.

Božek Karel, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 31. až 36., 38. až 46., 48., 49., 52. až 55.

Brablec Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 31. až 47., 49. až 52., 54., 55.

Brix Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 31. až 55.

Brunclík Frant., stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 32.

Brzobohatý Břetislav, stud. V. tř. r. v Lipníku, úl. 31. až 35., 37., 41., 42., 43., 45., 46., 49., 50., 54.

Bystřický František, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 31., 32., 34. až 47., 49., 51., 52., 54., 55.

Čanský Václav, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 31. až 47., 49. až 55.

Červený F., stud. VIII. tř. g. ve Dvoře Králové, úl. 31., 35., 40.

Čupr Karel, stud. IV. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 31. až 35., 41. až 46., 49.

Dědouch Lud., stud. VII tř. g. v Pelhřimově, úl. 31., 32., 41. až 46., 49., 52., 54.

Dolák Alois, stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 31., 43.

Drastich Frant., stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 31., 32., 35., 41. až 46., 49., 52.

Drbal Karel, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 31. až 40.

Dundr Josef, stud. VII. tř. r. v Rakovníce, úl. 35., 45., 46.

Durda Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 33., 35., 36., 37., 39., 40., 43., 46., 49., 52., 54., 55.

Dvořák Bohumil, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 31., 32., 41. až 46., 49.

Fischer Vladimír, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 31., 32., 33., 35., 36., 39., 41., 43. až 46., 49., 52., 55.

Fojtl Arnošt, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 35.

Franěk Frant., stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 31.

Graf Gustav, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 31., 32., 33., 35., 36., 37., 42., 43., 45., 49., 52., 53.

Granát Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 31., 32., 39., 42., 43., 45., 46., 49., 52., 54.

Grössl Václav, stud. V. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 32., 33., 41. až 45., 49.

Habrich Josef, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 23., 31. až 46., 49. až 52., 54., 55.

Hac Rudolf, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 42., 43., 46., 49.

Hájek Emanuel, stud. VIII. tř. g. v Čes. Budějovicích, úl. 31., 32., 33., 35. až 43., 45., 46., 46., 49. až 52., 54., 55.

Hanus Rudolf, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 31. až 35., 41. až 52., 54., 55.

Hanuš Josef, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 31., 35., 41. až 44., 46.

Hanzlík Inocenc, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli, úl. 31. až 55.

Havelka Jiří, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 31.

Hodan Bohumír, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 31. až 46., 49. až 55.

Honzák Josef, stud. V. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 31. až 52.

Hovorka Stanislav, stud. V. tř. r. v Praze, Ječná ul., úl. 31., 32., 41., 49.

Hulla Karel, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 31. až 55.

Chadim Josef, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 32., 33., 35., 37., 41., 43., 45., 46., 49., 52., 54., 55.

Mikyna Josef, stud. VI. tř. g. ve Dvoře Králové, úl. 31., 32., 42., 43., 44., 49.
Mráz Josef, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 31. až 36., 41. až 47., 49.
Navrátil Ant., stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 31., 32., 33., 35., 42., 43., 44., 46., 49.
Navrátil Frant., stud. VIII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 43., 54.
Nejdl Karel, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 31., 32., 46., 49., 54.
Nováček Frant., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 31., 32., 34. až 47., 49. až 52., 54., 55.
Novák Ant., stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 32., 33., 35., 37., 41. až 47., 50., 52. až 55.
Novák Josef, stud. V. tř. g. v Jičíně, úl. 31., 32., 33., 49., 50.
Ogoun Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 31., 32., 33., 35., 41., 43., 45., 46., 49., 50., 52., 54., 55.
Pachl Ladislav, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 31. až 49., 51., 52., 54., 55.
Pauzar Filip, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 32.
Petráň Karel, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 31., 35., 42., 43., 45., 46., 49.
Pokorný Ant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 31.
Procházka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 31., 32., 35., 39. až 46., 48., 49., 52. až 55.
Prokeš Vojtěch, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 31., 32., 33., 35., 38., 40. až 46., 48. až 50., 52., 54., 55.
Půda Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 31. až 35., 37. až 40., 42., 43., 45., 46., 47., 49., 50., 51., 54.
Ratkovský Augustin, stud. VIII. tř. g. ve Slaném, úl. 31., 32., 33., 37., 39. až 43., 45., 46., 49., 52., 54.
Richter Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 12., 16., 27., 28., 31., 33., 35., 37., 39., 40., 41., 43. až 46., 49., 52., 54., 55.
Rudolecký Josef, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 31., 32., 35., 39. až 46., 49., 52.
Rychlík Karel, stud. IV. tř. g. v Praze-II., úl. 31. až 39., 41. až 47., 49., 50., 52., 53., 54., 55.
Ryšavý Josef, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 31., 32., 41. až 46., 49.
Seifert Ladislav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 31. až 47., 49. až 52., 54., 55.
Schoenbaum Emil, stud. VII. tř. g. v Benešově, úl. 31. až 55.

Schüller Jan, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 31. až 55.
Smrček Eugen, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 31. až 46., 49. až 52., 54., 55.
Steinbach Arnošt, stud. VI. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 46., 49.
Studnička Josef, stud. VI. tř. r. v Rakovníce, úl. 31., 32., 35., 41. až 44., 46.
Sukdol Václav, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 31., 32., 33., 41. až 46., 49., 50., 52., 54.
Šamánek Viktor, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 31. až 35., 38. až 46., 49., 50., 52., 54., 55.
Šilháček Karel, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 31. až 38., 40. až 46., 48.
Šmok Mikuláš, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 31. až 55.
Šťáva Frant., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 35., 40.
Štíbr Adolf, stud. VI. tř. r. v Rakovníce, úl. 31., 32., 35., 41. až 46.
Šubrt Adolf, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 31. až 55.
Táborský Frant., stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 31., 35., 41. až 44., 46., 47., 49.
Tereba Viktor, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 31. až 55.
Trčka Otakar, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 31.
Trnka Rudolf, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 31., 32., 33., 35., 39., 43., 44., 46., 49., 52., 54.
Turek Richard, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 31. až 46., 48. až 55.
Turek Václav, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 31. až 37., 39. až 46., 49., 52., 54., 55.
Týra František, stud. VII. tř. g. v Č. Budějovicích, úl. 2. až 5., 8., 11., 12., 14. až 24., 26., 27., 28., 31., 32., 33., 41. až 44., 46., 49., 50.
Vajgl Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 31., 33., 35., 36., 38., 39., 40., 42. až 46., 48., 49., 50., 52. až 55.
Valach Frant., stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 31. až 36., 38. až 47., 49. až 55.
Velísek Ignát, bohoslovec v Olomouci, úl. 41. až 49., 52. až 55.
Veselá Emilie, stud. g. na Král. Vinohradech, úl. 31. až 35., 41. až 50.
Veselý Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 31. až 55.
Vetter G., stud. VIII. tř. g. v Praze-III., úl. 31. až 40.
Vitáček Karel, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 31., 32., 33., 35., 41. až 46., 49., 52.
Vítěz Cyrill, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 31., 32., 35., 36., 37., 41. až 46., 49., 50., 55.

Vlček Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Roudnici, úl. 30. až 33., 42., 43., 45., 46., 49., 50., 52., 54.

Vlk Gustav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 40.

Vodička Karel, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 31., 32., 41. až 44., 46.

Vomela Frant., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 31., 32., 35., 43., 45., 46., 49.

Voska Václav, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 31. až 50., 52. až 55.

Vyskočil Pavel, stud. VIII. tř. g. na Kr. Vinohradech, úl. 31., 35.

Zafouk Bedřich, stud. VIII. tř. g. v Plzni, úl. 31., 32., 43.

Zahradníček Josef, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 31., 32., 33., 35., 37., 38., 41. až 46., 49., 50., 52. až 55.

Nepodepsaný zaslal dopisem, daným na poštu v Žižkově, řešení úl. 42. až. 46., 49., 50.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za řešení úloh obsažených v tomto ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1900) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků obdrželi tito řešitelé:

I. Ceny první.

1. *Brix František*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Hanzlík Inocenc*, stud. VIII. tř. g. v Litomyšli.
3. *Hulla Karel*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
4. *Matas Bohumil*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
5. *Schoenbaum Emil*, stud. VII. tř. g. v Benešově.
6. *Schüller Jan*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.
7. *Šmok Mikuláš*, stud. VIII. tř. g. v Hradci Králové.
8. *Šubrt Adolf*, stud. VII. tř. r. v Písku.
9. *Tereba Viktor*, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí.
10. *Veselý Jaroslav*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.

II. Ceny druhé.

1. *Brablec Jan*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
2. *Čánský Václav*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.

3. *Habrich Josef*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.
4. *Honzák Josef,* stud. V. tř. g. ve Vys. Mýtě.
5. *Lebeda Karel*, učitel v Heřmani.
6. *Nováček Frant.*, stud. VII. tř. r. v Plzni.
7. *Pachl Ladislav,* stud. VIII. tř. g. na Smíchově.
8. *Seifert Ladislav*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
9. *Valach František,* stud. VII. tř. g. v Kroměříži.
10. *Voska Václav,* stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech.

III. Ceny třetí.

1. *Božek Karel*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
2. *Bystřický Frant.*, stud. VII. tř. r. v Plzni.
3. *Drbal Karel,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
4. *Hájek Emanuel,* stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
5. *Hanus Rudolf*, stud. VII. tř. g. v Opavě.
6. *Hodan Bohumír*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
7. *Košťál Oldřich,* stud. VI. tř. r. v Praze, Ječná ul.
8. *Liška František*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
9. *Navrátil Ant.*, stud. VI. tř. r. v Hodoníně.
10. *Prokeš Vojtěch*, stud. VIII. tř. g. na Smíchově.
11. *Půda Jan,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
12. *Ratkovský Augustin*, stud. VIII. tř. g. ve Slaném.
13. *Smrček Eugen,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
14. *Šamánek Viktor*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.
15. *Šilháček Karel*, stud. VIII. tř. g. v Č. Budějovicích.
16. *Turek Richard,* stud. VII. tř. r. v Písku.
17. *Turek Václav,* stud. VII. tř. r. Písku.
18. *Vajgl Jan*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
19. *Vetter Quido,* stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
20. *Zahradníček Josef*, stud. VII. tř. g. v Třebíči.