Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 4, 182--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109033

jednoduché, aneb dosáhla-li zkušenost v oboru tom dostatečné výše, aby byla schopna formalního zpracování, jedná se především o principy či axiomy základní, z nichž možno užitím pouhé logiky, tedy způsobem čistě dialektickým ostatní zákony vyvoditi. Geometrie elementarná ještě nedospěla tak daleko, aby veškery její zákony známy byly v redukované, nejjednodušší formě, jak toho je *princip rovnoběžek* (nejvíce diskutovaný, ačkoli se takových nalezá v geometrii hojnost — viz na př. definici roviny atd.) dostatečným dokladem.

Než co se *doposud* nepodařilo zúplna, mohlo se podařiti aspoň částečně, a tak se nám dostalo z péra znamenitého badatele p. prof. *Stolze* *) v Insbrucku vysvětlení souvislosti, která vládne mezi základními pojmy *měření*. Největší obtíže jako všude působí pojem spojitosti (t. j. jeho formulování).

(Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úlohy 7.

(Podal p. *Bohuslav Mašek,* stud. VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze.)

Rovnice dané kružnice budiž

$$R \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

bod p měj souřadnice $x = b$, $y = 0$. Rovnice tečny v bodě m (x, y) jest $x\xi + y\eta - a^2 = 0$ a vzdálenosť od bodu p jest

$$\overline{pq} = \frac{bx - a^2}{a}.$$

Souřadnice bodu $n(\xi, \eta)$ vyhovují podmínkám

$$\xi = x, \quad \frac{bx - a^2}{a} = \sqrt{(\xi - b)^2 + \eta^2},$$

z nichž vyloučením x plyne rovnice hledaného místa geometrického:

*) Lipské Annaly, sv. XXII. str. 504.

$$\xi^2(a^2 - b^2) + a^2\eta^2 = a^2(a^2 - b^2).$$

Toto místo jest tedy ellipsou neb hyperbolou dle toho, jest-li $a^2 \gtrless b^2$; při $a^2 = b^2$ přechází v osu X.

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Emanuel Červený* z VIII. tř. v Klatovech, *Karel Rajdl*, *Boh. Müller* ze VII. tř. r., *Frant. Doležal* a *Jan Andres* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze a *Jos. Svoboda* z VIII. tř. v Písku.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal pan *Emanuel Červený*, stud. VIII. tř. v Klatovech.)

Průvodiče bodů m a n jsou:

$$r_1 = b \cos\varphi + a, \quad r_2 = b \cos\varphi - a;$$

průvodič bodu harmonického p určen jest rovnicí

$$\varrho = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \text{*)}.$$

Dosazením obdržíme rovnici geom. místa bodu p:

$$\varrho = \frac{b^2 \cos^2\varphi - a^2}{b \cos\varphi};$$

rovnice ta značí cirkulárnou křivku 3. stupně, mající s danou závitnicí společný bod dvojnásobný i tečny v něm.

Je-li $b = a\sqrt{2}$, jsou tyto tečny vzájemně kolmy a hledané místo geometrické jest *strophoida.*

Je-li však $b = a$, tu se obě tečny v bodě dvojnásobném sjednocují, křivka původní jest pak *kardioida* a odvozená *cissoida.*

Tutéž úlohu řešili pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi a *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze.

---

*) Srovnej: *Zahradník,* Analytická geometrie v rovině. V Praze 1883, str. 59.

Řešení úlohy 9.

a) Kružnice danými body jdoucí má rovnici

$$(x-p)^2+(y-s)^2=q^2+s^2$$

a příslušná přímka $y=\frac{s}{p}x$. Rovnici geom. místa průsečíku obdržíme vyloučením proměnné s z obou těchto rovnic, a sice ve tvaru

$$x(x^2+y^2)-2p(x^2+y^2)+(p^2-q^2)x=0.$$

Odtud patrno, že hledaná křivka jest cirkularná křivka stupně třetího. Realná její asymptota má rovnici $x-2p=0$. Jsou-li vrcholy svazku kružnic realné a různé, skládá se křivka z uzavřeného oválu a z nekonečné větve; jsou-li vrcholy ty pomyslné, má křivka jen nekonečnou větev. Sjednocují-li se oba vrcholy ($q=0$), stává se křivka *strophoidou* a má v bodě $x=p$, $y=0$ bod dvojnásobný.

b) Substitucí $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ opatřme si polárnou rovnici křivky; rovnice ta bude

$$r^2-\frac{2pr}{\cos\varphi}+p^2-q^2=0.$$

Nazveme-li r_1, r_2 průvodiče bodů, v nichž paprsek jdoucí počátkem křivku naši mimo počátek protíná, a je-li ϱ průvodič bodu harmonického s počátkem vzhledem k těmto průsečíkům, jest patrně

$$r_1+r_2=\frac{2p}{\cos\varphi},\quad r_1r_2=p^2-q^2,$$

a proto

$$\varrho=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}=\frac{p^2-q^2}{p}\cos\varphi.$$

Rovnice poslední náleží kružnici a měla by v pravoúhlé soustavě podobu

$$x^2+y^2-\frac{p^2-q^2}{p}x=0.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Emanuel Červený* z VIII. tř. v Klatovech, *Boh. Mašek* ze VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. a *Karel Petr* ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 10.

(Zaslal pan *Jos. Černovský*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.)

Je-li první podporný bod od těžiště přezmene vzdálen o t a od počátku stupnice o b, jest za rovnováhy bez břemene

$$Tt = pb,$$

a jsou-li oba podporné body od sebe vzdáleny o c, bude za rovnováhy břemene Q_1 se závažím p, visícím taktéž na počátku stupnice

$$Q_1(a_1 - c) + T(t - c) = p(b + c).$$

Z rozdílu obou rovnic nabudeme

$$c = \frac{Q_1 a_1}{T + Q_1 + p}$$

a tudíž rameno $a_2 = a_1 - c = \dfrac{T + p}{T + Q_1 + p}\, a_1 = 3\, cm.$

Délka s stupnice plyne z podmínky $ps = Q_1 a_1$ a počet n dílců stupnice pro druhý případ jest

$$n = \frac{s}{a_2} = \frac{(T + Q_1 + p)Q_1}{(T + p)p} = 10.$$

Dokud jest závaží p na počátku stupnice, udrží v rovnováze břímě Q_1 působící na rameně a_2; pošineme-li však závaží toto až na konec stupnice s, musíme pro rovnováhu ku Q_1 přidati ještě břímě

$$q = \frac{ps}{a_2} = \frac{T + Q_1 + p}{T + p}\, Q_1.$$

Hledané největší břímě jest tedy

$$Q_2 = Q_1 + q = \left(2 + \frac{Q_1}{T + p}\right) Q_1 = 16\ kg.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *Boh. Müller* ze VII. tř. r., *Jan Andres* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze a *Ant. Radešinský* ze VII. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 11.

(Podal p. *Bohuslav Müller*, stud. VII. tř. r. městského r. g. v Praze.)

Váha T kuželového pláště musí býti při nejmenším rovna svislému tlaku kapaliny na plášť. Tlak kapaliny o měrné váze σ, kolmý na kuželový plášť o poloměru r a výšce v, jest $T_1 = \frac{2}{3} r s v \pi \sigma$. Rozložíme-li každou část tohoto tlaku, působící na příslušnou část pláště ve složku vodorovnou a svislou, budou první složky zmařeny rovnými protivnými složkami: každá svislá složka pak se bude míti ke kolmému tlaku na tuto část pláště jako $r:s$, tedy i součty všech svislých T a všech vodorovných T_1

$$T : T_1 = r : s.$$

Pročež $$T = T_1 \frac{r}{s} = \tfrac{2}{3} r^2 v\pi\sigma = 2t.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Karel Novák* ze VII. tř. g. v Hradci Králové, *Jos. Černovský* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Jos. Svoboda* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Pleskot* z VIII. tř. v Chrudimi, *K. Ankrt* ze VI. tř. r., *Jan Andres* a *Frant. Doležal* ze VII. tř. g. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Úloha 19.

Ustanoviti jest obyčejný zlomek řetězový té vlastnosti, aby čítatel $n$té jeho sblížené hodnoty rovnal se jmenovateli hodnoty $(n-2)$hé. *Prof. A. Strnad.*

Úloha 20.

Jsou-li kořeny rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tangenty úhlů α, β, γ, za kterých podmínek jest

$$\alpha + \beta + \gamma = (2n+1)R \text{ aneb } \alpha + \beta + \gamma = 2nR?$$

Týž.

Úloha 21.

Budiž určena plocha trojúhelníka, jehož stran délky jsou kořeny rovnice

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0,$$

předpokládáme-li, že jsou kořeny ty všechny realné a kladné. *Týž.*

Úloha 22.

V rovnoramenném trojúhelníku jest poloměr ϱ kružnice vepsané a poloměr r kružnice opsané v poměru $3:8$. Vypočítati úhly tohoto trojúhelníka. *Týž.*

Úloha 23.

Dán jest n-úhelník, jehož vnitřní úhly jsou vesměs duté; v kolika bodech protínají se úhlopříčny uvnitř mnohoúhelníka toho, a kolik průsečíků vznikne vně, prodloužíme-li náležitě všechny úhlopříčny? *Týž*

Úloha 24.

Čtyrúhelník určen jest třemi stranami a dvěma úhly jimi sevřenými:

$$a = 155,\ b = 120,\ d = 128,$$
$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4},\ tg\ \frac{\beta}{2} = \frac{4}{5}.$$

Budiž dokázáno, že čtyrúhelníku tomu lze kružnici opsati i vepsati, a poloměry těchto kružnic buďtež ustanoveny.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 25.

O normále ellipsy buď dokázáno, že část její obsažená mezi bodem křivky a osou vedlejší dělena jest osou hlavní v poměru stálém. *Týž.*

Úloha 26.

Do různoběžníka daného vepsati jest rovnoběžník, jehož stran směry jsou dány.

(Úlohu tuto lze výhodně řešiti užitím deskriptivní geometrie). *Týž.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

V osmém programě c. k. státního nižšího gymnasia v Třebíči na konci školního roku 1885. podána stať:

„O síle odstředivé.“ Napsal *Jaroslav Simonides.* (5 stran.)

Kapitola o síle odstředivé patří k nejchoulostivějším částem mechaniky, anaž předpokládá velmi jemné upotřebení Newtonova principu stejné akce a reakce. Způsob, jakým se pojem síly odstředivé obyčejně v učebnicích uvádí, jest nedostatečný a z *toho stanoviska* zcela oprávněna kritika p. Simonidesa v článku uvedeném. Taktéž zasluhuje uznání jeho pečlivý rozbor úkazů sem patřících; leč p. spisovatel patrně se ukvapuje, dospívaje na základě svých úvah k naprostému zavrhování „síly odstředivé.“ Mluvě o zbytečnosti zvláštního *pojmenování* pro *reakci* na sílu dostředivou (str. 7), naznačuje tím sám zjevně celý spor za spor o *pouhý název*, neb možno i říci za spor etiketní, t. j. tvrdí vlastně jen, že ona od něho též uznávaná a fakticky existující reakce proti dostředivé síle není tak důležitým zjevem, aby zasluhovala zvláštního pojmenování. To jest konečně otázka opportunity, neb chceme-li paedagogiky — i rádi přiznáváme, že možno, ano nutno vyšetřovati, zda-li obecně užívaný název