Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Elznic

Transformace geodetických zeměpisných souřadnic na mezinarodní elipsoid

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 1, 33--48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109026

Transformace geodetických zeměpisných souřadnic na mezinárodní elipsoid.

Ing. Dr. Václav Elznic, Praha.

(Došlo 15. 3. 1947.)

Otázkou transformace zeměpisných souřadnic geodetických s jedné plochy elipsoidické na druhou jsem se zabýval v úvodu svých tabulek „*Transeuro*" (Tabulky pro řešení hlavní geodetické úlohy na mezinárodním elipsoidu v zeměpisných šířkách 35° — 70°; vyšlo v časopise „Zprávy o technické službě", čís. 20., roč. 1944*)), kde jsem také uvedl důvod této úvahy.

Při svém zasedání r. 1924 v Madridě rozhodla „Union géodésique et géophysique international", že napříště se mají všechny geodetické práce vykonávati na jednotné referenční ploše mezinárodního elipsoidu, jehož rozměry vypočetl z astronomicko-geodetické sítě USA r. 1910 sir John Hayford[1]) takto:

$$\text{velká poloosa} \ldots\ldots\ a = 6378\,388 \text{ m} \pm 35 \text{ m},$$
$$\text{malá poloosa} \ldots\ldots\ b = 6356\,912 \text{ m},$$
$$\text{zploštění} \ldots\ldots\ \frac{a-b}{a} = i = 1 : 297 \pm 0{,}8.$$

I když připustíme oprávněnost námitek (zejména ruských geodetů, hlavně prof. F. N. Krasovského) proti těmto rozměrům a proti označení „mezinárodního" elipsoidu (Hayford použil pouze sítí USA a vůbec nedbal rozsáhlých sítí evropských s význačnými oblouky poledníkovými a rovnoběžkovými, na př. meridianového oblouku západoevropského, oblouku Struveova, rovnoběžkového oblouku podél 52°, ale nepoužil ani jiných dobrých měření, jako v Přední Indii a pod.), přece musíme připustiti, že nelze vůbec očekávati větších odchylek od skutečného všeobecného elipsoidu, vypočteného ze všech dosud známých měření, ze kterých dnes nejvýznačnější místo zaujímá rozsáhlá řetězcová síť SSSR. Důkazem toho jsou Krasovského studie v tomto směru (uveřejněné

*) Nyní „Zprávy veřejné služby technické".

[1]) John Hayford: The Figure of the Earth, Washington 1910. Hayfordem uváděnou střední chybu ± 18 m opravil na ± 35 Helmert.

v roce 1935 v časopise Geodezist), ke kterým použil a upravil výsledky všech do té doby známých měření, a vypočetl, že dávají

sítě SSSR.........	$a = 6378\,182 \pm 96$ m,	$i = 1 : 298{,}97 \pm 2{,}0$
	$6378\,097$ m pro	$i = 1 : 297$
sítě USA	$a = 6378\,383 \pm 52$ m,	$i = 1 : 297{,}70 \pm 1{,}6$
	$6378\,371$ m pro	$i = 1 : 297$
sítě Evropy a SSSR	$a = 6378\,247 \pm 58$ m,	$i = 1 : 300{,}59 \pm 1{,}4$
	$6378\,129$ m pro	$i = 1 : 297$
sítě Evropy a USA	$a = 6378\,373 \pm 35$ m,	$i = 1 : 298{,}24 \pm 1{,}1$
	$6378\,356$ m pro	$i = 1 : 297$
sítě Evropy, SSSR a USA	$a = 6378\,338 \pm 32$ m,	$i = 1 : 299{,}97 \pm 0{,}8$
	$6378\,268$ m pro	$i = 1 : 297$.

Tím vlastně potvrdil, že rozměry Hayfordovy dobře vyhovují i oblastem euro-asijské pevniny. Nelze ovšem vyvrátiti námitku, že mezinárodní elipsoid byl odvozen pouze ze sítě jediného zemědílu, a rozhodnutí Mezinárodní geodetické a geofysikální Unie se týkalo výpočtu z geodetického materiálu 14 let starého. V roce 1910 měl Hayford k disposici pouze 20 000 km triangulačních řetězců, zatím co do r. 1922 přibylo dalších 7 500 km, a od r. 1922—30 přibývalo ročně 1 400 km, od r. 1930 dokonce ročně 4 000 km řetězců.

Hayford nepoužil ani jiných prací v té době hotových. Dnes ovšem stav daleko pokročil. Tak Japonsko, které začalo triangulovat v r. 1888 má na své ostrovní říši úplnou síť I. řádu, která dává oblouk 16° dlouhý. Kanada začala s budováním triangulací r. 1906 a r. 1936 měla již 10 000 km triangulačních řetězců. Podobně Mexiko, Brasilie a Argentina mají značnou část země pokrytou novými triangulacemi. V Africe se buduje meridianový oblouk z Kaira k Mysu Dobré Naděje podél 30. poledníku a jeho veliká část je hotova. V Evropě se budoval podle Boškovičova návrhu oblouk z Kréty až k Murmaňsku a studovala se možnost spojení s obloukem africkým; tím by vznikl gigantický meridianový oblouk amplitudy 109°.

Dále je celá střední Evropa pokryta soustavnou plošnou triangulací a již v r. 1900 bylo zde k disposici 7 000 trojúhelníků stupňového měření. Od té doby přibylo úžasné množství sítí. Jen v SSSR bylo v r. 1935 na 30 000 km triangulačních řetězců I. řádu vysoké přesnosti, a ročně jich přibývá asi 5 000 km. Síť v té době obsahovala 73 základen a každá z nich měla oba koncové body určeny astronomickými zeměpisnými souřadnicemi a azimutem; kromě toho bylo v té době určeno dalších 176 Laplaceových bodů. V roce 1936 ukončil SSSR dosud nedosaženou délku rovnoběžkového oblouku mezi 52. a 54. rovnoběžkou a mezi 27. a 137. poledníkem, tedy o amplitudě 110°. Připojíme-li k němu evropský oblouk

52. rovnoběžky, činí amplituda oblouku z Irska až po Chabarovsk plných 145°. Kromě toho Krasovský namítá proti Hayfordovu výpočtu, že v Evropě je nepoměrně příznivější poloha sítí, a zejména sítí v SSSR, kde v nepřehledných rovinách činí střední hodnota tížnicové odchylky kolem 2″ a jen výjimečně dosahuje 10″. Naproti tomu Hayfordovy výpočty nejsou ušetřeny tížnicových odchylek přesahujících 100″, a několikadesítkové odchylky jsou pravidlem.

Přesto potvrzují výpočty Krasovského dobrou práci Hayfordovu, a hlavně praktickou cenu a správnost isostatické redukce, kterou tu Hayford poprvé užil ve velkém rozsahu podle vlastní methody. Ovšem ve střední Evropě užívaný elipsoid Besselův s rozměry

$$a = 6377\,397{,}15 \text{ m}$$
$$b = 6356\,078{,}96 \text{ m}$$
$$i = 1 : 299{,}15$$

je skutečným rozměrům Země velmi vzdálen, a evropské pevnině by spíše vyhovoval elipsoid Clarkův s Besselovým zploštěním. I tuto alternativu Krasovský připouští, neboť se mu zdá Besselovo zploštění lepší než Hayfordovo, a pouhá změna rozměrů velké poloosy by transformace velmi zjednodušila. Rovnice (1) na str. 37 by podržely pouze prvý člen, takže by

$$d\varphi = A\, s \cos \alpha_2,$$
$$d\lambda = B\, s \sin \alpha_2,$$
$$d\alpha = C\, s \sin \alpha_2,$$

neboť součinitele A, B, C by bylo lze tabelovati ve vhodném intervalu.

Nehodlám posuzovati oprávněnost námitek, ale jistě každý geodet a matematik musí připustiti skutečnost již s ohledem na rozhodnutí Mezinárodní geodetické a geofysikální Unie, že Besselův i jiné elipsoidy dosud užívané bude nutno opustiti a veškeré výpočty resp. výsledky převésti na elipsoid mezinárodní, ať již Hayfordův či jiný, pokročí-li vývoj této otázky dále. Hayfordova elipsoidu používá zatím jen Belgie, Bulharsko, Dánsko, Finsko, Italie, Portugalsko a Rumunsko.

Z řady různých rozměrů Země jsou pro mapy evropských států užívány dodnes tyto referenční elipsoidické plochy:

Airy (1830)	$a = 6377\,542{,}178$ m $b = 6356\,235{,}765$ m $i = 1 : 299{,}325$	Velká Britannie
Bessel (1841)	$a = 6377\,397{,}155$ m $b = 6356\,078{,}963$ m $i = 1 : 299{,}153$	ČSR, SSSR, Polsko, Jugoslovie, Řecko, Italie, Albansko, Holandsko, Norsko, Portugalsko, Rumunsko, Švýcarsko, Maďarsko, Německo.

Hayford (1910)	a = 6378 388,000 m b = 6356 911,946 m i = 1 : 297,000	Belgie od r. 1924, Bulharsko 1919, Dánsko 1934, Finsko 1924, Italie 1930, Portugalsko 1927, Rumunsko od r. 1924.
Clarke I. (1880)	a = 6378 249,2 m b = 6356 515,0 m i = 1 : 293,466	Francie, některé staré sibiřské triangulace SSSR.
Clarke II. (1880)	a = 6378 253,00 m b = 6356 518,33 m i = 1 : 293,46	Turecko, Rumunsko (1916).
Dánský elipsoid	a = 6377 104,43 m b = 6355 847,42 m i = 1 : 300	Dánsko do r. 1934.
Delambre (1806)	a = 6376 985 m b = 6356 323 m i = 1 : 308,647	Belgie do r. 1880.
Holandský elipsoid	a = 6376 950,4 m b = 6356 356,1 m i = 1 : 309,65	Holandsko do r. 1885
Plessis	a = 6376 523,3 m b = 6355 862,8 m i = 1 : 308,64	Francie (staré triangulace 1818 až 1855)
Schmidt	a = 6376 804,38 m b = 6355 690,52 m i = 1 : 302,02	Švýcarsko (staré triangulace z r. 1840)
Struve (1860)	a = 6378 298,3 m b = 6356 657,1 m i = 1 : 294,73	Španělsko
Svanberg	a = 6376 797 m b = 6355 838 m i = 1 : 304,25	Švédsko (od r. 1920 Besselův)

Tato pestrá směs rozměrů čeká na svoji mezinárodní unifikaci a musí se jí jednou dočkat, což vyžaduje nejen vědecký názor na geodetické základy kartografických prací, ale i praktický požadavek jednotné referenční plochy pro mezinárodní geodetické práce, spojení triangulací různých států a tím vytvoření mezinárodní trigonometrické sítě.

Nejednotnost geodetických prací je zvýšena ještě různými zobrazovacími způsoby na stejné referenční ploše. Zdá se, že budoucnost náleží válcové zobrazovací metodě Gauß-Krügerově, které dnes používá SSSR, Jugoslavie, Německo, Polsko, Italie, Norsko, Švédsko a Portugalsko (od r. 1924). Ale v Evropě nalezneme ještě celou řadu dalších způsobů zobrazovacích: Tak Velká Britannie má „British Modefied System", Polsko ještě Roussilhovu stereografickou projekci, Řecko azimutální projekci Hattovu, konformní kuželové zobrazení a Lambertovo modif. zobrazení, na jihu Italie modif. zobrazení Lambertovo, Albanie má italské zobrazení Bonneovo, Holandsko

Bonneovo zobrazení a konformní dvojitou projekci stereografickou, Portugalsko do r. 1927 zobrazení Bonneovo, Rumunsko od r. 1924 stereografickou projekci, ale část rovněž v zobrazení Bonneově, dunajskou oblast v modif. zobrazení Lambertově, Švýcarsko má zobrazení Bonneovo, Maďarsko stereografickou projekci, Belgie Lambertovo zobrazení, Dánsko zobrazení Buchwaldovo, od r. 1934 konformní zobrazení kuželové, Francie zobrazení Lambertovo, staré triangulace v zobrazení Bonneově, Turecko Bonneovo, teprve nově Gauß-Krügerovo a Španělsko zobrazení Lambertovo. Konečně jak známo, má ČSR obecné konformní zobrazení kuželové.

Lze si jen přáti, aby v zájmu jednotících prací byla evropská mezinárodní astronomicko-geodetická síť jako celek vyrovnána v době nejkratší (k tomu cíli zřídila Mezinárodní geodetická a geofysikální Unie komisi č. 12 „pro souborné vyrovnání evropských sítí„), a aby současně zmizela nejednotnost zobrazovacích ploch i prací kartografických. Je to v zájmu hospodářském i vědeckém, aby nová Evropa vešla v život s novým astronomicko-geodetickým a kartografickým základem.

Z celého úvodu je jasné, že unifikace referenční plochy elipsoidické je a bude otázkou nedaleké budoucnosti. Proto úloha v tomto pojednání řešená má nejen teoretický, ale i praktický význam. Že se zabývám převodem geodetických zeměpisných souřadnic na společnou novou plochu elipsoidickou vyplývá právě z popsaného kaleidoskopu referenčních ploch zobrazovacích nejrůznějšího druhu, se zcela samostatnými počátky bez vzájemné souvislosti. Do jisté míry a s jistými výhradami jsou jedině zeměpisné souřadnice společným systémem a vůbec lze míti za to, že nejspolehlivější převod souřadnic různého původu je transformace přes zeměpisné souřadnice, když zobrazovací soustavy jsou přesně matematicky definovány.

Změnou parametrů elipsoidické plochy se změní i geodetické zeměpisné souřadnice a to podle diferenciálních vzorců, které jsou uvedeny v knize: Jordan-Eggert: „Handbuch der Vermesssungskunde“, sv. III/2, str. 430—434 v tomto tvaru:

$$
\begin{aligned}
d\varphi_2 &= \frac{\varrho}{aM_2}\, s \cos\alpha_2\, da + \\
&\quad + \left(2(\varphi_2 - \varphi_1) - 3(\varphi_2 - \varphi_1)\sin^2\varphi + \frac{l^2}{2\varrho}\, sin^3\varphi \cos\varphi\right) di \\
d\lambda_2 &= \frac{\varrho}{aN_2}\, s \sin\alpha_2 \sec\varphi_2\, da - l \sin^2\varphi_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\, di \qquad (1) \\
d\alpha_2 &= \frac{\varrho}{aN_2}\, s \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\varphi_2\, da - \\
&\quad - \left(\frac{l \sin^2\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - \frac{l}{\varrho}(\varphi_2 - \varphi_1)\cos^3\varphi_1\right) di
\end{aligned}
$$

V uvedených rovnicích je řada známých označení, které v dalším pro udržení souvislosti ponecháme: M poloměr poledníkové křivosti, N poloměr příčné křivosti, φ zeměpisná šířka; připojené indexy vyznačují příslušnost bodů *1*, *2* geodetické čáry délky s, α_2 zpětný azimut, radiant $\varrho = 206\,264{,}80625$, $l = \lambda_2 - \lambda_1$, t. j. rozdíl zeměpisných délek, a velká poloosa průřezové elipsy, da je změna rozměru velké poloosy, di změna jejího zploštění. V dalším se ještě setkáme se Schreiberovými symboly $(1) = \varrho/M$, $(2) = \varrho/N$.

Vzorce nejsou právě vhodně upraveny pro číselný výpočet, a pro kontrolu geodetického přenášení zeměpisných souřadnic jsem je upravil v jednodušší a přehlednější tvar:

$$\begin{aligned} d\varphi_2 &= (1)_2\, s \cos\alpha_2 \,.\, \frac{da}{a} + (2 - 3\sin^2\varphi_m)\,\Delta\varphi \,.\, di \\ d\lambda_2 &= (2)_2\, s \sin\alpha_2 \sec\varphi_2 \,.\, \frac{da}{a} - \sin^2\varphi_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\,\Delta\lambda \,.\, di \qquad (2) \\ d\alpha_2 &= (2)_2\, s \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \,.\, \frac{da}{a} - \sin^3\varphi_m \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\,\Delta\lambda \,.\, di \end{aligned}$$

Z nových označení tu přichází střední zeměpisná šířka $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, a rozdíl zeměpisných šířek koncových bodů geodet. čáry je označen $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, podobně rozdíl délek je $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = l$.

Členy, které jsem vypustil ze složitých rovnic původních jsou vesměs řádu nižšího než 0,0001″, takže upravené diferenciální rovnice udržují přesnost požadovanou při přenosu geodetických zeměpisných souřadnic v síti bodů I. řádu, t. j. $\pm$ 0,0001″ v souřadnicích a $\pm$ 0,001″ v azimutě. Rovnice jsou tím jednodušší, že pro určitou dvojici elipsoidů jsou da/a a di konstantami, jak plyne z příkladů.

O. Schreiber ve svých tabulkách pro výpočet geodetických zeměpisných souřadnic na Besselově elipsoidu uvádí příklad, kde je dán počáteční bod souřadnicemi $\varphi_1 = 57^0$ a $\lambda_1 = 31^0$; geodetická čára délky $s = 120$ km má azimut $\alpha_1 = 135^0$. Stejnou úlohu řeší Ölander v podobných tabulkách pro elipsoid Hayfordův. Vlivem různých rozměrů elipsoidů jsou i výsledky výpočtu odlišné, jak vidíme z tohoto srovnání:

Hayford:	$\varphi_2 = 56^0 13' 49{,}4628''$		Hayford:	$\lambda_2 = 32^0 22' 05{,}2005''$	
Bessel:	$\varphi_2 = 56^0 13' 49{,}0218''$		Bessel:	$\lambda_2 = 32^0 22' 06{,}0327''$	
rozdíl:	$d\varphi_2 =$	$+\ 0{,}4410''$	rozdíl:	$d\lambda_2 =$	$-\ 0{,}8322''$

Hayford:	$\alpha_2 = 316^0 08' 32{,}663''$	
Bessel:	$\alpha_2 = 316^0 08' 33{,}355''$	
rozdíl:	$d\alpha_2 =$	$-\ 0{,}692''$.

Kontrolu správnosti výpočtu lze provésti za pomocí našich vzorců (2) pro $d\varphi_2$, $d\lambda_2$, $d\alpha_2$:

$$\begin{aligned} &\text{Hayford:} \quad a = 6378\,388{,}000 \text{ m} \\ &\text{Bessel:} \quad a = 6377\,397{,}154 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = \frac{6378\,388{,}00 - 6377\,397{,}15}{6377\,397{,}15} = +\,0{,}00015\,53684$$

$$\begin{aligned} \text{Bessel:} \quad i &= 0{,}0033\,4277 \\ \text{Hayford:} \quad i &= 0{,}0033\,6700 \\ \hline di &= -\,0{,}0000\,2423 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)_2 &= 0{,}03233\,545 & \varphi_1 &= 57^0 \\ (2)_2 &= 0{,}03226\,836 & \varphi_2 &= 56^0 13' 49{,}0218'' \\ \Delta\lambda &= 1^0 22' 06{,}0327'' & \Delta\varphi &= -\,46' 10{,}9782'' \\ &= 4926{,}0327'' & &= -\,2770{,}9782'' \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 56^0 36' 55''.$$

Vyčíslením vzorců dostaneme:

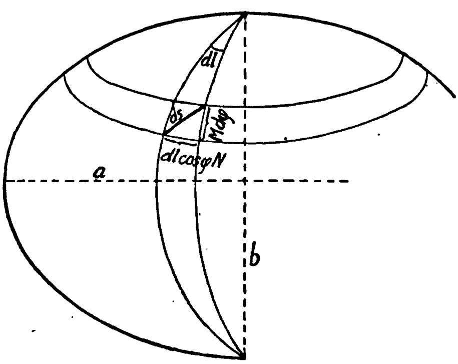
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_2 &= +\,0{,}4409'' & &\text{má býti } +\,0{,}4410'' \\ \mathrm{d}\lambda_2 &= -\,0{,}8322'' & &-\,0{,}8322'' \\ \mathrm{d}\alpha_2 &= -\,0{,}692'' & &-\,0{,}692''. \end{aligned}$$

Pro transformaci souřadnic bodů celostátních triangulací s jedné elipsoidické plochy na druhou je třeba zavésti vhodnější, rychlejší, hlavně ale systematický a jednotný způsob a postup, vyhovující přesností i bodům značně vzdáleným od centrálního bodu státní triangulace. Jak z dalšího vyplyne, může býti „centrální,, bod zcela libovolný, dokonce i fiktivní, protože nemusí býti souřadnicovým počátkem původní nebo snad nové soustavy. Jako nejvhodnější transformační způsob můžeme označiti takový, jehož transformační rovnice by obsahovaly výhradně členy s argumentem elementů centrálního bodu a nikoliv transformovaných bodů, čímž složité výrazy nabudou charakteru konstantních součinitelů.

A ještě jednu poznámku musíme připojiti k otázce „transformace" zeměpisných souřadnic na mezinárodní elipsoid. Na rozdíl od transformací souřadnic různých zobrazovacích rovin, nepředpokládáme tu žádné totožné body obou soustav pro vytvoření transformačních rovnic (na př. Helmertova způsobu podobnosti, Tissotova způsobu affinní transformace, Gaußovy konformní transformace, Merkelovy projektivní transformace, a pod.), nýbrž tu jde o skutečné „převedení" geodetických zeměpisných souřadnic s jedné plochy na druhou. Stupňová síť zeměpisných souřadnic na obou elipsoidických plochách se sice nemění, ale v důsledku různých rozměrů obou těles jsou její rozměry různé.

Převod můžeme uskutečniti tím způsobem, že zvolíme vhodný centrální bod (na př. průsečík stupně poledníku se stupněm rovnoběžky, které jsou na obou elipsoidech společnými křivkami), a spojíme jej se všemi body triangulace. Pro každou spojnici vypočteme délku a azimut na prvém (původním) elipsoidě, a s těmito prvky provedeme přenos souřadnic na elipsoidu druhém (novém). Navržený způsob je velmi způsobilý pro praktický výpočet, umíme-li vhodně odstraniti prvou část úlohy, t. j. výpočet délky strany a azimutu, která při velkém počtu bodů a značných délkách stran by činila nemalé počtářské potíže (okrajové body triangulace u nás by měly od centrálního bodu na př. $\varphi_0 = 49^0$, $\lambda_0 = 17^0$ vzdálenosti až 400 km).

Abychom tuto nesnáz odstranili, vyjdeme z vět o geodetické čáře, kterou v naší úloze skutečně představuje každá spojnice trigonometrického bodu s bodem centrálním. Pro element ds křivky (nerozhoduje jaké) na elipsoidě v místě s poloměrem poledníkové křivosti M a příčné křivosti N platí podle náčrtu:



$$\mathrm{d}s^2 = M^2 \mathrm{d}\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi \,\mathrm{d}l^2$$

čili

$$\mathrm{d}s = \sqrt{M^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}\right)^2 + N^2 \cos^2 \varphi}\, \mathrm{d}l = U\, \mathrm{d}l.$$

Integrací této funkce obdržíme výraz pro délku oblouku:

$$s = \int_{l_1}^{l_2} U . \mathrm{d}l.$$

Řešení se stane určitým, když stanovíme charakter křivky; jak známo, je takovou křivkou pro účely geodetické nejkratší spojnice dvou bodů na elipsoidické ploše. Místo funkce $\varphi = f(l)$ položíme řadu funkcí s proměnlivým parametrem ε, které představují řadu křivek, které všechny procházejí oběma body:

$$\varphi_1 = f\,(l_1, \varepsilon), \qquad \varphi_2 = f\,(l_2, \varepsilon), \qquad \text{atd.};$$

z nich je minimální ta, pro kterou $\varepsilon = 0$, t. j. pro kterou $\partial s/\partial \varepsilon$ pro

$\varepsilon = 0$ je nula. Diferencování integrálu dává

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \, dl$$

a jelikož U je funkcí φ a $d\varphi/dl$, dostaneme výraz geodetické čáry

$$\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial l \partial \varepsilon} \right) dl$$

pro kterou známe diferenciální vzorce (viz Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, III/2, str. 69):

$$\begin{aligned} ds \cos \alpha &= M . d\varphi \\ ds \sin \alpha &= N \cos \varphi . dl \\ d\alpha &= dl . \sin \varphi \end{aligned} \tag{3}$$

ve kterých jsou:

$$M = \frac{c}{V^3}, \quad N = \frac{c}{V}, \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

$$e' \cos \varphi = \eta, \quad \text{čili} \quad V^2 = 1 + \eta^2, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad c = \frac{a^2}{b},$$

dále $t = \operatorname{tg} \varphi$, $u = s \cos \alpha$, $v = s \sin \alpha$, (pro geodetickou čáru délky s a azimutu α).

Na základě diferenciálních rovnic (3) odvodil Jordan (l. c. III/2, § 18) rovnice, které vyjadřují vztah mezi zeměpisnými souřadnicemi koncových bodů geodetické čáry a její délkou i azimutem. Jordanovy rovnice převeďme na sférickou plochu poloměru N a obdržíme:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} &= \frac{\varrho}{N} u - \frac{3\varrho}{2N^2} \eta^2 t u^2 - \frac{\varrho t}{2N^2} v^2 - \frac{\varrho}{6N^3} (1 + 3t^2 + \eta^2 - \\ &\quad - 9\eta^2 t^2) uv^2 - \frac{\varrho \eta^2}{2N^3} (1 - t^2) u^3 + \frac{\varrho t}{24N^4} (1 + 3t^2) v^4 - \\ &\quad - \frac{\varrho t}{6N^4} (2 + 3\, t^2) u^2 v^2; \\ l \cos \varphi &= \frac{\varrho}{N} v + \frac{\varrho t}{N^2} uv - \frac{\varrho t^2}{3N^3} v^3 + \frac{\varrho}{3N^3} (1 + 3t^2 + \eta^2) u^2 v - \\ &\quad - \frac{\varrho t}{3N^4} (1 + 3t^2) uv^3 + \frac{\varrho t}{3N^4} (2 + 3t^2) u^3 v; \\ \Delta\alpha &= \frac{\varrho t}{N} v + \frac{\varrho}{2N^2} (1 + 2t^2 + \eta^2) uv - \frac{\varrho t}{6N^3} (1 + 2t^2 + \eta^2) v^3 + \\ &\quad + \frac{\varrho t}{6N^3} (5 + 6t^2) u^2 v - \frac{\varrho}{24N^4} (1 + 20t^2 + 24t^4) uv^3 + \\ &\quad + \frac{\varrho}{24N^4} (5 + 28t^2 + 24t^4) u^3 v. \end{aligned} \tag{4}$$

V geodetické literatuře nemáme dosud výrazy pro obrácené řady, vyplývající z řešení 2. hlavní geodetické úlohy, kterých dosud nebylo třeba. Nazveme-li $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$, $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$, obdržíme inversí geodetických řad (4) tyto rovnice:

$$\frac{u}{N} = \frac{1}{\varrho V^2} \cdot \Delta\varphi + \frac{3\eta^2 t}{2\varrho^2 V^2} \cdot \Delta\varphi^2 + \frac{1}{2\varrho^2} \cos^2\varphi \cdot \Delta\lambda^2 +$$
$$+ \frac{\eta^2}{2\varrho^3}(1 - t^2) \cdot \Delta\varphi^3 + \frac{\cos^2\varphi}{6\varrho^3}(1 - 3t^2 + 3\eta^2 t^2) \cdot \Delta\varphi\Delta\lambda^2 -$$
$$- \frac{t\cos^2\varphi}{3\varrho^4} \cdot \Delta\varphi^2\Delta\lambda^2 + \frac{t\cos^4\varphi}{24\varrho^4}(1 - t^2) \cdot \Delta\lambda^4; \tag{5}$$
$$\frac{v}{N\cos\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\varrho} - \frac{t}{\varrho^2 V^2} \cdot \Delta\varphi\Delta\lambda - \frac{\sin^2\varphi}{6\varrho^3} \cdot \Delta\lambda^3 - \frac{1}{6\varrho^3}(2 - 2\eta^2 +$$
$$+ 9\eta^2 t^2) \cdot \Delta\varphi^2\Delta\lambda - \frac{t\cos^2\varphi}{6\varrho^4}(1 - t^2) \cdot \Delta\varphi\Delta\lambda^3;$$
$$\Delta\alpha = \sin\varphi \cdot \Delta\lambda + \tfrac{1}{2}\cos\varphi \cdot \Delta\varphi\Delta\lambda + \tfrac{1}{12}\cos^2\sin\varphi \cdot \Delta\lambda^3.$$

V rovnicích (4) i (5) se všechny koeficienty vztahují k šířce φ_1. Jelikož podle dřívějšího $V^2 = 1 + \eta^2$, a pro geodetické čáry do 500 až 600 km můžeme s ohledem na danou úlohu podržeti členy nejvýš 3. řádu, lze rovnice (4) vyjádřiti analyticky ve zkrácené formě takto:

$$\Delta\varphi = \frac{1 + \eta^2}{N} u - \frac{t(1 + \eta^2)}{2N^2} v^2 - \frac{3t\eta^2}{2N^2} u^2 - \frac{(1 + 3t^2) + (1 - 9t^2\eta^2)}{6N^3} uv^2$$
$$\Delta\lambda = \frac{1}{N\cos\varphi} v + \frac{t}{N^2\cos\varphi} uv - \frac{t^2}{3N^3\cos\varphi} v^3 + \frac{(1 + 3t^2) + \eta^2}{3N^3\cos\varphi} u^2 v. \tag{6}$$

Teprve v této úpravě jsou rovnice vhodné pro vyjádření změn, které se projeví v $\Delta\varphi$ a $\Delta\lambda$ změnou parametrů elipsoidu. Původně známé změny v rozměrech elipsoidu da a di se tu neuplatňují, protože nyní je elipsoid zemský definován hodnotou příčné křivosti N a funkcí numerické výstřednosti $\eta^2 = f(e'^2)$.

Považujme parciální diferenciální podíly rovnic (6) podle N a η^2 za skutečné odchylky; diferencováním dostáváme:

$$\mathrm{d}\varphi = \left(-\frac{1 + \eta^2}{N^2} u + \frac{t(1 + \eta^2)}{N^3} v^2 + \frac{3t\eta^2}{N^3} u^2 + \frac{1 + 3t^2}{2N^4} uv^2\right)\mathrm{d}N$$
$$+ \left(\frac{1}{N} u - \frac{t}{2N^2} v^2 - \frac{3t}{2N^2} u^2 - \frac{1 - 9t^2}{6N^3} uv^2\right)\mathrm{d}(\eta^2); \tag{7}$$

$$d\lambda = \left(-\frac{1}{N^2 \cos\varphi} v - \frac{2t}{N^3 \cos\varphi} uv + \frac{t^2}{N^4 \cos\varphi} v^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1 + 3t^2 + \eta^2}{N^4 \cos\varphi} u^2 v\right) dN + \left(\frac{1}{3N^3 \cos\varphi} u^2 v\right) d(\eta^2).$$

Dosadíme-li konečně $u = s \cos\varphi$ a $v = s \sin\varphi$ z rovnic (5) do (7) dostáváme po úpravě a vyloučení číselně nepatrných členů tyto rovnice:

$$d\varphi = \left[-\frac{dN}{N} + (1 - \eta^2)\, d(\eta^2)\right] \Delta\varphi + \left[\frac{dN}{N}\frac{2}{3}\frac{t\eta^2}{\varrho} - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\frac{t(1 - 3\eta^2)}{\varrho} d(\eta^2)\right] \Delta\varphi^2 + \left[\frac{dN}{N}\frac{t \cos^2\varphi}{2\varrho}(1 + \eta^2)\right] \Delta\lambda^2 +$$
$$+ \left[\frac{dN}{N}\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{t\cos\varphi}{\varrho}\right)^2 d(\eta^2)\right] \Delta\varphi\Delta\lambda^2 \tag{8}$$
$$d\lambda = \left[-\frac{dN}{N}\right] \Delta\lambda + \left[-\frac{dN}{N}\frac{t(1 - \eta^2)}{\varrho}\right] \Delta\varphi\Delta\lambda +$$
$$+ \left[-\frac{dN}{N}\frac{(2 + 3t^2)}{3\varrho^2}\right] \Delta\varphi^2\Delta\lambda + \left[\frac{dN}{N}\frac{1}{6}\left(\frac{t\cos\varphi}{\varrho}\right)^2 + \frac{1}{3\varrho^2} d(\eta^2)\right] \Delta\lambda^3.$$

Nazveme-li nyní součinitele v hranatých závorkách prvé rovnice A_1, A_2, A_3, A_4, druhé rovnice B_1, B_2, B_3, B_4, jsou **obecné** rovnice oprav pro převod zeměpisných souřadnic s jedné elipsoidické plochy na druhou

$$\begin{aligned} d\varphi &= A_1 \Delta\varphi + A_2 \Delta\varphi^2 + A_3 \Delta\lambda^2 + A_4 \Delta\varphi\Delta\lambda^2 \\ d\lambda &= B_1 \Delta\lambda + B_2 \Delta\varphi\Delta\lambda + B_3 \Delta\lambda^3 + B_4 \Delta\varphi^2\Delta\lambda \end{aligned} \tag{9}$$

Hodnota dN/N má v čitateli rozdíl poloměrů příčné křivosti v centrálním bodě na obou elipsoidech (a bude tudíž při přechodu s elipsoidu Besselova na Hayfordův kladná); protože

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi, \quad \text{jest} \quad d(\eta^2) = d(e'^2) \cos^2\varphi \tag{10}$$

a pro cestu s Besselova elipsoidu na Hayfordův jest

$$d(\eta^2) = +\, 0{,}00004\ 89514 \cos^2\varphi.$$

Rovnice (9) představují tudíž jednoduchou transformační cestu pro převod geodetických souřadnic zeměpisných s jedné elipsoidické plochy na druhou. Pro číselný příklad zvolme úlohu již dříve počítanou. Jako centrální bod budiž na Besselově elipsoidu P_1, jehož $\varphi_1 = 57^0$, $\lambda_1 = 31^0$. Úlohou je převésti geodetické zeměpisné souřadnice bodu $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$:

$\varphi_1 = 57^0 00'$	$\lambda_1 = 31^0 00'$
$\varphi_2 = 56^0 13' 49{,}0218''$	$\lambda_2 = 32^0 22' 06{,}0327''$
$\Delta\varphi = -\, 46' 10{,}9782''$	$\Delta\lambda = +\, 1^0 22' 06{,}0327''$
$= -\, 2770{,}9782''$	$= +\, 4926{,}0327''$

Pro centrální bod, jehož $\varphi = 57^0$, jest N (index B = elipsoid Besselův, index H = elipsoid Hayfordův):

$$\log N_B = 6{,}80566\,52708, \quad \log N_H = 6{,}80574\,01529$$

čili

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{N_H - N_B}{N_B} = +\,0{,}00017\,24368$$

$$\mathrm{d}(\eta^2) = +\,0{,}00001\,45205$$

$$t = 1{,}53986 \qquad t^2 = 2{,}37117 \qquad \varrho = 206\,265$$

$$\eta^2 = 0{,}00199 \qquad 1 - \eta^2 = 0{,}99801 \qquad \cos^2\varphi = 0{,}29663$$

Součinitelé rovnic (9):

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\,0{,}00015\,79452\\
A_2 &= -\,0{,}00000\,00001\,57790\\
A_3 &= +\,0{,}00000\,00001\,91308\,43311\\
A_4 &= +\,0{,}00000\,00000\,00000\,52077\\
B_1 &= -\,0{,}00017\,24368\\
B_2 &= -\,0{,}00000\,00012\,84755\\
B_3 &= -\,0{,}00000\,00000\,00012\,31242\\
B_4 &= +\,0{,}00000\,00000\,00000\,58889
\end{aligned}$$

Pro přehledný výpočet vyjádříme $\Delta\varphi$ a $\Delta\lambda$ v desetitisících vteřin jako jednotkách, čili $\Delta\varphi = -\,0{,}2771$, $\Delta\lambda = +\,0{,}4926$, takže v rovnicích (9) jest

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= -\,0{,}2771 & \Delta\lambda &= +\,0{,}4926\\
\Delta\varphi^2 &= +\,0{,}0768 & \Delta\varphi\Delta\lambda &= -\,0{,}1365\\
\Delta\lambda^2 &= +\,0{,}2427 & \Delta\varphi^2\Delta\lambda &= +\,0{,}0378\\
\Delta\varphi\Delta\lambda^2 &= -\,0{,}0672 & \Delta\lambda^3 &= +\,0{,}1195
\end{aligned}$$

a rovnice pro transformaci na Hayfordův elipsoid s centrálním bodem $\varphi = 57^0$ jsou

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi = &-\,1{,}5794\,\Delta\varphi & \mathrm{d}\lambda = &-\,1{,}7244\,\Delta\lambda\\
&-\,0{,}0158\,\Delta\varphi^2 & &-\,0{,}1285\,\Delta\varphi\Delta\lambda\\
&+\,0{,}0191\,\Delta\lambda^2 & &-\,0{,}0123\,\Delta\varphi^2\Delta\lambda\\
&+\,0{,}0005\,\Delta\varphi\Delta\lambda^2 & &-\,0{,}0006\,\Delta\lambda^3
\end{aligned}$$

Tím je úloha rozřešena a jak je patrno, vede k velmi jednoduchému počtu. Pro danou úlohu dostáváme tento výsledek:

transformací	$\mathrm{d}\varphi = +\,0{,}4410''$	$\mathrm{d}\lambda = -\,0{,}8322''$
geodetickým přenosem ...	$= +\,0{,}4410''$	$= -\,0{,}8322''$
redukčními vzorci (2)	$= +\,0{,}4409''$	$= -\,0{,}8322''$.

Jakmile bude rozhodnuto přepočísti trigonometrické sítě na jednotný elipsoid, bude míti způsob zde uvedený nesporný význam pro svou jednoduchost, nutnou při transformaci značného množství bodů.

Závěr.

Problém daný nadpisem článku je v podstatě kartografickou úlohou zobrazení elipsoidu na plochu druhého elipsoidu, při čemž jsou předpokládány relativně malé změny parametrů, takže lze užíti v konvergentních řadách koeficientů odvozených z diferenciálních poměrů. Zásadně by bylo třeba klásti požadavek, aby nové zobrazení bylo konformní, t. j. aby úhly zůstaly pokud možno nezměněny. Uvedené řešení pomocí polárních souřadnic (s pólem v centrálním bodě triangulace) není zobrazením konformním, nýbrž azimutální projekcí s neskreslenými délkami, které je charakterisováno minimálním skreslením délkovým, ale značným skreslením úhlovým. Největší délkové skreslení mají geodetické kružnice se středem v centrálním bodě, nejmenší skreslení pak její průvodiče, neboť zobrazením se jejich délka nemění. Rovněž azimuty těchto průvodičů (paprsků) zůstávají nezměněny. Tím se toto zobrazení podobá stereografické projekci, která však mimo to je konformní.

Převod geodetických zeměpisných souřadnic na jinou elipsoidickou plochu uvedl prvý Helmert, který na rozdíl od zeměpisných souřadnic astronomických φ, λ, α, označil souřadnice geodetické B (Breite), L (Länge), A (Azimut). Nevhodnost transformačních rovnic, které obsahují délky geodetických čar s a jejich azimuty α byla vytčena již dříve. Bez hledání jiné cesty upravila geodetická služba německé branné moci rovnice Jordanovy (1) a Helmertovy*, ve kterých argument centrálního bodu je označen indexem 0, koncového bodu geodetické čáry indexem 1, $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1)$.

Jordanovy rovnice:

$$d\varphi = \left(-\Delta\varphi + \frac{\Delta\lambda^2}{2\varrho}\sin\varphi_0\cos\varphi_0\right)\frac{da}{a} + (\Delta\varphi\,(2 - 3\sin^2\varphi_m) + \\ + \frac{\Delta\lambda^2}{2\varrho}\sin^3\varphi_m\cos\varphi_m)\,di \quad (11)$$

$$d\lambda = -\Delta\lambda\left(\frac{da}{a} + \sin^2\varphi_0\,di\right)\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}.$$

Helmertovy rovnice:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\Delta\varphi\frac{da}{a} + (2\,\Delta\varphi\cos^2\varphi_m - p_5\sin^2\varphi_m),\\ d\lambda &= -\Delta l\frac{da}{a} - q_5\sin^2\varphi_0\,di, \\ p_5 &= \Delta\varphi - \frac{\Delta\lambda^2}{4\varrho}\sin^2 2\varphi_m, \qquad q_5 = \Delta\lambda\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

*) R. Helmert: Veröffentlichungen des Kgl. Preußischen Geodät. Institutes, Berlin 1886, Lotabweichungen, Heft I.

Ani tyto rovnice nejsou nejvhodnějším tvarem, neboť téměř všechny členy obsahují proměnlivé argumenty pro různé body sítě. Prof. Vl. K. Hristov vyšel při svém řešení (rovněž azimutálním pomocí polárních souřadnic) z Jordanových rovnic (loc cit. str. 69—70), odtud vyjádřil $u = s \cos \alpha$, $v = s \sin \alpha$ řadou až do členů 3. řádu takto:

$$
\begin{aligned}
u &= M\Delta\varphi + \tfrac{1}{2}t\,N \cos^2\varphi\, \Delta\lambda^2 + \tfrac{3}{2}\frac{\eta^2 t}{V^2} \,.\, M\, \Delta\varphi^2 + \\
&\quad + \tfrac{1}{6}M \cos^2\varphi (1 - 3t^2)\, \Delta\varphi\, \Delta\lambda^2 \qquad (13)\\
v &= N \cos\varphi \Delta\lambda - t\, M \cos\varphi \,.\, \Delta\varphi\, \Delta\lambda - \tfrac{1}{3}M \cos\varphi\, \Delta\varphi^2\, \Delta\lambda - \\
&\quad - \tfrac{1}{6}t^2\, N \cos^3\varphi\, \Delta\lambda^3.
\end{aligned}
$$

Pomocí nich obdržel výrazy pro dφ, dλ ve tvaru konvergentních řad, jejichž součinitelé byla pro pevný nulový bod (centrální bod triangulace) čísla konstantní.

Pro azimutální transformaci podle Helmertova způsobu odvodil H. Bodenmüller výrazy pro meridianovou konvergenci a poloosy a, b Tissotovy indikatrix (Mitteilungen des Chefs des Kriegs — Karten — und Vermessungswesens 1944, str. 305—306):

$$
\begin{aligned}
a &= 1 + \tfrac{1}{4} \cos^2\varphi_0 \left[\frac{\mathrm{d}a}{a} - \cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2)\, \mathrm{d}i\right] \Delta\lambda^2,\\
b &= 1 + \tfrac{1}{3} \left[\frac{\mathrm{d}a}{a} - \cos^2\varphi_0\, (3 - t_0^2)\, \mathrm{d}i\right] \Delta\varphi^2,
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

kde opět hodnotám φ a t přísluší argumenty nulového bodu. Z rovnic je ihned zřejmé, že i pro relativně značné $\Delta\varphi$ a $\Delta\lambda$ jsou a a b nepatrné. Z Tissotovy rovnice

$$\sin\omega = -\frac{a - b}{a + b}$$

jest maximální hodnota úhlového zkreslení 2ω, kterou obdržíme již snadno:

$$
\begin{aligned}
2\omega'' = \tfrac{1}{3} \Bigg\{ &\left[\frac{\mathrm{d}a}{a} - \cos^2\varphi_0 (3 - t_0^2)\, \mathrm{d}i\right] \frac{\Delta\varphi^2}{\varrho''} - \\
&- \cos^2\varphi_0 \left[\frac{\mathrm{d}a}{a} - \cos^2\varphi_0 (1 - t_0^2)\, \mathrm{d}i\right] \Bigg\} \frac{\Delta\lambda^2}{\varrho''}.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Při větších vzdálenostech jest hodnota úhlového zkreslení dosti značná; v naší úloze pro

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{a} &= +\, 0{,}00015\\
\mathrm{d}i &= -\, 0{,}00002,\\
\Delta\varphi &= 2770'',
\end{aligned}
$$

$$\Delta\lambda = 4926'',$$
$$\varphi_0 = 57°,$$
$$2\omega = 0{,}03''.$$

Při vzdálenosti 1000 km dosáhne 2ω dokonce úhlovou přesnost měření $\pm$ 0,5″. Z daných předpokladů „polární“ transformace (jak lze nazvati princip Helmertova převodu geodetických zeměpisných souřadnic) plyne, že nezměněnými zůstávají pouze azimuty geodetických čar procházejících „pólem“, t. j. centrálním bodem. Z těchto důvodů se poledníky a rovnoběžky nezobrazují na druhé elipsoidické ploše jako takové, a jejich obrazy mají meridianovou konvergenci γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\sin\varphi_0\left[\frac{\mathrm{d}a}{a} + \sin^2\varphi_0\,(1 - \tfrac{1}{2}\eta_0^2 + \tfrac{1}{2}\eta_0 t_0^2)\,\mathrm{d}i\right]\Delta\lambda -$$
$$- \tfrac{1}{3}\cos\varphi_0\,(4 + 3t_0^2)\left[\frac{\mathrm{d}a}{a} + \sin^2\varphi_0\,\mathrm{d}i\right]\Delta\varphi\,\Delta\lambda\cdot \qquad (16)$$

Význam převodu geodetických zeměpisných souřadnic s jedné elipsoidické plochy na druhou se uplatní prakticky zejména tehdy, když je třeba spojiti dvě triangulace, z nichž každá je počítána na jiném elipsoidu, a kromě toho zpravidla v jiné zobrazovací rovině.

Při spojování dvou triangulací přes zeměpisné souřadnice bude však třeba pomocí řady identických bodů „včlenit“ prvou síť do druhé. Z Helmertových diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\delta\varphi_i &= -p_1\delta\varphi_0 + p_5 k - p_4\delta\alpha_0\\ \delta\lambda_i &= -q_1\delta\varphi_0 + q_5 k - q_4\delta\alpha_0 + \delta\lambda_0,\end{aligned} \qquad (17)$$

které se sestaví pro každý identický bod, pro který jsou známé původní geodetické zeměpisné souřadnice na ploše druhého elipsoidu i souřadnice s prvého elipsoidu na ni transformované (jejich rozdíl jest $\delta\varphi$, $\delta\lambda$), se vypočtou konstanty:

$$\left.\begin{array}{l}\text{rovnoběžný posun nulového bodu } \delta\varphi_0,\ \delta\lambda_0\\ \text{stočení nulového azimutu } \delta\alpha_0\\ \text{koeficient délkového skreslení } k\end{array}\right\}\ \text{ve vteřinách,}$$

když

$$-p_1 = \frac{M_0}{M_i}\cos\Delta\lambda,$$

$$p_5 = \Delta\varphi - \frac{1}{4\varrho''}\,\Delta\lambda^2\sin 2\varphi_m, \qquad (18)$$

$$-p_4 = -\frac{N_0}{M_0}\cos\varphi_0\,\frac{\Delta\lambda}{\varrho''},$$

$$-q_1 = \frac{\Delta\lambda}{N_0} \operatorname{tg} \varphi_i \frac{M_0}{\varrho^2},$$
$$q_5 = \Delta\lambda \cos \varphi_0 \sec \varphi_i,$$
$$-q_4 = \frac{\Delta\lambda}{\varrho''} p_5 \sec \varphi_i.$$

Pro převod celé sítě trigonometrických bodů (kterých jsou tisíce i desetitisíce) by naznačený způsob byl příliš zdlouhavý a nákladný. Proto se spokojíme s převodem jen bodů prvého, nejvýš druhého řádu o délkách stran do 20 km. Body uvnitř trojúhelníku transformujeme jednoduchým způsobem affinní transformace (viz Kästner: „Eine affine Übertragung ...“ v Zeitschrift für Vermessungswesen 1933, str. 225).

*

Transformation des coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde international.

(Extrait de l'article précédent.)

La première partie contient les plus nouveaux résultats des calculs du corps terrestre et les dimensions, qu'on emploie jusqu'ici dans les travaux européens de cartographie. Ensuite est traité la transmission des coordonnées géodésiques géographiques d'un ellipsoïde sur un autre. L'auteur réduit tout d'abord les équations de Jordan (1) en des équations plus simples (2), qu'il emploie pour le calcul du problème.

Le calcul commence par la transformation des équations (4) sur la base desquelles sont formées les équations inverses (5). Les équations (4) sont abrégées sous la forme (6) et par différentiation on obtient les équations (7). Par la substitution $u = s \cos \alpha$, $v = s \sin \alpha$ on transforme les équations (5) en (7) et on obtient la forme finale des équations de transformation exprimées généralement par (9).

Dans la conclusion l'auteur explique le sens pratique du problème et il introduit les formules de Jordan et de Helmert sous une nouvelle forme. Il indique la façon, qui a été employée pour le même problème par V. K. Hristov et H. Bodenmüller. Surtout sont importantes les équations de la déformation angulaire après la transformation (15) et les équations de la convergence méridienne (16). Pour la jonction des différentes triangulations on emploie les équations (17) d'après Helmert, quoiqu'il en existent d'autres façons de réunion et de transformation à l'aide d'une rangée de points identiques.
