Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

O některých geometrických místech přímkových zejména o zvláštním konoidu kubickém

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 1, 1--18

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108982`

O některých geometrických místech přímkových, zejména o zvláštním konoidu kubickém.

Sepsal **Vincenc Jarolímek**,
professor v Praze.

I.

Geometrické místo bodu, jehož vzdálenosti ode dvou mimoběžek jsou v poměru stálém, jest sborcený hyperboloid. *)

Buďtež M, N (obr. 1.) dané mimoběžky, Z jejich osa, $\overline{mn}$ nejkratší příčka, $\mu : \nu$ daný stálý poměr. Učiňme

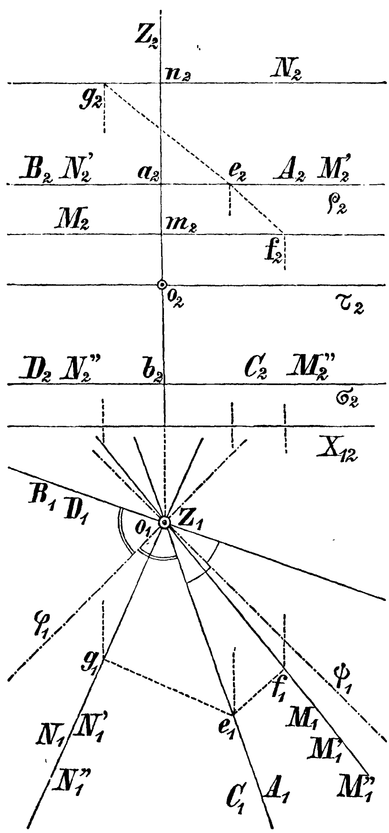
$$\overline{ma} : \overline{na} = \overline{mb} : \overline{nb} = \mu : \nu,$$

bodem a položme rovinu $\varrho \perp Z$, promítněme do ní pravoúhelně dané mimoběžky, M do M′, N do N′, a sestrojme obě přímky A, B, z nichž skládá se geom. místo bodu v rovině ϱ, jehož vzdálenosti od přímek M′, N′ jsou v poměru $\mu : \nu$. Přímky A, B přináležejí hledanému místu v prostoře. Neboť vytkneme-li na přímce A bod e, učiníme-li $ef \perp$ M, $eg \perp$ N, a značí-li souřadnice z vzdálenost bodu od první průmětny, jest $\overline{e_1 f_1} : \overline{e_1 g_1} = \mu : \nu$, $z_e - z_f = \overline{ma}$, $z_g - z_e = \overline{an}$, tedy $(z_e - z_f) : (z_g - z_e) = \mu : \nu$, pročež také $\overline{ef} : \overline{eg} = \mu : \nu$.

Položme dále bodem b rovinu $\sigma \perp Z$, promítněme na ni přímky M, N do M″, N″, a sestrojme přímky C, D, z nichž skládá se geom. místo bodu v rovině σ, jehož vzdálenosti od přímek M″, N″ jsou v poměru $\mu : \nu$. Že přímky C, D tolikéž žádané ploše náležejí, dokázati lze analogicky, jako o přímkách A, B. Jest také zřejmo, že čtveřiny bodové $(mnab)$ i paprskové (M′N′AB), M″N″CD) jsou harmonické, dále že A || C, B || D.

*) Srovnej: Fort und Schlömilch, Analytische Geometrie, II. Theil. — Brasseur, Mémoire sur divers lieux géométriques du deuxième degrèe. — Peschka, Darstellende Geometrie, III. Band. — Podáváme tuto synthetický důkaz vlastní, jednoduchostí zajisté předčící.

Je-li tedy žádané geom. místo plochou druhého stupně, bude nezbytně sborceným hyperboloidem, obsahujíc dvě dvojiny různoběžek (AB), (CD) navzájem rovnoběžných. Tyto pak určují dvě rovnoběžné tečné roviny plochy; a ježto spojnice dotyčných bodů $\overline{ab} \equiv Z$ na nich stojí kolmo, bude Z jedna hlavní osa



Obr. 1.

hyperboloidu, *a*, *b* dva vrcholy, bod *o*, osu $\overline{ab}$ půlící, střed jeho. Ostatní dvě osy hyperboloidu jsou pak průsečnice hlavní roviny τ, položené středem *o* kolmo ku Z, s rovinami hlavními φ a ψ, jež rozpolují odchylky rovin (AZ) a (BZ).

Pozůstává dokázati, že plocha ta je stupně druhého; že tedy každá přímka P, která má s plochou tři body společné, na př. q, r, s, leží v ní celá. (Obraz následující výkony znázorňující račiž si učiniti čtenář.)

Kolmice se všech bodů přímky P na M a N spuštěné tvoří dva projektivné paprskové svazky sborcené, vyplňující dva pravoúhlé hyperbolické paraboloidy. Svazky ty vytínají na přímkách řečených *podobné* řady bodové $\dot{P} \sim \dot{M}$, $\dot{P} \sim \dot{N}$, tudíž také $\dot{M} \sim \dot{N}$. Buďtež qq', rr', ss' paprsky $\perp$ M, qq'', rr'', ss'' paprsky $\perp$ N, dle předpokladu tedy $qq' : qq'' = rr' : rr'' = ss' : ss'' = \mu : \nu$. Dokázati jest, že každý další bod přímky P, na př. t, ploše náleží, že tedy, učiníme-li $tt' \perp$ M, $tt'' \perp$ N, jest také $tt' : tt'' = \mu : \nu$. K tomu konci promítněme sborcený svazek (PM) pravoúhelně na rovinu $\xi \perp$ M do paprskového svazku M_1 $(q_1 r_1 s_1 \ldots)$, jehož středem jest průmět M_1 přímky M a průsekem průmět $\dot{P}_1$ řady bodové $qrst \equiv \dot{P}$. Patrně jest $q'q = M_1 q_1$, $r'r = M_1 r_1, \ldots$. Tolikéž promítněme sborcený svazek (PN) na rovinu $\eta \perp$ N do paprskového svazku N_2 $(q_2 r_2 s_2 \ldots)$, jenž jest promítkou řady $q_2 r_2 s_2 \ldots \equiv \dot{P}_2$ z bodu N_2; i zde $q''q = N_2 q_2$, $r''r = N_2 r_2, \ldots$. Ježto řady $\dot{P} \sim \dot{P}_1$, $\dot{P} \sim \dot{P}_2$, jest i $\dot{P}_1 \sim \dot{P}_2$; a poněvadž v projektivných svazcích $M_1(\dot{P}_1)$, $N_2(\dot{P}_2)$ tři dvojiny homologických paprsků jsou v poměru stálém,

$$M_1 q_1 : N_2 q_2 = M_1 r_1 : N_2 r_2 = M_1 s_1 : N_2 s_2 = \mu : \nu,$$

tedy $\triangle M_1 q_1 r_1 \sim N_2 q_2 r_2$, $\triangle M_1 r_1 s_1 \sim N_2 r_2 s_2$, jsou úhly paprsků řečených v obou svazcích sobě rovny, $\measuredangle\, q_1 M_1 r_1 = q_2 N_2 r_2$, $\measuredangle\, r_1 M_1 s_1 = r_2 N_2 s_2$ a svazky $M_1(\dot{P}_1) \cong N_2(\dot{P}_2)$ spolu shodny. Že však jsou proťaty řadami podobnými, $\dot{P}_1 \sim \dot{P}_2$, budou homologické paprsky v stálém poměru, $M_1 t_1 : N_2 t_2 = M_1 q_1 : N_2 q_2 = \mu : \nu$, a poněvadž $M_1 t_1$, $N_2 t_2$ jsou průměty paprsků $t't$, $t''t$ s průmětnami ξ, η rovnoběžných, jest i $t't : t''t = \mu : \nu$, co bylo dokázati.

Označíme-li nejkratší příčku mimoběžek $\overline{mn} = d$, nalezneme snadno relace

$$\overline{ma} = \frac{\mu d}{\mu + \nu}, \qquad \overline{na} = \frac{\nu d}{\mu + \nu},$$

$$\overline{mb} = \frac{\mu d}{\nu - \mu}, \qquad \overline{nb} = \frac{\nu d}{\nu - \mu},$$

vyjadřující absolutní vzdálenosti vrcholů hyperboloidu od bodů m, n, dále pak

$$\overline{om} = \frac{\mu^2 . d}{\nu^2 - \mu^2}, \qquad \overline{on} = \frac{\nu^2 . d}{\nu^2 - \mu^2},$$

vyjadřující vzdálenosti středu plochy o od mimoběžek M, N, a konečně

$$\overline{ab} = \frac{2 \mu \nu d}{\nu^2 - \mu^2}$$

pro délku hlavní osy hyperboloidu.

II.

Předpokládáme-li mimoběžky M, N v poloze stálé, vytvoříme, měníce hodnotu poměru $\mu : \nu$, soustavu hyperboloidů, jež mají společnou osu Z. Pro $\mu : \nu = 1$ má každý bod plochy od mimoběžek M, N vzdálenosti *rovné*. Vrchol a rozpoluje pak nejkratší příčku $\overline{mn}$, vrchol b však jest v nekonečnu. Hyperboloid tudíž maje hlavní osu $\overline{ab} = \infty$ mění se v hyperbolický paraboloid:

Geometrické místo bodu, jehož vzdálenosti ode dvou mimoběžek jsou si rovny, jest hyperbolický paraboloid.

Vrcholové přímky jeho A, B (obr. 2.) rozpolujíce úhly, sevřené průměty M_1, N_1 daných mimoběžek na rovině ϱ, stojí na sobě kolmo; řídící roviny paraboloidu jsou tudíž (ZA) $\perp$ (ZB):

Aequidistantní plocha dvou mimoběžek jest pravoúhlý hyperbolický paraboloid, jehož osa jest totožna s osou mimoběžek; vrchol půlí nejkratší příčku jejich, roviny pak řídící půlí odchylky rovin, jež určeny jsou mimoběžkami a jejich osou.

Hlavní roviny paraboloidu φ, ψ rozpolují odchylky řídících rovin (ZA), (ZB). Učiníme-li vrcholové přímky paraboloidu $A \equiv X$, $B \equiv Y$ a osu Z osami soustavy souřadnic pravoúhlých, označíme-li nejkratší příčku mimoběžek $\overline{mn} = d$ a odchylku jejich směrů $M_1N_1 = 2\alpha$, jsou rovnice přímky N

$$\begin{aligned} x \sin \alpha - y \cos \alpha &= 0, \\ 2z - d &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a rovnice přímky M

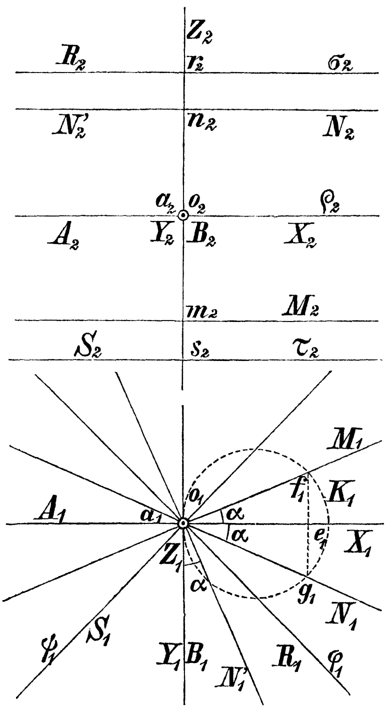
$$\begin{aligned} x \sin \alpha + y \cos \alpha &= 0, \\ 2z + d &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Vzdálenosť bodu (x, y, z) od přímky N jest pak

$$\delta = \sqrt{(z - \tfrac{1}{2} d)^2 + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2},$$

a vzdálenosť téhož bodu od přímky M

$$\delta' = \sqrt{(z + \tfrac{1}{2} d)^2 + (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2}.$$



Obr. 2.

Položíce $\delta = \delta'$ obdržíme po redukci rovnici geom. místa bodu, jehož vzdálenosti od obou přímek jsou si rovny,

$$xy = -\frac{d}{\sin 2\alpha} \cdot z. \qquad (3)$$

Otočíme-li soustavu souřadnic okolo osy Z o úhel 45°, přetvoří se rovnice tato substitucemi $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ za x, $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ za y, v rovnici

$$y^2 - x^2 = \frac{d}{\sin 2\alpha} \, . \, z. \tag{4}$$

Z obou rovnic jde na jevo, že geom. místo jest pravoúhlý hyperbolický paraboloid, jehož shodné hlavní paraboly (v rovinách φ a ψ) mají poloparametr

$$p = \frac{d}{\sin 2\alpha} \, . \tag{5}$$

Bod, jehož vzdálenosti od mimoběžek M, N jsou si rovny, jest zároveň středem plochy kulové, dotýkající se přímek M, N:

Geometrické místo středu plochy kulové, jež dotýká se dvou přímek mimoběžných, jest pravoúhlý hyperbolický paraboloid.

Tři mimoběžky M, N, P určují tři hyperbolické paraboloidy (MN), (MP), (NP). Paraboloidy (MN) a (MP) pronikají se v prostorové křivce čtvrtého stupně C^4, jejíž každý bod, maje ode všech tří mimoběžek vzdálenosti rovné, leží také na paraboloidu (NP); všecky tři paraboloidy protínají se tudíž v téže křivce C^4:

Geometrické místo středu plochy kulové, jež dotýká se tří mimoběžek, jest prostorová křivka stupně čtvrtého.

Čtyři mimoběžky M, N, P, R určují šest paraboloidů, z nichž každé tři pronikají se v společné křivce stupně čtvrtého, totiž v aequidistantě vždy tří mimoběžek. Křivek takových jest čtvero; jsouť to proniky paraboloidů

[(MN), (MP), (NP)] $\equiv C^4_1$,	aequidistanta	mimoběžek	M, N, P;
[(MN), (MR), (NR)] $\equiv C^4_2$,	„	„	M, N, R;
[(MP), (MR), (PR)] $\equiv C^4_3$,	„	„	M, P, R;
[(NP), (NR), (PR)] $\equiv C^4_4$,	„	„	N, P, R.

Křivka C^4_1 seče paraboloid (MR) v osmi bodech, jež majíce od daných čtyř mimoběžek vzdálenosti rovné jsou středy ploch kulových, z nichž každá všech mimoběžek se dotýká.

Ke čtyřem mimoběžkám lze sestrojiti osm tečných ploch kulových.

Středy těchto ploch přináležejí patrně také ostatním aequidistantám C^4_2, C^4_3, C^4_4; z čehož jde, že všecky čtyři aequidistanty procházejí *osmi* společnými body, z nichž každý má od mimoběžek M, N, P, R vzdálenosti rovné.

III.

Geometrické místo dvou mimoběžek, jež mají za aequidistantní plochu týž pravoúhlý hyperbolický paraboloid, jest přímý konoid třetího stupně.

Dáme-li mimoběžkám M, N pohybovati se tak, aby aequidistantní jejich plochou byl stálý hyperbolický paraboloid, určený rovnicí (3), bude, jakož zřejmo, geom. místo mimoběžek přímý konoid o řídící rovině $\varrho \equiv (XY)$ a řídící přímce Z. V rovnici (5) jest pak p veličina stálá, d, α veličiny proměnné. Vyloučením těchto z rovnic (1), (3) a (5) nabudeme rovnice konoidu. Z rovnice (5) jest

$$d = p \,.\, \sin 2\alpha = 2p \sin\alpha \cos\alpha = \frac{2p \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\,;$$

dosadíme-li hodnoty $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $d = 2z$, vyplývající z rovnic (1), obdržíme po redukci

$$(x^2 + y^2) \,.\, z = pxy \tag{6}$$

jako rovnici geom. místa mimoběžek. Jest to *přímý konoid kubický*, jenž maje jediný parametr p jest tvaru absolutně určitého; veškeré konoidy tohoto druhu, jež mají parametry různé, jsou si tudíž geometricky podobny. Snadno lze se přesvědčiti, že současně přímka M (rovnice 2.) týž konoid vytvořuje, jako N.

Konstrukce přímek konoidu jde z rovnice

$$z = \frac{1}{2} p \,.\, \sin 2\alpha\,, \tag{7}$$

resultující z hořejších rovnic $d = p \sin 2\alpha = 2z$.

Buďtež X, Y, Z (obr. 2.) osy soustavy souřadnicové, Z řídící přímka konoidu, řídící rovina (XY) průmětnou první, (XZ) průmětnou druhou, o vrchol, X, Y vrcholové přímky hyperbolického paraboloidu o parametru $2p$, K_1 kružnice o průměru $\overline{o_1 e_1} = \frac{1}{2} p$.

První průměty přímek konoidu tvoří svazek paprskový o_1.

Zvolíme-li průmět přímky N_1, $\sphericalangle N_1X_1 = \alpha$, a učiníme-li $\sphericalangle g_1o_1f_1 = 2\alpha$, bude v $\triangle f_1g_1o_1$ strana

$$\overline{f_1g_1} = \overline{o_1e_1} \,.\, \sin 2\alpha = \frac{1}{2} p \,.\, \sin 2\alpha = z;$$

učiňme tedy $\overline{o_2n_2} = z = \overline{f_1g_1}$, $n_2N_2 \,||\, X_2$. Průmět M_1, jehož odchylka od X_1 jest $(-\alpha)$, přináleží přímce konoidu M, jejíž souřadnice $z = -\overline{f_1g_1}$, tedy $\overline{o_2m_2} = \overline{f_1g_1}$, $M_2 \,||\, X_2$. Mimoběžky M, N, k nimž daný hyperbolický paraboloid jest plochou aequidistantní, jsou k počátku o centricky symmetrické, z čehož jde, že o jest *středem* konoidu.

Pro $\alpha = 0$ stotožňuje se přímka konoidu s osou X. Pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$ dosáhne z svého maxima

$$z = \frac{1}{2} p = \overline{o_1e_1} = \overline{o_2r_2},$$

a příslušná přímka R největší vzdálenosti od středu o.

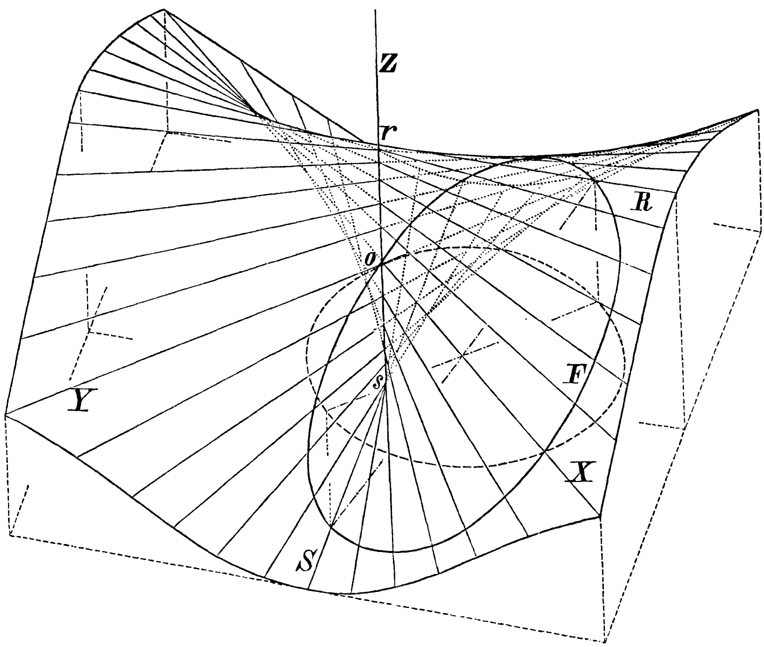
Odtud pro $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ klesá z od $\frac{1}{2}p$ do 0; odchylky α, $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ dají přímky N, N′, jež mají touž souřadnici z, tedy $N_2 \equiv N'_2$. Pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tvořící přímka $\equiv$ Y, $z = 0$. Tím vytvořena polovina konoidu. Odchylky $\alpha = \frac{\pi}{2}, \ldots \frac{3}{4}\pi, \ldots \pi$ odpovídají hodnotám $z = 0, \ldots -\frac{1}{2}p, \ldots 0$, zejména $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ přímce S, jejíž souřadnice $z = -\frac{1}{2}p = \overline{os_2}$ jest minimální, $\alpha = \pi$ pak přímce $\equiv$ X; přímka tvořící vrátila se tu do své polohy původní a vytvořuje dále týž konoid, roste-li α od π do 2π.

Opačnou konstrukcí sestrojíme N_1 z daného N_2. Kdežto však průmětu N_1 odpovídala jediná realná přímka konoidu N, jakož plyne z rovnice (6) pro určité x, y jediná hodnota za z, každému druhému průmětu N_2 přináležejí přímky dvě, N a N′, jichž průměty N_1 a N'_1 odchýleny jsou od X_1 o úhly komplementární.

Tolikéž z rovnice (6) jde

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2z}(p \pm \sqrt{p^2 - 4z^2}), \qquad (8)$$

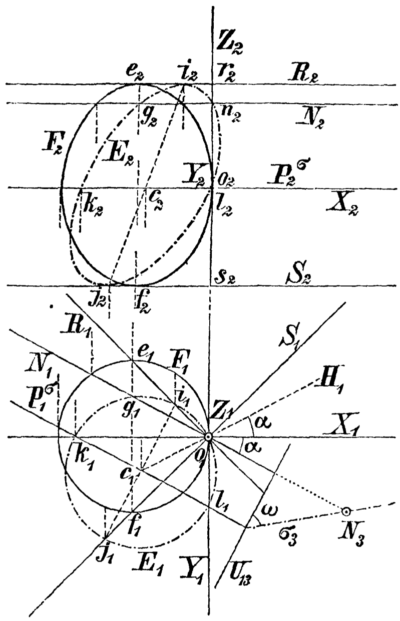
že každá rovina || (XY) seče konoid ve dvou přímkách reálných neb imaginárných dle toho, je-li absol. $z \lesseqgtr \frac{1}{2}p$. Z této diskusse rov. (6) a (7) jde na jevo, že *konoid má dvě roviny hlavní*, jež dělí plochu na části orthogonálně symmetrické, (RZ), (SZ) (obr. 2. a 3.); že reálný díl konoidu obsažen jest mezi rovinami $\sigma \,||\, \tau \perp Z$, jichž vzdá-



Obr. 3.

lenosti od středu $o = \frac{1}{2}p$; že roviny tyto dotýkají se konoidu podél přímek R a S, jež jsou tudíž *torsálními přímkami* plochy, a jejich průsečíky r, s na přímce řídící Z *body kuspidálními*; že každá rovina $\perp$ Z, jejíž vzdálenost od středu o jest $> \frac{p}{2}$, seče konoid ve dvou přímkách imaginárných, a tudíž plocha složena jest z obliny realné mezi rovinami $\sigma \,||\, \tau$ a z obliny pomyslné, rozkládající se vně tohoto prostoru do nekonečna.

Co pak se týče vztahu konoidu (6) ku příslušnému hyperbolickému paraboloidu (3), jest patrno, že obě plochy pronikají se v přímkách X, Y, že hlavní roviny konoidu $(RZ) \equiv \varphi$, $(SZ) \equiv \psi$ jsou také hlavními rovinami paraboloidu, střed konoidu o vrcholem paraboloidu a přímky torsální R, S, procházejíce ohnisky paraboloidu r, s (ježto $\overline{or} = \overline{os} = \frac{1}{2} p$) strmí na hlavních rovinách jeho ψ, φ kolmo.



Obr. 4.

IV.

Rovina seče konoid ve křivce třetího stupně, jejíž dvojný bod jest v průsečíku roviny s řídící přímkou konoidu Z, ježto v něm dvě přímky plochy se protínají.

Obsahuje-li rovina jednu přímku konoidu, na př. N (obr. 4.), rozpadá se průsek v přímku N a v kuželosečku E, která prochází průsečíkem n přímek N a Z jakožto dvojným bodem průseku.

Budiž rovnice průmětu přímky N na rovině (XY)

$$y - Ax = 0,$$

tudíž stálá souřadnice $z = \overline{on}$ přímky N z rovnice konoidu (6)

$$z = \frac{pA}{1 + A^2}.$$

Rovina

$$\sigma \equiv \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{t} - 1 = 0,$$

položená přímkou N, má na ose Z úsek

$$\overline{on} = t = \frac{pA}{1 + A^2},$$

na ose Y pak úsek

$$\overline{ol} = v = - Au,$$

ježto stopa její P^σ na rovině (XY) jest $\parallel$ N.

Tyto substituce do rovnice roviny dají

$$\sigma \equiv p(y - Ax) - u(1 + A^2)z + Aup = 0, \qquad (9)$$

kdež $u = \overline{ok}$ jest úsek roviny na ose X.

Eliminací z z rovnic (6) a (9) plyne rovnice prvního průmětu průseku roviny σ s konoidem

$$(y - Ax)(x^2 + y^2) - u(1 + A^2)xy + Au(x^2 + y^2) = 0,$$

již snadno uvedeme na tvar

$$(y - Ax)(x^2 + y^2 - ux + Auy) = 0.$$

Průmět průseku rozpadá se tudíž v přímku

$$N_1 \equiv y - Ax = 0$$

a v kružnici

$$E_1 \equiv x^2 + y^2 - ux + Auy = 0, \qquad (10)$$

průsek pak sám v přímku N a v ellipsu E:

Každá rovina položená kteroukoli přímkou konoidu seče jej v ellipse, která se promítá na rovinu řídící do kružnice.

Kružnice E_1 jde počátkem souřadnic Z_1; ellipsa E a přímka N protínají se tedy na řídící přímce konoidu Z. Průsečíky k, l stopy P^σ s přímkami konoidu X, Y přináležejí také průseku E, t. j. *středy všech ellips konoidu leží v rovině* (XY). Ježto pak $\sphericalangle k_1 o_1 l_1$ jest pravý, jest úsek $k_1 l_1$ *průměrem* kružnice E_1.

Souřadnice středu c_1 jsou

$$a = \frac{u}{2}, \quad b = - A . \frac{u}{2},$$

a poloměr kružnice

$$r = \frac{1}{2} u \sqrt{1 + A^2} = \frac{u}{2 \cos \alpha},$$

kdež $\alpha = \sphericalangle N_1 X_1$. Poněvadž $b + Aa = 0$, leží střed c_1 na přímce H_1, symmetrické ku N_1 dle osy X_1. Malá osa ellipsy E jest kl; osa velká ij má své vrcholy na torsálních přímkách R, S. Je-li ω odchylka roviny σ od roviny (XY), jest poloosa velká

$$\overline{ci} = \frac{z_i}{\sin \omega} = \frac{\overline{o_2 r_2}}{\sin \omega} = \frac{p}{2 \sin \omega},$$

poloosa malá

$$\overline{ck} = \overline{c_1 k_1} = \overline{c_1 i_1} = z_i \,.\, \operatorname{cotg} \omega = \frac{1}{2} p \operatorname{cotg} \omega.$$

Velikosť ellipsy jest tedy závislá jen na odchylce roviny σ od roviny (XY). Roviny položené jednotlivými přímkami konoidu tak, aby měly rovné odchylky od roviny (XY), tudíž i rovné odchylky od řídící přímky Z, protínají konoid v ellipsách *shodných*, jež promítají se na rovinu (XY) do shodných kružnic; středy pak těchto kružnic vyplňují zase kružnici, jejíž střed je v středu konoidu o. Ellipsa F této soustavě náležející, jejíž malá osa jest v X, dotýká se roviny (YZ) v středu konoidu o.

Z toho jde tato konstrukce konoidu (obr. 3.): *Kterákoliv ellipsa v prostoře* F *buď jeho křivkou řídící, rovina* π, *na niž ellipsa* F *promítá se do kružnice, rovinou řídící, a promítající paprsek vrcholu malé osy přímkou řídící.*

Vrchol tento jest pak středem konoidu, kolmice, s vrcholů velké osy ellipsy na řídící přímku spuštěné, přímky torsální a vzdálenosť obou bodů kuspidálních parametr konoidu p.

Jelikož v $\triangle c_1 i_1 i$ (obr. 4.) jest

$$\overline{ci}^2 - \overline{c_1 i_1}^2 = z_i^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

kterážto rovnice představuje vzhledem ku proměnným $\overline{ci}$, $\overline{c_1 i_1}$ rovnoosou hyperbolu, lze naopak na daný konoid o parametru p položiti každou ellipsu, jejíž poloosy jsou souřadnicemi některého bodu hyperboly o poloosách $= p$.

Ellipsa E (obr. 4.) seče přímku N, s níž leží v jedné rovině σ, ve dvou bodech g, n, v nichž rovina konoidu se *dotýká*. Je-li přímkou konoidu N položena rovina σ (P^σ její stopa na rovině XY) jakožto rovina tečná, vyšetříme dotyčný bod g ležící mimo přímku řídící, když nad průměrem $\overline{k_1 l_1}$ opíšeme kružnici E_1 jakožto průmět průseku E roviny tečné s konoidem. Průsečík g_1 kružnice E_1 s průmětem N_1 jest průmětem bodu dotyčného. Abychom naopak v bodě konoidu g sestrojili rovinu tečnou σ, proložme bodem g povrchovou přímku N a ellipsu E. K tomu konci veďme přímku H_1 symmetrickou ku N_1 dle osy X_1, a protněme ji přímkou, která úsečku $\overline{g_1 o_1}$ kolmo půlí. Průsečík c_1 je středem kruhového průmětu E_1, jehož zobrazovati netřeba. Bodem c_1 jde průmět stopy roviny tečné $P_1^\sigma \parallel N_1$; (NP^σ) jest žádaná rovina tečná.

V.

Úloha *geometralného osvětlení* konoidu skytá výsledků zvláště zajímavých, udělí-li se některé hlavní rovině plochy poloha rovnoběžná s paprsky. Budiž směr paprsků Σ (obr. 5.) dán odchylkami $\sphericalangle \Sigma_1 X_1 = \sphericalangle \Sigma_2 X_2 = \frac{3}{2}\pi$, tudíž určen rovnicemi

$$x = -y = -z.$$

Mez vlastního stínu K, t. j. dotyčná křivka plochy válcové $\parallel \Sigma$, tečné ku ploše

$$F(x, y, z) = 0 \tag{11}$$

má pak za průmět K_1 na rovině (XY) křivku, jejíž rovnici obdržíme eliminací proměnné z z rovnice (11) a z rovnice

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Z rovnice konoidu

$$F \equiv (x^2 + y^2)z - pxy = 0 \tag{13}$$

jde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xz - py,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz - px,$$

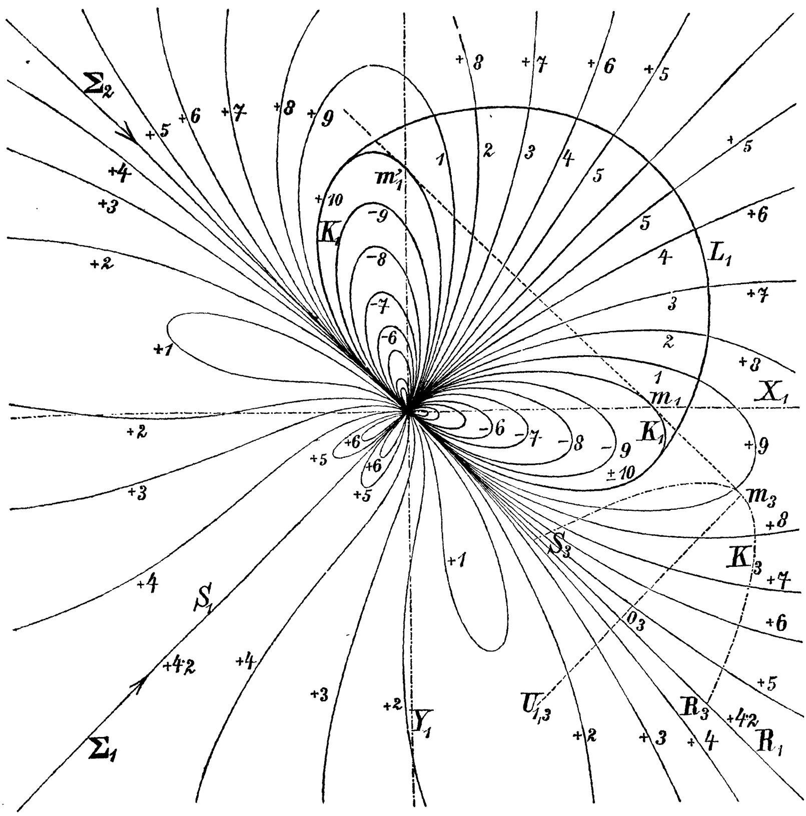
$$\frac{\partial F}{\partial z} = x^2 + y^2.$$

Tyto substituce do rovnice (12) dají

$$-2xz + py + 2yz - px + x^2 + y^2 = 0. \tag{14}$$

Eliminací z z rovnic (13) a (14) obdržíme po redukci rovnici průmětu K_1 meze vlastního stínu na rovinu (XY)

$$(x^2 + y^2)^2 = p\,(x - y)\,(x + y)^2. \tag{15}$$



Obr. 5.

Otočením soustavy (XoY) okolo počátku o o úhel 45° tak, aby přímka R_1 stala se osou úseček, přímka S_1 osou pořadnic, nabude rovnice křivky příslušnými substitucemi

$$x = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \tag{16}$$

jednoduššího tvaru

$$K_1 \equiv (\xi^2 + \eta^2)^2 + 2\sqrt{2}\,.\,p\xi^2\eta = 0. \tag{17}$$

Kladouce R_1 osou, o pólem souřadnic polárných, anomalii pak φ směrem na pravo od X positivnou, zjednáme si substitucemi

$$\xi = \varrho \cos \varphi, \qquad \eta = - \varrho \sin \varphi$$

polárnou rovnici křivky K_1

$$\varrho = 2\sqrt{2} \, . \, p \sin \varphi \cos^2 \varphi. \tag{18}$$

Křivku K sestrojíme buď methodou deskriptivní geometrie, prokládajíce přímkami konoidu roviny $\parallel \Sigma$ a vyšetřujíce dotyčné body těchto rovin jakožto tečných dle odstavce IV. Anebo cestou geometrie rovinné dle polárné rovnice (18), z níž plyne jednoduchá konstrukce křivky K_1.

Z rovnice (17) jde na jevo, že křivka čtvrtého stupně K_1 rozkládajíc se toliko na pravo od přímky R_1, ježto positivné η dává imaginarné $(\xi^2 + \eta^2)$, jest pravoúhelně souměrná dle osy S_1. Jakož vyšetřiti lze analyticky, skládá se křivka, majíc v o_1 vrchol a zároveň bod úvratu, ze dvou lístků, z nichž každý o sobě *nemá* osy pravoúhelné souměrnosti. Hodnotami $\varphi = 0, \ldots \frac{\pi}{2}$ vytvoříme z rovnice (18) lístek prvý, hodnotami $\varphi = \frac{\pi}{2}, \ldots \pi$ lístek druhý; hodnoty $\pi \ldots \frac{3}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi \ldots 2\pi$ dávají průvodci ϱ probíhati tytéž hodnoty, jako prve, ale negativné, i vytvořují se tu tytéž dva lístky.

Maximalní hodnotu průvodce ϱ vyšetříme differencialním poměrem rovnice (18)

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = 2\sqrt{2} \, . \, p \, (\cos^3 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) = 0,$$

z něhož

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a z rovnice (18)

$$\varrho = \frac{4}{9} p \sqrt{6} \, .$$

Sestrojením těchto souřadnic určíme bod n_1 na křivce, jenž má největší vzdálenosť od počátku o_1.

Úhel ω, který svírá tečna křivky K_1 s průvodcem, určen jest rovnicí

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{-2+3\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Pro $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ jest $\omega = \frac{\pi}{2}$, t. j. v bodě n_1 stojí tečna na průvodci $o_1 n_1$ kolmo.

Odchylka tečny od osy polárné R_1 jest $\alpha = \varphi + \omega$. Pro tečnu $\parallel R_1$ jest $\alpha = \pi$, $\omega = \pi - \varphi$,

$$\operatorname{cotg}\omega = -\operatorname{cotg}\varphi = \frac{-2+3\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

z čehož

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

a z rovnice (18)

$$\varrho = p.$$

V průsečíku m_1 přímky X_1 s křivkou K_1 jest tedy tečna $\parallel R_1$, $\overline{o_1 m_1} = p$, a vzdálenosť tečny od osy $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot p$. Táž tečna dotýká se ovšem i druhého lístku v bodě m_1', jehož $\overline{o_1 m_1'} = p$.

Co pak se týče tvaru meze vlastního stínu, totiž prostorové křivky K na konoidu, jíž průmět K_1 přísluší, jest K patrně souměrna k hlavní rovině (SZ), má v kuspidalním bodě r svůj vrchol, dotýkajíc se v něm torsální přímky R, v druhém pak bodě kuspidalním s bod úvratu, nedotýkajíc se v něm druhé přímky torsalní S, nýbrž v ostrém úhlu na ni dopadajíc (viz pobočný průmět K_3 v obr. 5.).

Rovnice konoidu (6) promění se po otočení soustavy souřadné okolo osy Z o $\sphericalangle 45^0$ transformačními vzorci (16) v rovnici

$$(\xi^2 + \eta^2) \cdot 2\zeta = (\xi^2 - \eta^2). \qquad (19)$$

Eliminací ξ z rovnice (17) a (19) dostaneme rovnici průmětu K_3 křivky K na rovinu (ZS)

$$4\zeta^2 = p\eta\sqrt{2} + p^2; \qquad (20)$$

průmět K_3 jest tedy *parabolou*, jejíž osa jde počátkem $o \perp Z$, vrchol jest ve vzdálenosti $(-\frac{1}{2}p\sqrt{2})$ od počátku o (v průmětě m_3), a parametr $= \frac{1}{4}p\sqrt{2}$. Průmět křivky K na třetí rovinu souřadnou (RZ) jest stupně čtvrtého.

VI.

Křivku určité intensity čili *isofótu* odpovídající rovině, odchýlené o určitý úhel α od směru paprsků Σ, sestrojíme, položíme-li jednotlivými přímkami konoidu roviny, odchýlené o α od Σ, a spojíme-li dotyčné body těchto rovin tečných, vyšetřené dle odstavce IV. Této konstrukce dotyčných bodů užijeme i při všech dalších isofótách, neboť jednoduchostí svou předčí i známou výhodu, již poskytuje projektivnost svazku rovin intensitních, jehož osou jest povrchová přímka plochy sborcené, s řadou příslušných bodů dotyčných.

Pro isofótu plochy

$$F(x, y, z) = 0$$

platí rovnice

$$\frac{m \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + n \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{(m^2 + n^2 + 1)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]}} = \sin\alpha,$$

jsou-li rovnice paprsku Σ

$$x = mz, \quad y = nz.\text{*})$$

Substitucemi $m = -1$, $n = 1$, ježto

$\sphericalangle \Sigma_1 X_1 = \sphericalangle \Sigma_2 X_2 = \frac{3}{2}\pi$, a hodnot differencialních poměrů v odst. V. vyšetřených obdržíme po redukci

$$[(x^2 + y^2) - (2z + p)(x - y)]^2$$
$$= 3 \sin^2\alpha\, [(2xz - py)^2 + (2yz - px)^2 + (x^2 + y^2)^2]. \quad (21)$$

Eliminací proměnné z z rovnic (6) a (21) obdržíme rovnici drvního průmětu isofóty (na rovinu XY)

$$[(x^2 + y^2)^2 - p(x + y)^2 \cdot (x - y)]^2$$
$$= 3 \sin^2\alpha\, [p^2 (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 + (x^2 + y^2)^4]. \quad (22)$$

Otočíme-li pak soustavu souřadnic $(X_1 o_1 Y_1)$ okolo počátku o úhel 45^0 do $(R_1 o_1 S_1)$, přetvoří se rovnice průmětu isofóty v rovnici

$$(1 - 3\sin^2\alpha)(\xi^2 + \eta^2)^4 + 4\sqrt{2} \cdot p\xi^2\eta\, (\xi^2 + \eta^2)^2$$
$$= 4p^2\xi^2\eta^2 \cdot [3\sin^2\alpha\, (\xi^2 + \eta^2) - 2\xi^2]. \quad (23)$$

---

*) *Č. Jarolímek*, Čáry světlosti ploch měřických. Roční zpráva spolku českých mathematiků na rok 1872.

Průmětem isofóty jest tedy křivka osmého stupně, pravoúhelně souměrná k ose S_1. Skládá se ze šesti lístků, z nichž dva souměrné ku S_1 mohou býti pomyslné. Průmět isofóty $+6$, -6 v obr. 5. má na př. 6 lístků realných.

Roviny $\parallel$ (XY), položené vrcholy konoidu r, s, dotýkají se plochy podél přímek R, S, a mají intensitu (dle stupnice desítidílné) 4·2. Přísluší tedy konoidu ve všech bodech obou torsalních přímek stálá intensita 4·2.

Každá rovina obsahující bod kuspidalní dotýká se v něm konoidu. Torsalní přímkou R $\perp \Sigma$ lze položiti roviny všech možných intensit; hornímu vrcholu konoidu r přináležejí tedy veškeré intensity stupnice. Isofóty buď jím procházejí, nebo mají v něm bod isolovaný (isofóta $+1$). Torsalní však přímka S, jejíž $S_1 \equiv \Sigma_1$, jest osou svazku rovinového, jehož nejsvětlejší rovina jest $\parallel$ (XY) s intensitou 4·2. V dolním vrcholu s přísluší tedy konoidu veškeré intensity v mezích 4·2 až 10.

Kromě vrcholu horního r *není* na konoidu bodu *normalně* osvětleného. Neboť rovina intensity normalné (0) jest $\perp \Sigma$, stopa její na rovině (XY) tedy $\perp \Sigma_1$, a přímka konoidu, která v rovině řečené jest obsažena, také $\perp \Sigma_1$; ale takový průmět má jen torsální přímka horní R, a ta má ve všech svých bodech (mimo vrchol r) stálou intensitu 4·2.

Vlastní vržený stín na konoidu jest omezen křivkou L, vrženým stínem křivky K čili ± 10.

Poznámka o řadě, stanovící čísla Hamiltonova.

Napsal

dr. Aug. Seydler.

Budiž dána řada:

$$A \equiv (1-t)^{e_0} + t(1-t)^{e_1} + t^2(1-t)^{e_2} + \dots$$

v níž jsou mocnitele $e_0, e_1, e_2, \dots$ kladná celá čísla.

Rozviňme dle nich, čímž obdržíme identický, jen tvarem rozdílný výraz:

$$A' \equiv 1 - e_0 t + (e_0)_2 t^2 \mp \dots + (-1)^{e_0} t^{e_0}$$
$$+ t - e_1 t^2 + (e_1)_2 t^3 \mp \dots + (-1)^{e_1} t^{e_1+1} + \dots .$$