Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Gustav Gruss

Několik vztahů mezi koëfficienty rovnice $F(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0$ pro reálné a pro komplexní kořeny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 2, 124--128

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108977`

$$(47) \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz).$$

Pro obecnější funkci F(z) definovanou rovnicí (18′) pak platí

$$(48) \quad \prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}$$

$$. \, e^{-(n-1)a+b\left[\gamma(nz)-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)\right]} . \, \mathrm{F}(nz);$$

pro tento obecný případ nutno v rovnici (46′) položiti

$$\alpha = \frac{n-1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\log n - (n-1)\,a, \qquad \beta = b,$$

$$f(z) = \gamma(nz) - \sum_{k=0}^{n-1}\gamma\left(z+\frac{k}{n}\right);$$

ježto $\gamma(z+1)-\gamma(z) = \frac{2r\pi i}{b}$, platí $f\left(z+\frac{1}{n}\right) - f(z) = 0$.

(Pokračování.)

Několik vztahů mezi koëfficienty rovnice $\mathrm{F}(x) = x^n \mp a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \mp \ldots \pm a_n = 0$ pro reálné a pro komplexní kořeny.

Napsal

Gustav Gruss,

professor české university v Praze.

Z rovnice

$$(\mathrm{A}) \quad f(x) = (x \mp \lambda)^n = x^n \mp n\lambda x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\lambda^2 x^{n-2}$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\lambda^3 x^{n-3} + \ldots$$

E. Weyr, Vyčíslení nekonečných součinů o racionálných členech pomocí funkce Γ. (Časopis pro pěst. mathem. a fys., R. XXII, pag. 161–178.).

M. Lerch, Theorie funkce Gamma. (Věstník české Akademie, R. II., 1893, pag. 244–246.).

Dr. R. Fricke, Analytisch funktionentheoretische Vorlesungen, pag. 162–168. Leipzig 1900.

se *stejnými reálnými* kořeny λ (kladnými neb zápornými) dostáváme

pro *součet* všech kořenů koëfficient $[1] = \mp n\lambda$,

pro *součet* všech amb kořenů koëfficient $[2] = \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda^2$,

pro *součet* teren kořenů koëfficient $[3] = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\lambda^3$

a podobně koëfficient $[4] = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\lambda^4$,

$$\vdots$$

Z relací těch plyne

$$[1]^2 = n^2\lambda^2, \quad 2[2] = (n^2 - n)\lambda^2$$

a dělením

$$\frac{[1]^2}{2[2]} = \frac{n^2}{n^2 - n}$$

aneb

$$(1) \qquad [1]^2 - 2[2] = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

veličina *kladná*.

Podobně

$$[2]^2 - \frac{3}{2}\,\frac{n-1}{n-2}[1][3] = 0,$$

$$(1') \qquad [3]^2 - \frac{4}{3}\,\frac{n-2}{n-3}[2][4] = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[\nu]^2 - \frac{\nu+1}{\nu}\,\frac{n-\nu+1}{n-\nu}[\nu-1][\nu+1] = 0.$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Vztahy (1) a (1′) jsou *nezávislé na hodnotě kořenů.*

Pro rovnici s *nestejnými reálnými* kořeny

$$(B) \qquad F(x) = x^n \mp a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \mp a_3x^{n-3} + \ldots \pm a_n = 0$$

dostáváme

pro *součet* kořenů 1. koëfficient $\mp a_1$,
„ „ amb kořenů 2. koëfficient a_2,
„ „ teren kořenů 3. koëfficient $\mp a_3$ atd.

Vztahy (1) a (1′) budou platiti, *nejsouce závislé na hodnotě kořenů,* také pro *reálné kořeny nestejné* rovnice (B). Tudíž

$$a_1^2 - 2a_2 \frac{n}{n-1} = 0$$

čili

$$a_1^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 2a_2 = 0$$

aneb

$$a_1^2 - 2a_2 = \frac{a_1^2}{n}$$

veličině kladné.

Máme tedy větu:

α) Pro reálné kořeny rovnice (B) *jest* $a_1^2 - 2a_2$ *veličina, kladná.*

Z toho plyne dále: „Má-li rovnice (B) kořeny komplexní, musí

$$a_1^2 - 2a_2 < 0$$

čili veličina záporná“ a naopak: „Je-li

$$a_1^2 - 2a_2 < 0$$

(veličina záporná), má rovnice (B) kořeny *komplexní.*“

β) Podobně odvodíme vztahy:

$$a_2^2 - \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_1a_3 = 0 \text{ pro } \textit{reálné} \text{ kořeny stejné,}$$
$$> 0 \text{ pro } \textit{reálné} \text{ kořeny nestejné.}$$

Je-li

$$a_2^2 - \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_1a_3 < 0,$$ má rovnice $F(x) = 0$ kořeny *soujemné.*

A všeobecně najdeme:

γ) Je-li

$$a_\nu^2 - \frac{\nu+1}{\nu}\frac{n-\nu+1}{n-\nu}a_{\nu-1}a_{\nu+1}$$

záporné, má rovnice (B) kořeny *soujemné.*

K dotvrzení přiloženy jsou *dva* příklady:

a) Rovnice

$$x^3 - 6x^2 + 19x - 44 = 0$$

má kořeny *komplexní*; neboť dle *α*) jest

$$a_1^2 - 2a_2 = 36 - 38 = -2$$

veličina *záporná*, rovněž dle *β*) jest

$$a_2^2 - \frac{3}{2}\frac{n-1}{n-2}a_1 a_3 = 19^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\,.\,6\,.\,44$$
$$= 361 - 792 = -431$$

veličina záporná.

b) Rovnice

$$x^3 - 9x^2 + 26\,x - 24 = 0$$

má kořeny *reálné*; neboť dle *α*)

$$9^2 - 2\,.\,26 = 81 - 52 = 29$$

veličina *kladná* a rovněž dle *β*)

$$26^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot 9\cdot 24 = 676 - 27\,.\,24 = 676 - 648 = 28$$

veličina kladná.

Vzorce *β*) a *γ*) udal bez důkazu *Newton* v „Arithmetica universalis“. *)

Lze podobně odvoditi *celou řadu* vztahů, příkladně: Je-li

$$a_2^2 - \frac{6n\,(n-1)}{(n-2)(n-3)}\,a_4$$

veličina záporná, má rovnice (B) kořeny soujemné.

Na př. rovnice

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$$

má kořeny soujemné.

Vztah

$$a_2^2 - \frac{6n\,(n-1)}{(n-2)(n-3)}\,a_4 < 0$$

*) Spis Newtonův jest citován dle knihy *E. Netto*: Vorlesungen über Algebra. Svazek I. p. 233 atd.

pro kořeny *soujemné* jest nezávislý na koëfficientech a_1 a a_3, což zasluhuje povšimnutí.

Rovnice 5. stupně ($n = 5$) má kořeny soujemné, jestli

$$100a_5 - a_2a_3 < 0$$

atd.

O cissoidě jakožto průmětu křivky společné dvěma přímočarým plochám stupně druhého.

Napsal

V. Jeřábek,

ředitel české státní reálky v Brně.

1. Cissoida jest průmětem křivky, v níž se plochy kuželová a válcová navzájem protínají. V rovině π buďtež dány dva kruhy K a L_1 v bodu v se pravoúhelně protínající (obr.). Rovinu π mějme za průmětnu a v za vrchol kužele L_v, jehož kruhovou podstavu L zvolíme v jakékoliv výšce nad průmětnou π tak, aby měla svůj průmět v kruhu L_1. Dále budiž plošná přímka kužele L_v, mající svůj průmět v průměru va_1 kruhu L_1, zároveň plošnou přímkou válce V_k o kruhové podstavě K.

Kterákoliv přímkou va položená rovina σ seče rovnoběžné kruhy K a L v rovnoběžných tětivách vp a ab, z nichž ab má svůj průmět v tětivě a_1b_1 kruhu L_1 s vp rovnoběžné. Snadno lze nahlédnouti, že přímky vb_1 a pm_1 jdoucí rovnoběžně s průměrem va_1 jsou průměty různoběžek vb a pm, v nichž rovina σ plochy kužele a válce seče, pročež jest geometrické místo M_1 průsečíku m_1 přímek vb_1 a pm_1 průmětem geometrického místa M bodu m, v němž se plošné přímky vb a pm protínají; M_1 jest tedy průmětem křivky M společné plochám L_v a V_k.

Ježto plochy kuželová a válcová mají společnou přímku va jest křivka M a tedy i její průmět M_1 stupně třetího.

Zbývá nám ještě ukázati, že M_1 jest *cissoidou.* K tomu cíli veďme v krajním bodu c průměru vc tečnu cd_1 ke kruhu K a vyznačme body e, d_1, v nichž vb_1 protíná kružnici K a tečnu cd_1. Z pravoúhlých a shodných trojúhelníků pvm_1 a ced_1 ($\sphericalangle pvm_1$