Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Hrazdil

Souvislost mezi úplným risikem průměrným a částečnými risiky středními

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 189--200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108965

Souvislost mezi úplným risikem průměrným a částečnými risiky středními.

Napsal Dr. **Antonín Hrazdil**.

Při hospodářských podnicích, při nichž příznivý nebo nepříznivý výsledek závisí z velké části na náhodě, jako jest tomu ku příkladu při hernách nebo pojišťovnách, jest zvykem posuzovati „nebezpečnost“ takového podniku dle zvláštního měřítka zvaného „risiko“.

Toto měřítko je definováno dvojím různým způsobem a dle toho má též různé názvy, totiž „risiko průměrné“ a „risiko střední“.

Průměrným risikem dle formulace Tetensovy *) rozumíme pravděpodobný zisk nebo pravděpodobnou ztrátu, kterou nějaký podnik může míti za následek. Při každém podniku, který je vybudován na spravedlivém základě, musí jak pravděpodobný zisk, tak pravděpodobná ztráta míti stejnou hodnotu. Jest proto theoreticky lhostejno, rozumíme-li risikem pravděpodobný zisk anebo pravděpodobnou ztrátu, ale v praxi rozumí se risikem zpravidla pravděpodobná ztráta.

Jestliže při nějakém podniku, ku př. při hře v herně, může nastati kterýkoli z několika různých navzájem se vylučujících výsledků $F_1, F_2, \ldots F_n$ o pravděpodobnostech $p_1, p_2, \ldots p_n$, při čemž jeden z nich nastati musí, jsou pravděpodobnosti jejich vázány podmínkou

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1. \qquad (1)$$

Jestliže na jednotlivé tyto výsledky $F_1, F_2, \ldots F_n$ jsou stanoveny odměny — výhry — $A_1, A_2, \ldots A_n$, musí hráč, chce-li se hry účastniti, vsaditi sázku E rovnou mathematické naději všech výher, to jest obnos

$$E = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \ldots + p_n A_n. \qquad (2)$$

Pravděpodobná ztráta — risiko — jest

$$R = \Sigma\, p_i\, (E - A_i), \qquad (3)$$

---

*) J. N. Tetens: Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. II. Teil. Leipzig 1786.

kdež summace jest vztažena na všechny případy, při nichž podnik vyplácí větší odměny A_i, než jest příslušná sázka E. Podobně pravděpodobný zisk podniku má hodnotu

$$R' = \Sigma p_i (A_i - E), \tag{4}$$

kde tento součet vztahuje se jen na ty případy, při nichž odměna A_i jest menší než sázka E.

Poněvadž obě tyto hodnoty R a R' jsou stejny, jest každá z nich rovna

$$R = R' = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} i\, p_i \,.\, | A_i - E | \,, \tag{5}$$

kdež součet jest vztažen na všechny případy.

Tento výraz pro průměrné risiko vyžaduje k svému vyčíslení tvoření absolutních rozdílů čísel A_i a E. Aby nebylo třeba všímati si znaménka tohoto rozdílu, zavedl Hausdorf*) pro posuzování nebezpečnosti podniku jiné měřítko — zvané střední risiko — v němž tato difference vystupuje ve čtverci a vedle zmíněné už výhody znaménkové má ještě tu přednost, že větším differencím dává silněji vyniknouti. Měřítko jest dáno vzorcem:

$$M = \sqrt{\Sigma p_i (A_i - E)^2}. \tag{6}$$

Vzorec tento nabývá velice jednoduchého tvaru, jedná-li se o veliký počet sázek na týž děj, jehož uskutečnění nechť má pravděpodobnost p a neuskutečnění pravděpodobnost $q = 1 - p$.

Ujedná-li podnik s hráči s takových sázek (s číslo hodně veliké), jest dle theorému Bernoulli-ho pravdě nejpodobnější, že se uskuteční sp krát, a je-li na každý případ uskutečnění se stanovena výhra A, má pravdě nejpodobnější summa, kterou podnik hráčům vyplatí, hodnotu

$$S = s \,.\, p \,.\, A.$$

Ve skutečnosti neuskuteční se zmíněný děj pravě sp krát, nýbrž třeba o l krát více nebo méněkrát, takže vyplacený obnos, který podnik hráčům vyplatí, bude o $l \,.\, A$ buď větší nebo menší než pravdě nejpodobnější summa S.

Avšak pravděpodobnost, že počet výher bude o l větší nebo menší než pravdě nejpodobnější počet sp, a tudíž také že

*) F. Hausdorf: Das Risiko bei Zufallspielen. Leipziger Ber. 49. 1897.

vyplacené výhry budou míti o lA větší nebo menší hodnotu, než proponovaná suma S, jest dána výrazem:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}}.$$

Čtverec středního risika pro tento jediný případ jest tudíž dle vzorce 6.:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}} \cdot (lA)^2,$$

neboť lA udává differenci vyplacené sumy od hodnoty pravdě nejpodobnější.

Poněvadž difference l může míti všechny možné hodnoty od 0 do ∞, jest čtverec středního risika celého podniku dán vzorcem:

$$M^2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot \int_0^\infty l^2 A^2 \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}} \cdot dl.$$

Zavedeme-li do integrálu novou proměnnou rovnicí

$$l = t \cdot \sqrt{2spq},$$

dostaneme

$$M^2 = \frac{2A^2}{\sqrt{2spq\, \pi}} \int_0^\infty 2spq \cdot t^2 \cdot e^{-t^2} \cdot \sqrt{2spq} \cdot dt$$

$$= \frac{4spq\, A^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty t^2\, e^{-t^2}\, dt.$$

A poněvadž

$$\int_0^\infty t^2\, e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

jest

$$M^2 = \frac{4spq\, A^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = spq\, A^2, \tag{7}$$

a z toho

$$M = A\sqrt{spq}. \tag{8}$$

Kdybychom za stejných podmínek chtěli stanoviti risiko průměrné R, dostali bychom pro ně výraz

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot \int_0^\infty lA \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}}\, dl, \tag{9}$$

kdež výraz

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot e^{-\frac{l^2}{2spq}}$$

udává pravděpodobnost, že počet výher bude o l větší, než pravdě nejpodobnější množství sp, a tudíž též pravděpodobnost, že podnik prodělá obnos lA.

Použitím substituce $l = t \,.\, \sqrt{2spq}$ přejde vzorec 9. ve tvar

$$R = \frac{A}{\sqrt{2\pi\, spq}} \cdot \int_0^\infty t \,.\, \sqrt{2spq} \,.\, e^{-t^2} \,.\, \sqrt{2spq} \,.\, dt$$

$$= A \,.\, \sqrt{\frac{2spq}{\pi}} \,.\, \int_0^\infty t\, e^{-t^2} dt.$$

Poněvadž

$$\int_0^\infty t\, e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2},$$

jest

$$R = A \,.\, \sqrt{\frac{2spq}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} = A \,.\, \sqrt{\frac{spq}{2\pi}}. \tag{10}$$

Dělením rovnic 8. a 10. najdeme, že mezi oběma těmito druhy risik panuje relace

$$\frac{R}{M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{11}$$

aneb

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, M.$$

Zpravidla však jedná se v hospodářských podnicích o celou řadu obchodů s risikem spojených a každý druh této řady zase obsahuje množství speciálních případů o stejné pravděpodobnosti. Ku příkladu: pojišťovny provozují celou řadu různých druhů pojištění a pojišťují na život lidí různých věků; ale při každém druhu pojištění jistě jest pojištěno jisté množství lidí stejně starých, u nichž dlužno se stejnou pravděpodobností předpokládati, že se dožijí určitého věku.

Nazveme-li průměrné risiko podniku spojené s celým tímto obchodem „risikem úplným“ a označíme-li je R, a značí-li dále $M_1, M_2, \ldots M_n$ střední risika jednotlivých druhů obchodů —

„risika parciální“ — lze dokázati, že panuje mezi nimi vztah:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2}. \qquad (12)$$

Vztah tento bývá dokazován buď pomocí věty Čebyšev-ovy *), nebo bývá dedukován z jisté analogie s počtem nejmenších čtverců **) anebo bývá dokazován přímo pro jistý speciální počet parciálních podniků ***), ku příkladu pro $n = 2$. Avšak tento vztah lze dokázati přímo též obecně, ať počet parciálních podniků jest jakýkoliv.

Nechť nějaký podnik provozuje n druhů s risikem spojených obchodů o pravděpodobnostech $p_1, p_2, \ldots p_n$ a pravděpodobnostech opačných $q_1, q_2, \ldots q_n$. Jednotlivé z těchto druhů nechť čítají $s_1, s_2, \ldots s_n$ speciálních případů; pro súčastněné strany příznivé uskutečnění se některého speciálního případu nechť jest v jednotlivých druzích spojeno s odměnami $A_1, A_2 \ldots A_n$, jež jim podnik vyplatí. Střední risika jednotlivých druhů obchodů nazvěme $M_1, M_2 \ldots M_n$.

Jsou-li čísla $s_1, s_2, \ldots s_n$ hodně veliká, lze dle theorému Bernoulli-ho s největší pravděpodobností souditi, že v prvém druhu uskuteční se pro strany příznivě s_1p_1 případů, v druhém druhu s_2p_2 případů, podobně v dalších druzích a v posledním druhu s_np_n případů.

Dle toho vyplatil by podnik stranám celkem obnos:

$$s_1p_1A_1 + s_2p_2A_2 + \ldots + s_np_nA_n.$$

Ve skutečnosti však bude se počet speciálních, pro strany příznivých případů od theoretického počtu lišiti. Označíme-li tento počet příznivých případů v jednotlivých druzích obchodů

$$s_1p_1 + l_1, \; s_2p_2 + l_2, \ldots s_np_n + l_n,$$

kdež čísla $l_1, l_2 \ldots l_n$ udávají úchylku od theoretického, pravděnejpodobnějšího počtu, musí podnik vyplatiti stranám obnos

$$(s_1p_1 + l_1)A_1 + (s_2p_2 + l_2)A_2 + \ldots + (s_np_n + l_n)A_n,$$

*) E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung I. p. 228. II. Aufl. Leipzig und Berlin 1908.

**) C. Landré: Mathem.-technische Kapitel zur Lebensversicherung p. 428. Jena 1905.

***) E. Czuber: l. c. p. 229, nebo E. Blaschke: Vorlesungen über mathem. Statistik. Leipzig u. Berlin 1906. pag. 187.

tedy o

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_n A_n \tag{13}$$

více nebo méně než theoreticky předpokládal, dle toho, je-li tento výraz kladný nebo záporný.

Pravděpodobnost, že právě tato kombinace úchylek l_1, l_2 ... l_n a tudíž také tato kombinace differencí vyplacených obnosů $l_1 A_1$, $l_2 A_2$ ... $l_n A_n$ se dostaví, jest dána součinem

$$\frac{1}{\sqrt{2 s_1 p_1 q_1 \pi}} \cdot e^{-\frac{l_1^2}{2 s_1 p_1 q_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi s_2 p_2 q_2}} \cdot e^{-\frac{l_2^2}{2 s_2 p_2 q_2}} \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi s_n p_n q_n}} \cdot e^{-\frac{l_n^2}{2 s_n p_n q_n}},$$

aneb položíme-li k vůli zjednodušení

$$\frac{1}{\sqrt{2 s_i p_i q_i}} = h_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{13a}$$

součinem

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot e^{-h_1^2 l_1^2 - h_2^2 l_2^2 - \ldots - h_n^2 l_n^2} = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot e^{-\sum_1^n h_i^2 l_i^2}.$$

Tudíž úplné průměrné risiko, které v tomto případě úchylek l_i jest s podnikem spojeno, jest

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot (l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_n A_n)\, e^{-\sum_1^n h_i^2 l_i^2}$$
$$= \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot \sum_1^n l_i A_i \cdot e^{-\sum_1^n h_i^2 l_i^2}.$$

Poněvadž však úchylky l_1, l_2, ... l_n mohou míti všechny možné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$ a vázány jsou jen jedinou relací, totiž

$$l_1 A_1 + l_2 A_2 + \ldots + l_n A_n > 0,$$

neboť jenom tenkrát podnik škodu utrpí, když tato suma jest kladná, jest úplné průměrné risiko R celého podniku dáno n-násobným integrálem

$$R = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} \cdot \int\int \ldots \int_{(n)} \sum_1^n l_i A_i \cdot e^{-\sum_1^n h_i^2 l_i^2} \cdot dl_1\, dl_2 \ldots dl_n, \tag{15}$$

kdež dlužno integraci provésti jednou v mezích od

$$-\frac{1}{A_1}(l_2 A_2 + l_3 A_3 + \ldots + l_n A_n)$$

do ∞, v ostatních pak případech od $-\infty$ do $+\infty$.

Výraz 15. lze psáti též ve tvaru

$$R=\frac{h_1h_2\dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\Big[A_1\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_1\,.\,e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_1dl_2\dots dl_n$$

$$+A_2\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_2\,e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_1dl_2\dots dl_n$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+A_n\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_n\,e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_1dl_2\dots dl_n\Big]$$

čili

$$R=\frac{h_1h_2\dots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\,.\,\sum_1^n{}^k A_k\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_k\,e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_1dl_2\dots dl_n. \tag{16}$$

Jde nyní o stanovení hodnot jednotlivých n-násobných integrálů tohoto součtu.

Položíme-li všeobecně

$$\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_k\,e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_1\,dl_2\dots dl_n=J_k,$$

jest

$$J_1=\underset{(n)}{\int\int\dots\int}l_1\,e^{-h_1^2l_1^2-h_2^2l_2^2-\dots-h_n^2l_n^2}\,dl_1dl_2\dots dl_n \tag{17}$$

aneb

$$J_1=\underset{(n-1)}{\int\int\dots\int}e^{-h_2^2l_2^2-h_3^2l_3^2-\dots-h_n^2l_n^2}\,dl_2dl_3\,.$$

$$\dots dl_n\int\limits_{-\frac{l_2A_2+\dots+l_nA_n}{A_1}}^{\infty}l_1\,e^{-h_1^2l_1^2}\,dl_1\,.$$

Zavedeme-li do posledního integrálu novou proměnnou rovnicí

$$h_1l_1=t_1,$$

dostaneme:

$$J_1=\underset{(n-1)}{\int\int\dots\int}e^{-\sum\limits_2^n h_i^2 l_i^2}\,dl_2dl_3\dots dl_n\,.\int\limits_{-\frac{h_1}{A_1}\cdot(l_2A_2+\dots+l_nA_n)}^{\infty}\frac{t_1}{h_1}\,.\,e^{-t_1^2}\frac{dt_1}{h_1}$$

$$=\frac{1}{h_1^2}\cdot\underset{(n-1)}{\int\int\dots\int}e^{-\sum\limits_1^n h_i^2 l_i^2}\,dl_2\,dl_3\dots dl_n\,.\int\limits_{-\frac{h_1}{A_1}\cdot(l_2A_2+\dots+l_nA_n)}^{\infty}t_1\,e^{-t_1^2}\,dt_1\,.$$

Avšak

$$\int\limits_{-\frac{h_1}{A_1}(l_2A_2+\dots+l_nA_n)}^{\infty} t_1\, e^{-t_1^2}\, dt_1 = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot(l_2A_2+\dots+l_nA_n)},$$

takže

$$J_1 = \frac{1}{2h_1^2}\cdot \underbrace{\int\int\dots\int}_{(n-1)} e^{-\sum\limits_2^n h_i^2 l_i^2 - \frac{h_1^2}{A_1^2}(l_2A_2+\dots+l_nA_n)^2} dl_2 dl_3 \dots dl_n.$$

Exponent tohoto výrazu

$$-\left[h_2^2 l_2^2 + h_3^2 l_3^2 + \dots + h_n^2 l_n^2 + \frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot(l_2A_2+\dots+l_nA_n)^2\right]$$

lze upraviti na tvar:

$$-\Big[h_2^2 l_2^2 + \frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot l_2^2 A_2^2 + 2\frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot l_2 A_2\cdot(l_3A_3+\dots+l_nA_n)$$
$$+ h_3^2 l_3^2 + \dots + h_n^2 l_n^2 + \frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot(l_3A_3+\dots+l_nA_n)^2\Big]$$

aneb

$$-\Big[\sum_3^n h_i^2 l_i^2 + \frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot\Big(\sum_3^n l_i A_i\Big)^2 + l_2^2\,\frac{h_1^2A_2^2+h_2^2A_1^2}{A_1^2} \tag{18}$$
$$+ 2l_2\cdot\frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot A_2\cdot(l_3A_3\dots+l_nA_n)\Big].$$

Potom

$$J_1 = \frac{1}{2h_1^2}\cdot\underbrace{\int\int\dots\int}_{(n-2)} e^{-\sum\limits_3^n h_i^2 l_i^2 - \frac{h_1^2}{A_1^2}\cdot\left(\sum\limits_3^n l_i A_i\right)^2} dl_3 \dots$$

$$dl_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-l_2^2\cdot\frac{h_1^2A_2^2+h_2^2A_1^2}{A_1^2} - 2l_2\cdot\frac{h_1^2\cdot A_2\cdot(l_3A_3+\dots+l_nA_n)}{A_1^2}} dl_2.$$

Položíme-li k vůli zjednodušení

$$\frac{h_1^2A_2^2+h_2^2A_1^2}{A_1^2} = a_1$$

a dále
$$\frac{h_1^2\cdot A_2(l_3A_3+\dots+l_nA_n)}{A_1^2} = b_1,$$

jest poslední část integrálu J_1 rovna

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1 l_2^2 - 2b_1 l_2}\, dl_2 = e^{\frac{b_1^2}{a_1}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1\left(l_2+\frac{b_1}{a_1}\right)^2} dl_2\,. \tag{19}$$

Substitucí $\left(l_2 + \frac{b_1}{a_1}\right) \cdot \sqrt{a_1} = t_1$

přejde tento integrál ve tvar

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} \cdot e^{\frac{b_1^2}{a_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t_2^2}\, dt_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_1}} \cdot e^{\frac{b_1^2}{a_1}} \tag{20}$$

Dosadíme-li za a_1 a b_1 jejich původní hodnoty, dostaneme

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2h_1^2} \cdot \frac{\sqrt{A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \cdot \int\int \cdots$$

$$\int_{(n-2)} e^{-h_3^2 l_3^2 - \ldots - h_n^2 l_n^2 - \frac{h_1^2}{A_1^2} \cdot (l_3 A_3 + \ldots + l_n A_n)^2 + \frac{h_1^4 A_2^2 (l_3 A_3 + \ldots + l_n A_n)^2}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} . dl_3 \ldots dl_n .$$

Upravíme-li opět exponent tohoto výrazu na tvar

$$-\left[h_4^2\, l_4^2 + \ldots + h_n^2\, l_n^2 + \frac{h_1^2\, h_2^2}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2} \cdot (l_4\, A_4 + \ldots + l_n\, A_n)^2 \right.$$
$$\left. + a_2\, l_3^2 + 2b_2\, l_3\right], \tag{21}$$

kdež

$$a_2 = \frac{h_1^2 h_2^2 A_3^2 + h_1^2 h_3^2 A_2^2 + h_2^2 h_3^2 A_1^2}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}$$

a

$$b_2 = \frac{h_1^2 h_2^2 A_3\, (l_4 A_4 + \ldots + l_n A_n)}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2},$$

jest

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2h_1^2} \cdot \frac{\sqrt{A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \cdot \int\int \cdots$$

$$\int_{(n-3)} e^{-\sum_1^n h_i^2\, l_i^2 - \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2} \left(\sum_4^n l_i A_i\right)^2} dl_4 \ldots dl_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_2 l_3^2 - b_2 l_3} dl_3 .$$

Poslední integrál v tomto výraze má týž tvar jako ve vzorci 19. a proto jeho hodnota dle vzorce 20. jest

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_2}} \cdot e^{\frac{b_2^2}{a_2}}, \tag{22}$$

takže dosazením za a_2 najdeme

$$J_1 = \frac{1}{2h_1^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} . \sqrt{A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} . \sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 A_3^2 + h_1^2 h_3^2 A_2^2 + h_2^2 h_3^2 A_1^2}} \cdot$$

$$\cdot \int\int \ldots \int_{(n-3)} e^{-\sum_4^n h_i^2 l_i^2 - \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2} (\Sigma A_i l_i)^2 + \frac{b_2^2}{a_2}} . dl_4 \ldots dl_n .$$

Podobnou úpravou exponentu lze každý další z $(n-3)$ integrálů upraviti na tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_{k-1} l_k^2 - 2b_{k-1} l_k}\, dl_k. \tag{23}$$

Provedením každé této integrace dostane se do výrazu pro J_1 jako činitel $\sqrt{\pi}$ a druhý kořen ze zlomku, jehož čitatelem i jmenovatelem jsou součty různých kombinací čtverců čísel h_i a A_i. Při k-té integraci, vyznačení vzorcem 23., jsou v čitateli zlomku kombinace $(k-1)$ prvků a ve jmenovateli kombinace k prvků a to v obou případech tak tvořené, že ve skupině

$$h_1^2 h_2^2 h_3^2 \ldots h_k^2, \text{ resp. } h_1^2 h_2^2 h_3^2 \ldots h_{k-1}^2$$

jest postupně vždy jeden prvek h_i^2 nahrazen prvkem A_i^2, při čemž $i = k, k-1, k-2, \ldots 2, 1$, po případě $i = k-1, k-2, \ldots 2, 1$.

Poněvadž provedení k-té integrace dá za výsledek

$$\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{k-2}^2 A_{k-1}^2 + h_1^2 \ldots h_{k-3}^2 h_{k-1}^2 A_{k-2}^2 + \ldots + h_2^2 h_3^2 \ldots h_{k-1}^2 \cdot A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{k-1}^2 A_k^2 + h_1^2 \ldots h_{k-2}^2 \cdot h_k^2 \cdot A_{k-1}^2 + \ldots + h_2^2 h_3^2 \ldots h_k^2 A_1^2}}, \tag{24}$$

najdeme provedením všech integrací pro J_1 hodnotu:

$$J_1 = \frac{1}{2h_1^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{h_1^2 A_2^2 + h_2^2 A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 A_3^2 + h_1^2 h_3^2 A_2^2 + h_2^2 h_3^2 A_1^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{h_1^2 h_2^2 A_3^2 + h_1^2 h_3^2 A_2^2 + h_2^2 h_3^2 A_1^2}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 h_3^2 A_4^2 + h_1^2 h_2^2 h_4^2 A_3^2 + h_1^2 h_3^2 h_4^2 A_2^2 + h_2^2 h_3^2 h_4^2 A_1^2}} \cdots$$

$$\cdots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{n-2}^2 A_{n-1}^2 + \ldots}}{\sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{n-1}^2 A_n^2 + \ldots}}$$

aneb po zkrácení

$$J_1 = \frac{A_1 \cdot (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2h_1^2 \cdot \sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{n-1}^2 A_n^2 + h_1^2 \ldots h_{n-2}^2 \cdot h_n^2 A_{n-1}^2 + \ldots}} = \frac{A_1 \cdot (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2h_1^2 \cdot N},$$

kdež N značí onen druhý kořen ve jmenovateli.

Stejným postupem najdeme pro ostatní integrály ze součtu 16. hodnoty:

$$J_2 = \frac{A_2 \,.\, (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2h_2^2 \,.\, N}$$

$$J_3 = \frac{A_3 \,.\, (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2h_3^2 \,.\, N}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_n = \frac{A_n \,.\, (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2h_n^2 \,.\, N} \,.$$

Dosadíce tyto hodnoty do vzorce 16. obdržíme pro úplné průměrné risiko R hodnotu:

$$R = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n \,.\, (\sqrt{\pi})^{n-1}}{2 \,.\, (\sqrt{\pi})^n \,.\, N} \,.\, \left[\frac{A_1^2}{h_1^2} + \frac{A_2^2}{h_2^2} + \frac{A_3^2}{h_3^2} + \ldots + \frac{A_n^2}{h_n^2}\right],$$

čili

$$R = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{2\sqrt{\pi} \,.\, \sqrt{h_1^2 h_2^2 \ldots h_{n-1}^2 A_n^2 + \ldots + h_2^2 h_3^2 \ldots h_n^2 A_1^2}} \,.$$

$$\,.\, \left[\frac{A_1^2}{h_1^2} + \frac{A_2^2}{h_2^2} + \frac{A_3^2}{h_3^2} + \cdots + \frac{A_n^2}{h_n^2}\right].$$

Zkrátíme-li zlomek součinem $h_1 h_2 \ldots h_n$, jest

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \,.\, \sqrt{\frac{A_n^2}{h_n^2} + \frac{A_{n-1}^2}{h_{n-1}^2} + \cdots + \frac{A_2^2}{h_2^2} + \frac{A_1^2}{h_1^2}}} \,.$$

$$\,.\, \left[\frac{A_1^2}{h_1^2} + \frac{A_2^2}{h_2^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}^2}{h_{n-1}^2} + \frac{A_n^2}{h_n^2}\right],$$

a po dalším zkrácení

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\sum_1^n{}_i \frac{A_i^2}{h_i^2}} \,. \qquad (25)$$

Položíme-li dle vzorce 13. a)

$$\frac{1}{h_i^2} = 2 s_i p_i q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3 \ldots n),$$

jest

$$R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\sum_1^n{}_i A_i^2 \,.\, 2 s_i p_i q_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\sum_1^n{}_i A_i^2 s_i p_i q_i} \,.$$

Avšak dle vzorce 8. jest

$$A_i^2 \,.\, s_i p_i q_i = M_i^2 \,,$$

takže pro úplné průměrné risiko najdeme konečný vzorec

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\sum_1^n{}_i M_i^2}, \tag{26}$$

jenž udává souvislost mezi úplným risikem průměrným a částečnými risiky středními.

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

(Dokončení.)

Nyní hledejme hodnotu λ' dvojpoměru

$$(UV\, {}^0A_1 {}^0B_1) = (UV\, {}^0A'_1 {}^0B'_1) = \lambda'$$

a máme dokázati

$$\lambda = -\lambda'.$$

Ježto tedy ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$ jsou samodružnými body involuce stanovené dvojinami U, V a A_1, A'_1, budeme body tyto hledati též jako společnou dvojinu involuce o samodružných bodech U, V a involuce o samodružných bodech A_1, A'_1. Ježto souřadnice bodů A_1, A'_1 jsou:

$$a_1 = \alpha + \sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)}, \qquad a'_1 = \alpha - \sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)},$$

lze rovnici involuce o těchto bodech jakožto samodružných psáti následovně:

$$xy - \alpha(x+y) + \alpha^2 - (u-\alpha)(v-\alpha) = 0.$$

Vypočítáme-li společné kořeny x, y rovnice této a pak rovnice:

$$2xy - (x+y)(u+v) + 2uv = 0,$$

rovnice to involuce o samodružných bodech U, V, tu máme již souřadnice hledaných bodů ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$.

Ježto obě rovnice jsou symmetrickými, tu máme:

$$x_1 = y_2, \qquad x_2 = y_1.$$

Označme si pak:

$${}^0a_1 = x_1 = y_2, \qquad {}^0a'_1 = x_2 = y_1,$$

a tu po výpočtu dostaneme:

$${}^0a_1 = \frac{\alpha u + \alpha v - 2uv}{2\alpha - u - v} + i\,\frac{u-v}{2\alpha - u - v}\sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)},$$

$${}^0a'_1 = \frac{\alpha u + \alpha v - 2uv}{2\alpha - u - v} - i\,\frac{u-v}{2\alpha - u - v}\sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)}.$$