Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohumil Kučera

O rázu těles

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 283--294

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108961

a řešme užitím funkcí

$$y = ax^2 \pm bx \pm c,$$
$$y = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2},$$

takže jest třeba dvou průsvitných papírů, z nichž jeden nese známý nám již log. obraz funkce

$$(\nu) \qquad y = \pm x^{-1} \pm x^{-2}$$

a druhý čtyři soustavy α^1 křivek, obrazů funkce

$$(\varrho) \qquad y = x^2 \pm x \pm \lambda,$$

kde λ jest proměnlivý parametr.

Obecná rovnice 5. stupně

$$ax^5 \pm bx^4 \pm cx^3 \pm dx^2 \pm ex \pm f = 0 \qquad (4)$$

pak obdobně vyžaduje dvou soustav α^1 křivek, totiž obrazů funcí

$$(\varrho) \qquad y = x^2 \pm x \pm \lambda$$
$$(\sigma) \qquad y = \pm \mu x^{-1} \pm x^{-2} \pm x^{-3},$$

kde λ, μ jsou proměnlivé parametry.

Seznáváme tudíž, že použití cesty logarithmicko-grafické umožní nám mechanické řešení algebraických rovnic jakéhokoliv stupně, jichž počet členů jest nejvýše *šest* (při methodě Reuschle-ho jest tento největší počet členů dán číslem *pět*); možno zde tedy řešiti rovnici 6. stupně, v níž schází aspoň jeden člen, rovnici 7. stupně, v níž chybějí aspoň dva členy, atd.

(Dokončení.)

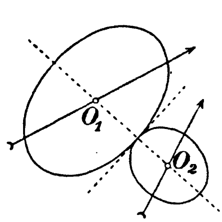
O rázu těles.

Žákům středních škol píše prof. Dr. **Boh. Kučera.**

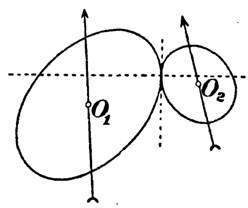
Základní poznatky o rázu těles obsahuje Jeništa-Maškova učebnice fysiky pro vyšší třídy středních škol. Úkolem tohoto článku jest tyto poznatky poněkud prohloubiti, do té míry, aby čtenáři bylo umožněno řešiti některé sem spadající jednoduché úlohy.

Počneme jednoduchým případem: Dvě tělesa m_1 a m_2 pohybují se svými těžišti po téže přímce s různými rychlostmi u_1 a u_2, počítanými v témž směru, na př. z leva v pravo za kladné.

Je-li rychlost tělesa zadního u_1 větší než u_2, tělesa se srazí. Předpokládejme, že ráz *centrálný* (dostředný) t. j. takový, že kolmice vztyčená v bodě dotykovém obou těles na tečné rovině jejich — kolmice, kteráž určuje *směr rázu* — prochází těžištěm O_1 a O_2 obou (obr. 1.). Není-li tomu tak, nazývá se ráz *excentrickým* (výstředným) (obr. 2.). Srovnáváme-li směr pohybu těles

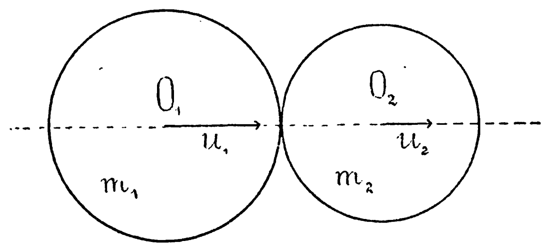


Obr. 1.



Obr. 2.

se směrem rázu, rozeznáváme *ráz přímý* a *šikmý*, dle toho, zdali směr pohybu jest zároveň směrem rázu nebo je-li od něho odchylný. Nejjednodušším typem rázu jest patrně *ráz centrálný přímý*, jenž jest znázorněn obr. 3.; pojednáme nejprve o tomto



Obr. 3.

případě. V obrazci 3. jsou obě tělesa koulemi, jako tomu bývá také při měrných pokusech o rázu, a to proto, že u koulí jest ráz vždy centrálným, jak nás o tom velmi jednoduchá úvaha ihned poučuje.

I tento nejjednoduší případ jest však ve své podstatě velmi složitým. Koule dotknou se sice nejprve v jediném bodě, leč hned po té se deformují. Poučuje nás o tom velmi jednoduchý pokus, dopad kuličky ze slonoviny na začazenou desku skleněnou, při němž se kulička začerní na kruhové plošce konečné velikosti. Deformace tu může býti buď trvalou, jako u látek velmi měkkých, nebo úplně dočasnou, po rázu neznatelnou nebo konečně se po rázu vyrovná pouze částečně. Vstupují zde v počet síly pružnosti, takže analytické řešení problému jest dosud nad naše síly. Jeden jednoduchý důsledek jest však zajištěn. Abstrahujeme-li od působení jakýchkoli sil vnějších, a nazveme-li rychlosti obou těles po rázu v_1 a v_2, platí vztah

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \qquad (1)$$

Praví, že celková *hybnost* po rázu jest táž, jako byla před rázem. Hybností hmoty m nadané rychlostí v nazýváme součin mv hmoty a rychlosti.

Síla f, měřená vždy součinem z hmoty a urychlení a, projevuje se právě změnou hybnosti, neboť

$$f = ma = m \frac{dv}{dt}. \qquad (2)$$

Protože pak předpokládáme, že na systém obou koulí jakožto celek nepůsobí žádné vnější síly, vyplývá hořejší vztah ze samé definice síly.

Všimněme si nyní blíže vlastního děje rázu. Během něho působí na těleso m_1 od m_2 síla f_1 (počítaná kladnou ve směru pohybu), kteráž se projevuje tlakem. Podobně působí na m_2 od m_1 síla f_2. Dle principu akce a reakce*) jsou obě tyto síly téže velikosti ale opačného směru čili $f_2 = -f_1$. Účinkem těchto s časem rychle proměnlivých sil se obě tělesa deformují, což trvá až do toho okamžiku, kdy těžiště obou jsou si nejblíže. V tomto konečném okamžiku *periody deformační* jest rychlost obou těles táž, rovna c, a můžeme je vypočítati z rovnice obdobné (1)

$$m_1 u_1 + m_3 u_2 = m_1 c + m_2 c$$

jakožto

$$c = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 \; m_2}. \qquad (3)$$

*) *Newton* vyjádřil jej v nesmrtelných „Philosophiae naturalis principia mathematica“ jakožto třetí zákon pohybový slovy: Actioni contrariam semper et aequalem reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutus semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Nyní můžeme se alespoň něčeho dozvěděti o oněch silách f_1 a f_2, o kterých jsme mluvili. Nechť trvá perioda deformační od času $t = 0$, v němž se tělesa dotkla do $t = \tau$, kde nastala deformace největší. Rozdělme (velmi krátkou) dobu τ na kratinké okamžiky Δt a použijme na všechny roznásobené rovnice (2) definující sílu

$$m \,.\, \Delta u = f \,.\, \Delta t \tag{4}$$

a výsledky sečtěme. Obdržíme pro prvou a druhou kouli vztahy

$$m_1 \,.\, \sum_{t=0}^{t=\tau} \Delta u = \sum_{t=0}^{t=\tau} f_1 \, \Delta t, \qquad m_2 \,.\, \sum_{t=0}^{\tau} \Delta u = \sum_{t=0}^{\tau}{}_1 f_2 \, \Delta t, \tag{5}$$

kdež jsme mohli m_1 (resp. m_2) vytknouti před znamení součtu, neboť hmoty zůstávají rázem nezměněné, kdežto síly f_1 a f_2 jsou v každém okamžiku jiné. Součty na levých stranách značí patrně celkovou změnu rychlosti prvé i druhé koule a jsou tedy rovny $c - u_1$ resp. $c - u_2$. Součty na pravých stranách mají název *impuls* síly f_1 resp. f_2; označíme-li je písmenami h_1 resp. h_2, můžeme dle definice integrálu*) psáti místo (5)

$$h_1 \equiv \int_0^\tau f_1 \,.\, dt = m_1 (c - u_1) \quad \text{a} \quad h_2 \equiv \int_0^\tau f_2 \,.\, dt = m_2 (c - u_2). \tag{6}$$

Dosazením za c z rovnice (3) plyne

$$h_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1) = - h_2, \tag{7}$$

což jest ostatně okamžitě patrno ze vztahu $f_2 = - f_1$.

Ačkoli tedy o okamžitých silách f_1 a f_2 nevíme téměř ničeho, můžeme přece stanoviti jejich impulsy, t. j. časové integrály v dobách τ, v limitě nekonečně krátkých.

Ježto dle předpokladu jest $u_1 > u_2$ a tedy $u_1 > c > u_2$, vidíme, že impuls h_1 na zadní kouli vychází dle (6) se znamením záporným, t. j. že má směr *proti* pohybu, kdežto h_2 má týž směr jako pohyb.

Po skončení doby deformační nastává *restituce* trvající od okamžiku τ do τ'. Abychom o ní mohli něco říci, musíme vzíti útočiště k *hypothese*, neboť, jak jsme se již výše zmínili, ani theorie pružnosti nám dosud nemohla podati uspokojivé odpovědi.

*) Viz *Bydžovský-Vojtěch*: Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reáln. gymnasií § 33. str. 55.

Dle *Newtona* rozeznáváme dva krajní případy, mezi nimiž leží skutečnost:

1. *Ráz těles dokonale nepružných.* Tato jsou charakterisována tím, že každá deformace jest trvalou. Následkem toho není žádné restituce a obě tělesa pohybují se po rázu dále společnou rychlostí

$$v_1 = v_2 = c = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

Ježto není reformačních sil f_1 a f_2, není po době τ také ani jejich impulsů.

2. *Ráz těles dokonale pružných.* U těchto mizí každá deformace stejně jako nastala a síly f_1 a f_2 nabývají týchž hodnot jako při deformaci, ovšem v pořadí časově opačném. Proto jejich impulsy v dobách od τ do τ' jsou stejné jako v časech od 0 do τ, čili označíme-li je H_1 a H_2 jsou

$$H_1 \equiv \int_\tau^{\tau'} f_1 dt = \int_0^\tau f_1 dt = h_1$$

a podobně $$H_2 = h_2.$$

3. *Ráz těles nedokonale pružných.* V přírodě není ani dokonale pružných ani dokonale nepružných těles. Proto není impuls H_1 ani roven nulle, ani roven h_1, nýbrž leží mezi oběma těmito hodnotami a podobně ovšem i H_2, kteréž až na znamení jest s H_1 stejně veliké, jak plyne z principu akce a reakce. Můžeme tudíž psáti s *Newtonem*

$$H_1 = k \,.\, h_1 \qquad H_2 = k \,.\, h_2, \tag{8}$$

kde faktor k jest pravým zlomkem, t. j. $0 < k < 1$. Nazývá se *koefficientem restituce.* Oba dřívější případy jsou zahrnuty v tomto všeobecném, píšeme-li pro prvý $k = 0$, pro druhý $k = 1$.

Podobně jako v periodě deformační odvodíme z definice síly v periodě restituční — píšeme-li nyní za síly F_1 F_2, kteréž jsou různé a to menší než f_1 f_2 — vztahy

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau'} F_1\, dt &\equiv H_1 = m_1 (v_1 - c) = k \,.\, h_1 = k \,.\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1) \\ \int_\tau^{\tau'} F_2\, dt &\equiv H_2 = m_2 (v_2 - c) = k \,.\, h_2 = - k \,.\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1) \\ &\equiv - H_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Dosazením za c z rovnice (3) plynou výrazy pro konečné rychlosti v_1 a v_2 po rázu

$$v_1 = \frac{(m_1 - km_2)u_1 + (1+k)m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1u_1 + m_2u_2 - km_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - km_1)u_2 + (1+k)m_1u_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1u_1 + m_2u_2 + km_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}. \tag{10}$$

Jest patrno, že pro ráz dokonale nepružný, $k = 0$, přechází jak nutno v_1 i v_2 v c, kdežto pro ráz dokonale pružný lze výsledek vylíčiti takto: Prvá koule v periodě deformační ztratila rychlost $u_1 - c$, druhá nabyla na rychlosti obnos $c - u_2$. Tato ztráta i zisk opakují se znova v periodě restituční, takže obnášejí $2(u_1 - c)$ resp. $2(c - u_2)$ a rychlosti konečné jsou tedy

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - 2(u_1 - c) = 2c - u_1 \\ v_2 &= u_2 + 2(c - u_2) = 2c - u_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Dosazením $k = 1$ do (10) lze verifikovati výsledek (11), ačkoli prosté slovní dovození jeho není průkazným.

Z rovnice (7) plyne

$$u_2 - u_1 = h_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Podobný vztah plyne po krátké transformaci z rovnic (9) přepsaných ve tvar

$$H_1 = m_1(v_1 - c) = -m_2(v_2 - c).$$

Zní

$$v_2 - v_1 = -H_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Dosazením hypothetického vztahu (8) mezi impulsy při deformaci a restituci dostáváme důležitou rovnici

$$v_2 - v_1 = -k(u_2 - u_1), \tag{12}$$

kteráž jest úplně rovnocennou s (8). Ale $u_2 - u_1$ a $v_2 - v_1$ nejsou než relativní rychlosti před rázem a po něm druhého tělesa vzhledem k prvému, a to ve směru rázu. Můžeme tudíž Newtonovu hypothesu o rázu vysloviti také následující větou:

Složka relativní rychlosti hmotných středů těles ležící ve směru rázu jest po rázu rovna k-násobné relativné rychlosti před rázem a směru opačného. Tato jednoduchá věta usnadňuje často řešení různých zvláštních případů.

Není nezajímavo vypočísti ztrátu — ΔE kinetické energie těles při rázu. Obnáší patrně

$$-\Delta E = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Dosadíme-li za v_1 a v_2 z (8), plyne

$$\begin{aligned} -\Delta E &= \frac{1}{2}(1-k^2)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1-k^2)\frac{m_1+m_2}{m_1 m_1} h_1^2 . \end{aligned} \tag{13}$$

Jest patrno, že je maximální za rázu těles dokonale nepružných, kdežto za rázu těles dokonale pružných vůbec nenastává. Ovšem, že se energie při rázu neztrácí, nýbrž pouze mění v jiný tvar a to hlavně v kinetickou energii nejmenších částic těles srazivších se, nebo jinak řečeno v teplo. Jistá, ale velmi malá část původní energie kinetické změní se také v elastické deformační oscillace těles a ve vlny zvukové, jimiž jest dán typický zvuk při rázu vznikající.

Vzhledem k úkolu článku nechceme se zde šířiti o velikosti koefficientů restitučních, kteráž závisí na materiálu obou srazivších se těles a snad také na jejich relativní rychlosti x; leží mezi hranicemi 0·94 pro ráz skla na sklo, a 0·17 pro hlínu na hlínu. Také o době trvání rázu uvádíme pouze dva zajímavější údaje. Srazí-li se dvě koule ocelové průměru 5 *cm* o relativní rychlosti 1 $\frac{cm}{sek}$ trvá ráz necelé 4 desettisíciny vteřiny. Kdyby se s touž rychlostí srazily dvě ocelové koule velikosti zeměkoule, trval by ráz skoro 27 hodin. Pro bližší poučení odkazujeme čtenáře k *Strouhal-Kučerově* „Mechanice“ (II. vydání Praha 1910, nákladem J. Č. M. str. 676 a další).

To, co dosavad bylo uvedeno, umožňuje čtenáři, aby dokázal různé věty uvedené ve středoškolské učebnici *Mašek-Jeništově* bez důkazů. V dalším chceme již jen uvésti řešení některých úloh, která mají býti příkladem, jak se v obdobných jiných postupuje.

Pojednáme nejprve o *rázu hmotné částice na pevnou rovinu.*

I. Ráz přímý; částice dopadá na rovinu kolmo rychlostí u_1. Rychlost roviny jest $u_2 = 0$. Řešení jest dáno vzorci (10), v nichž pevnost roviny vyjádříme tím, že klademe její hmotu m_2 nekonečně velikou. Dělíme-li tedy v čitateli i jmenovateli pravé strany m_2 a dosadíme $m_2 = \infty$ $u_2 = 0$ plyne okamžitě

$$v_1 = - ku_1 \quad v_2 = 0.$$

Částice odskočí od roviny s rychlostí menší než byla dopadla. Kdyby byla z látky naprosto nepružné, zůstala by u roviny nepohnuta, kdežto ideálně pružná by odskočila s nezměněnou co do velikosti rychlostí dopadovou.

Přímo došli bychom k řešení pomocí impulsu. Impuls deformační je

$$h_1 = m_2 (0 - u_1) = - m_1 u_1,$$

impuls restituční

$$H_1 = kh_1 = - km_1 u_1 = m_1 v_1$$

tedy $$v_1 = - ku_1.$$

Také rovnice (12) dává okamžitě řešení dosazením $u_2 = v_2 = 0$.

II. Ráz šikmý. Částice dopadá na stěnu rychlostí u pod úhlem (s kolmicí dopadovou) α. Zde nutno rozeznávati dva případy, totiž zdali jest stěna absolutně hladká (není-li tření) nebo je-li drsná.

1. V prvém případě rozložíme rychlost částice na složku $u_1 = u \cos \alpha$ kolmou k rovině, a $u'_1 = u \sin \alpha$ ležící v rovině samé.*) Ježto není tření, nezmění se rázem složka $u'_1 = v'_1$, kdežto u_1 přejde dle dřívějšího ve $v_1 = - ku_1$. Výsledná rychlost po rázu tvoří s kolmicí dopadovou úhel β, daný patrně vztahem

$$tg\, \beta = \left| \frac{v'_1}{v_1} \right| = \frac{u'_1}{ku_1},$$

kdežto dříve bylo $$tg\, \alpha = \frac{u'_1}{u_1}.$$

Ježto $0 < k < 1$, bude úhel „odrazu“ β obecně větší než úhel dopadu. Jen u těles ideálně pružných bylo by $\beta = \alpha$, u naprosto nepružných však $\beta = 0$. Velmi jednoduše plyne výraz pro ztrátu kinetické energie. Jest rovna

$$\frac{m_1}{2} \left[(u_1^2 + u'^2_1) - (k^2 u_1^2 + u'^2_1) \right] = \frac{m_1}{2} u_1^2 (1 - k^2).$$

*) Příslušný jednoduchý obrazec sestrojí si laskavý čtenář sám.

2. Je-li rovina, na niž částice narazí, drsnou, tu nezůstává tangenciální komponenta u'_1 rychlosti nezměněna, ježto nastává *tření*. Z citované již středoškolské učebnice jest známo, že tření (vlečné) jest úměrno kolmému tlaku troucích se rovin a že jest silou opačného směru než tangenciální (v rovině ležící) složka rychlosti.

Je-li okamžitá síla normálná (kolmý tlak) velikosti f_1 je síla od tření rovna μf_1, kde μ jest koefficientem tření vlečného. Působí tudíž během deformace impuls od tření daný vzorcem

$$\mu \, . \int_0^\tau f_1 \, . \, dt = \mu h_1,$$

po čas restituce pak impuls

$$\mu \, . \int_\tau^{\tau'} f'_1 dt = \mu H_1,$$

kde f'_1 znamená restituční síly menší než deformační, $f'_1 < f_1$.

Tyto impulsy mají za následek změnu tangenciální rychlosti a jejich účinek celkový jest dán vztahem

$$\mu (h_1 + H_1) = m_1 (v'_1 - u'_1),$$

kde v'_1 jest tangenciální složka rychlosti po rázu. Složka normální změní se rázem stejně jako v případě předcházejícím. Tím jsou všechny předpoklady k řešení dány. Rychlost dopadající částice byla u o komponentách u_1 a u'_1. Rázem změnila se složka normálná u_1 ve $v_1 = -ku_1$, složka tangenciálná u'_1 ve v'_1, kteréž

$$v'_1 = u'_1 + \frac{\mu}{m_1}(h_1 + H_1) = u'_1 + \frac{\mu}{m_1}(1 + k) h_1.$$

O impulsu h_1 víme, že jest

$$h_1 = - m_1 u_1,$$

takže

$$v'_1 = u'_1 - (1 + k) \mu u_1.$$

Složením navzájem kolmých komponent v_1 a v'_1 obdržíme výslednou rychlost v_1 po rázu, která tvoří s dopadovou kolmicí úhel β' daný vztahem

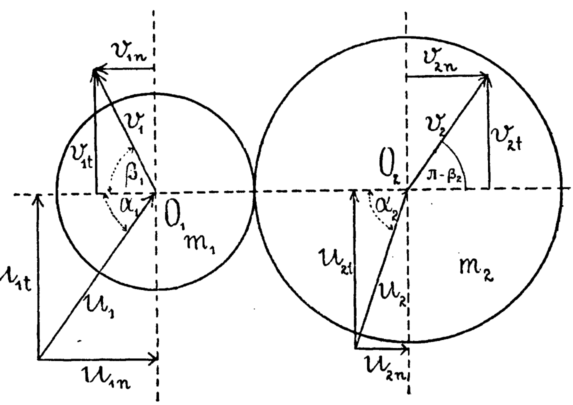
$$tg \, \beta' = \left| \frac{v'_1}{v_1} \right| = \frac{u'_1 - (1 + k) \mu u_1}{k u_1} = tg \, \beta - \frac{1 + k}{k} \mu u_1.$$

Jinak lze psáti též

$$k \cdot tg\,\beta' = tg\,\alpha - (1 + k)\,\mu.$$

Ježto k a μ jsou veličiny kladné, jest z toho patrno, že následkem tření se zmenšuje úhel odrazu a stává se bližším úhlu dopadovému.

Ovšem platí naše vývody jen v mezích předpokladu, že stává během celého děje rázu tření vlečné. Kdyby mělo dopající těleso tvar koule, která se může otáčeti kolem osy, jež tvoří se směrem dopadové normály nějaký úhel, nastalo by již za průběhu děje rázu otáčení, tření vlečné změnilo by se ve valivé a vyvozené vztahy přestaly by býti platnými. Od tohoto poněkud složitějšího případu abstrahujeme.



Obr. 4.

Jakožto poslední ukázku provedeme řešení *šikmého rázu dvou koulí.* Budiž rychlost prvé koule před rázem u_1, a tato nechť tvoří se spojnicí středů koulí $O_1 O_2$ úhel α_1. Po rázu změní se u_1 na v_1, které tvoří s $O_1 O_2$ úhel β_1. Obdobné veličiny u koule druhé jsou označeny indexem 2. Rozložíme si všechny rychlosti na složky normálné, ležící ve směru rázu a složky tangencinálné na něm kolmé. Prvé označíme indexem n, druhé t. Vznikne následující schema, snadno srozumitelné dle obr. 4.

Před rázem

$$u_1 \qquad u_{1n} = u_1 \cos \alpha_1 \qquad u_{1t} = u_1 \sin \alpha_1$$
$$u_2 \qquad u_{2n} = u_2 \cos \alpha_2 \qquad u_{2t} = u_2 \sin \alpha_2$$

po rázu

$$v_1 \qquad u_{1n} = v_1 \cos \beta_1 \qquad v_{1t} = v_1 \sin \beta_1$$
$$v_2 \qquad v_{2n} = v_2 \cos \beta_2 \qquad v_{2t} = v_2 \cos \beta_2.$$

Chceme předpokládati, že koule jsou *absolutně hladké*, že nenastává tření. Pak se složky tangenciální rázem nezmění, to jest

$$v_{1t} = u_{1t} = u_1 \sin \alpha_1 \qquad v_{2t} = u_{2t} = u_2 \sin \alpha_2.$$

Pro složky normálné platí při nedokonalé pružnosti koulí dříve odvozený vztah (10),

$$v_{1n} = \frac{m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} - k m_2 (u_{1n} - u_{2n})}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2n} = \frac{m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} + k m_1 (u_{1n} - u_{2n})}{m_1 + m_2}.$$

Tím jest problém řešen, neboť ze známých dat u_1, u_2, α_1, α_2 dostáváme rychlosti po rázu co do velikosti jakožto

$$v_1 = \sqrt{v_{1n}^2 + v_{2t}^2} \qquad v_2 = \sqrt{v_{2n}^2 + v_{2t}^2}$$

a jejich směry ze vztahů z obrazce patrných

$$\operatorname{cotg} \beta_1 = \frac{v_{1n}}{v_{1t}} \qquad \operatorname{cotg} \beta_2 = \frac{v_{2n}}{v_{2t}}.$$

Nebudeme zde diskutovat případy zvláštní mimo jediný ráz koulí stejně velikých ($m_1 = m_2 = m$), z nichž jedna jest v klidu ($u_2 = u_{2n} = u_{2t} = 0$).

Dosazením těchto zvláštních hodnot do obecných vzorců plyne

$$\operatorname{cotg} \beta_1 = \tfrac{1}{2}(1 - k) \operatorname{cotg} \alpha_1, \qquad \operatorname{cotg} \beta_2 = \infty, \qquad \beta_2 = 0.$$

Koule, která byla v klidu, počne se pohybovati směrem spojnice středů koulí, což jsme mohli předem říci, ježto jediné síly, které na ni působily (pokud jest ovšem dokonale hladkou!), mají tento směr. Tato část výsledku jest nezávisla na vzájemném poměru velikostí obou koulí.

Ježto $k < 1$, bude za $m_1 = m_2$ úhel β_1 ostrým. Jsou-li koule dokonale pružné ($k = 1$), jest $\operatorname{cotg} \beta_1 = 0$ t. j. $\beta_1 = 90^0$, čili koule prvá pohybuje se po rázu kolmo k spojnici středů $O_1 O_2$ čili tak, jako by se byla odrazila na dokonale hladké a dokonale nepružné stěně. Její rychlost po odrazu je menší než

$$u_1 = \sqrt{u_{1n}^2 + u_{1t}^2}$$

obnášejíc

$$v_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - k)\, u_{1n}^2 + u_{1t}^2}.$$

Dosavade uvedenými příklady podali jsme s dostatek vzorů pro řešení úloh jednoduchých úloh o rázu, které čtenář najde ve fysikálních úlohách v tomto čísle časopisu uveřejněných.

Decimalisace míry časové a obloukové.

Napsal Dr. Karel Holub.

Návrh, by též při měření času a úhlu zavedena byla soustava decimální na místě soustavy sexagesimální a tím zjednána konformita s mírou délkovou, není nikterak nový, jak by se snad zdáti mohlo, nýbrž má již dosti slušnou historii za sebou. Byl to vlastně již roku 1585 Šimon Stevin, tvůrce desetinných zlomků, který myšlenku tu pronesl, neboť ve spise svém „Practique d'arithmétique" přimlouvá se o desetinné rozdělení všech měr, „aby veškeré počty celými čísly prováděti se mohly". Návrh jeho, pokud míry délkové a vah se týče, o dvě stě let později skutečně počal se uskutečňovati a dnes již skoro ve všech civilisovaných státech metrické míry a váhy jsou uzákoněny. Ne tak má se tomu s rozdělením času a oblouku. Zde soustava sexagesimální, jež asi před čtyřmi tisíci lety v Babylonii původ svůj vzala, stále jest v plné platnosti a soustava dekadická přes to, že uznávají se její výhody proti oné soustavě, má téměř právě tolik odpůrců jako přívrženců a my přes to, že pro soustavu desetinnou se přimlouváme, doznati musíme, že ty důvody, které proti ní se uvádějí, nikterak nelze podceňovati. Pokud se týče desetinného rozdělení času, tu poukazuje se především na to, že jeho zavedení těžce by se dotklo denních našich zvyklostí a že by lid jen velmi nerad upouštěl od rozdělení dne na 24 hodin, které po tisíciletí trvá. Leč i četná řada astronomů na slovo vzatých nerada by viděla změnu v měření času a oblouku. Astronomové totiž po četnou řadu desetiletí nashromáždili bohatý materiál pozorovací a materiál ten má pro četné dosud neroz-