Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 2-3, 200--204

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108949

takže pro úplné průměrné risiko najdeme konečný vzorec

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\sum_1^n {}_i M_i^2}, \tag{26}$$

jenž udává souvislost mezi úplným risikem průměrným a částečnými risiky středními.

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

(Dokončení.)

Nyní hledejme hodnotu λ' dvojpoměru

$$(UV\,{}^0A_1{}^0B_1) = (UV\,{}^0A'_1{}^0B'_1) = \lambda'$$

a máme dokázati

$$\lambda = -\lambda'.$$

Ježto tedy ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$ jsou samodružnými body involuce stanovené dvojinami U, V a A_1, A'_1, budeme body tyto hledati též jako společnou dvojinu involuce o samodružných bodech U, V a involuce o samodružných bodech A_1, A'_1. Ježto souřadnice bodů A_1, A'_1 jsou:

$$a_1 = \alpha + \sqrt{(u - \alpha)(v - \alpha)}, \qquad a'_1 = \alpha - \sqrt{(u - \alpha)(v - \alpha)},$$

lze rovnici involuce o těchto bodech jakožto samodružných psáti následovně:

$$xy - \alpha(x + y) + \alpha^2 - (u - \alpha)(v - \alpha) = 0.$$

Vypočítáme-li společné kořeny x, y rovnice této a pak rovnice:

$$2xy - (x + y)(u + v) + 2uv = 0,$$

rovnice to involuce o samodružných bodech U, V, tu máme již souřadnice hledaných bodů ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$.

Ježto obě rovnice jsou symmetrickými, tu máme:

$$x_1 = y_2, \qquad x_2 = y_1.$$

Označme si pak:

$${}^0a_1 = x_1 = y_2, \qquad {}^0a'_1 = x_2 = y_1,$$

a tu po výpočtu dostaneme:

$${}^0a_1 = \frac{\alpha u + \alpha v - 2uv}{2\alpha - u - v} + i\,\frac{u - v}{2\alpha - u - v}\sqrt{(u - \alpha)(v - \alpha)},$$

$${}^0a'_1 = \frac{\alpha u + \alpha v - 2uv}{2\alpha - u - v} - i\,\frac{u - v}{2\alpha - u - v}\sqrt{(u - \alpha)(v - \alpha)}.$$

Zcela analogicky pro body ${}^0B_1$, ${}^0B'_1$ dospěli bychom ku souřadnicím:

$$ {}^0b_1 = \frac{\beta u + \beta v - 2uv}{2\beta - u - v} - i \frac{u - v}{2\beta - u - v} \sqrt{(u-\beta)(v-\beta)}, $$

$$ {}^0b'_1 = \frac{\beta u + \beta v - 2uv}{2\beta - u - v} + i \frac{u - v}{2\beta - u - v} \sqrt{(u-\beta)(v-\beta)}. $$

Utvořme si nyní dvojpoměr λ':

$$ \lambda' = \frac{u - {}^0a_1}{u - {}^0b_1} : \frac{v - {}^0a_1}{v - {}^0b_1} $$

a dosaďme za ${}^0a_1$, ${}^0b_1$ do tohoto výrazu právě vypočtené poslední hodnoty. Pak dostáváme po jednoduché úpravě pro λ' výraz:

$$ \lambda' = \frac{\sqrt{u-\alpha}\,(\sqrt{u-\alpha} + i\sqrt{v-\alpha})}{\sqrt{u-\beta}\,(\sqrt{u-\beta} - i\sqrt{v-\beta})} : \frac{\sqrt{v-\alpha}\,(\sqrt{v-\alpha} - i\sqrt{u-\alpha})}{\sqrt{v-\beta}\,(\sqrt{v-\beta} + i\sqrt{u-\beta})}. $$

Násobíme-li v posledním poměru dvou zlomků čitatele prvního zlomku zápornou imaginárnou jednotkou $-i$ a jmenovatele tohoto zlomku kladnou imag. jednotkou $+i$, tu se nám po krácení, které jest pak patrné, náš výraz značně zjednoduší a dostáváme:

$$ \lambda' = -\sqrt{\frac{u-\alpha}{u-\beta} : \frac{v-\alpha}{v-\beta}}, $$

čili, vzhledem ku dříve napsanému výrazu pro λ, dostáváme vztah:

$$ \lambda = -\lambda', $$

který nám k vůli správnosti uvedené konstrukce bylo dokázati.

Zcela analogicky jako právě jsme provedli důkaz o dvojpoměru $(UV\,{}^0A_1{}^0B_1) = -\lambda$, provedl by se též důkaz o dvojpoměru $(UV\,{}^0A'_1{}^0B'_1) = -\lambda$. Z úvah našich jest zároveň patrno, že imaginární dvojiny ${}^0A_1$, ${}^0B_1$; ${}^0A'_1$, ${}^0B'_1$ nejsou sdruženými imaginárními dvojinami.

IV.

Máme-li sestrojiti bodovou dvojinu A_n, B_n, kde n jest číslo složené tak, že

$$ n = p_1 \cdot p_2 \ldots p_n, $$

kde p_1, $p_2 \ldots p_n$ jsou vesměs prvočísla, mezi nimiž některá se mohou sobě rovnati, tu naše konstrukce uvedené v I. a II. odstavci této práce se značně zjednoduší.

Ježto totiž $\lambda^n = \lambda^{p_1 \cdot p_2 \ldots p_n} = \left(\left((\lambda^{p_1})^{p_2} \right)^{\cdots} \right)^{p_n}$,

sestrojíme si nejprve vycházejíce od dvojiny A_1, B_1 dvojinu A_{p_1}, B_{p_1} danou dvojpoměrem $\lambda_1 = \lambda^{p_1}$. Po té vycházejíce od dvojiny A_{p_1}, B_{p_1} sestrojíme si dvojinu $A_{p_1 p_2}$, $B_{p_1 p_2}$ danou dvojpoměrem $\lambda_2 = \lambda_1^{p_2}$. A tak pokračujíce dospějeme posléze ku dvojině $A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$, $B_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ čili dvojině A_n, B_n. Zjednodušení konstrukce spočívá patrně v tom, že místo, abychom při dvojpoměru λ^n analogickou konstrukci opakovali, jak dle I. odstavce vyplývá $(n - 1)$kráte neboli $(p_1 \cdot p_2 \ldots p_n - 1)$kráte, že tuto postupným sestrojováním dvojin A_{p_1}, B_{p_1}; $A_{p_1 p_2}$, $B_{p_1 p_2}$ atd. opakujeme pouze $(p_1 + p_2 + \ldots p_n - n)$kráte.

Patrno jest, že konstrukci v odstavci I. budeme užívati jen pro $n = 2$. Pro kterékoliv jiné číslo n sudé budeme patrně kombinovati vždy konstrukci odstavce I. pro $n = 2$ s lineární konstrukcí v odstavci II. Je-li n číslo liché, užijeme konstrukce odstavce II.

Máme-li sestrojiti ${}^0A_n$, ${}^0B_n$ dle podmínky:

$$(UV\, {}^0A_n {}^0B_n) = -\lambda^n,$$

tu budeme patrně kombinovati methody odst. I. a II., dle kterých sestrojíme λ^n, s methodou odst. III., čímž dostaneme $-\lambda^n$.

Stanovme si posléze souřadnice a_n, b_n; a'_n, b'_n bodů A_n, B_n; A'_n, B'_n vyjádřené souřadnicemi a_1, b_1, bodů A_1, B_1, dále souřadnicemi u, v bodů U, V a číslem n.

Ježto A_n, B_n náležejí involuci dané dvěma svými dvojinami U, V; A_1, B_1, tu bude patrně pro souřadnice a_n, b_n resp. a'_n, b'_n, které si v obou případech označíme jakožto x, y, platiti podmínka:

$$\begin{vmatrix} xy & x + y & 1 \\ uv & u + v & 1 \\ a_1 b_1 & a_1 + b_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Vzhledem pak ku dvojpoměru:

$$(UVA_nB_n) = (UVA'_nB'_n) = (UVA_1B_1)^n$$

budeme míti vztah:

$$\frac{u - x}{u - y} : \frac{v - x}{v - y} = \left(\frac{u - a_1}{u - b_1} : \frac{v - a_1}{v - b_1} \right)^n. \qquad \text{(B)}$$

Řešením rovnic (A) a (B) dle x, y dostáváme potom:

$$x_{12} = \frac{(u-a_1)^{n+1}(v-b_1)^{n-1}v-(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}u}{(u-a_1)^{n+1}(v-b_1)^{n-1}}$$

$$\frac{\pm(v-u)\sqrt{(u-a_1)^{n+1}(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}(v-b_1)^{n-1}}}{-(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}},$$

$$y_{12} = \frac{(u-b_1)^{n+1}(v-a_1)^{n-1}v-(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}u}{(u-b_1)^{n+1}(v-a_1)^{n-1}}$$

$$\frac{\pm(v-u)\sqrt{(u-b_1)^{n+1}(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}(v-a_1)^{n-1}}}{-(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}}.$$

Budeme pak míti pro hledané souřadnice:

$$a_n = x_1, \qquad b_n = y_1, \qquad a'_n = x_2, \qquad b'_n = y_2.$$

Ze vzorců našich pro x_{12}, y_{12} jest ihned patrno, že když n jest číslem lichým, že odmocniny lze odstraniti, a že to nelze když n jest číslem sudým, že tedy v tomto druhém případě konstrukce jest nutně kvadratickou, jak jsme též dříve geometricky byli ukázali.

Vyhledejme nyní souřadnice bodů ${}^0A_n$, ${}^0B_n$; ${}^0A'_n$, ${}^0B'_n$ vyjádřené obdobně jako souřadnice bodů A_n, B_n. Souřadnice ty, které si nejprve označíme též x, y, dostaneme řešením dvou rovnic kvadratických. První z těchto dvou rovnic bude dříve již napsaná rovnice (A), druhou pak rovnicí vzhledem ku dvojpoměru:

$$(UV\,{}^0A_n{}^0B_n) = (UV\,{}^0A'_n{}^0B'_n) = -(UVA_1B_1)^n$$

bude rovnice:

$$\frac{u-x}{u-y} : \frac{v-x}{v-y} = -\left(\frac{u-a_1}{u-b_1} : \frac{v-a_1}{v-b_1}\right)^n. \qquad \text{(B')}$$

Řešením rovnic (A) a (B') dle x, y vychází pak:

$$x_{12} = \frac{(u-a_1)^{n+1}(v-b_1)^{n-1}v+(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}u}{(u-a_1)^{n+1}(v-b_1)^{n-1}}$$

$$\frac{\pm i(v-u)\sqrt{(u-a_1)^{n+1}(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}(v-b_1)^{n-1}}}{+(v-a_1)^{n+1}(u-b_1)^{n-1}},$$

$$y_{12} = \frac{(u-b_1)^{n+1}(v-a_1)^{n-1}v+(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}u}{(u-b_1)^{n+1}(v-a_1)^{n-1}}$$

$$\frac{\pm i(v-u)\sqrt{(u-b_1)^{n+1}(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}(v-a_1)^{n-1}}}{+(v-b_1)^{n+1}(u-a_1)^{n-1}},$$

kde zase bude

$$ {}^0a_n = x_1, \qquad {}^0b_n = y_1, \qquad {}^0a'_n = x_2, \qquad {}^0b'_n = y_2. $$

Ze vzorců těchto vidíme, že ku reálným dvojinám A_1, B_1 příslušejí vždy imaginární dvojiny ${}^0A_n$, ${}^0B_n$; ${}^0A'_n$, ${}^0B'_n$, jak též z dřívějších našich úvah konstruktivních bylo patrno.

Příspěvek k theorii integrace diff. rovnic lin. obyčejných omezenými integrály.

Napsal Dr. Josef Štěpánek v Táboře.

I. Petzwal *), pojednávaje o rovnicích, které lze převésti na rovnici Laplaceovu a tím je řešiti omezenými integrály, uvádí též rovnici:

$$ x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1x^m)\, x\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0x^m + c_0x^{2m})\, y = 0, \quad (1) $$

která po substitucích

$$ x^m = t, \quad y = t^k z $$

přejde v Laplaceovu za podmínky:

$$ k\,(k-1)m^2 + k\,\{\, m(m-1) + ma_1 \,\} + a_0 = 0, $$

kterou jest k stanoveno.

Rovněž tak rovnice:

$$ x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2}(a_2 + b_2x^m) + x\frac{dy}{dx}(a_1 + b_1x^m + c_1x^{2m}) \\ + (a_0 + b_0x^m + c_0x^{2m} + d_0x^{3m})\, y = 0 \quad (2) $$

přejde substitucí $x^m = t$ v Laplaceovu, platí-li:

$$ (m-1)(m-2) + (m-1)\, a_2 + a_1 = 0, \quad a_0 = b_0 = 0. $$

Petzwal tedy dospívá k Laplaceově rovnici za jistých podmínek jednak pro exponent k, jednak pro koefficienty rovnice. Uvažoval jenom tyto speciální rovnice. Lze však ukázati, že i obecná rovnice:

$$ x^n \frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x^m)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdot x^{n-1} + P_2(x)^m \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdot x^{n-2} + \dots \\ + P_k(x^m)\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} \cdot x^{n-k} + \dots + P_{n-1}(x^m) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot x \quad (3) \\ + P_n(x^m)\, y = 0, $$

---

*) Petzwal: Integration der Differentialgleichungen I. Wien 1853.