Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Poznámka o Clebschově diagonální ploše

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 99--100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108937

Poznámka o Clebschově diagonální ploše.

Napsal *L. Seifert*.

Buďte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ stěny úplného pětistěnu, při čemž možno předpokládati, že identicky platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \tag{1}$$

Pak rovnice

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0 \tag{2}$$

definuje plochu třetího stupně, která je kovariantní k danému pětistěnu a byla mnohokráte předmětem různých studií.[1]) Význačnou její vlastností je, že prochází všemi deseti vrcholy uvedeného pětistěnu, jenž sluje polárním neb Sylvestrovým pětistěnem plochy. V každém z nich sbíhají se tři přímky plochy ležící v téže diagonální rovině. Takové body zoveme ovální, někde též Eckhardtovy nebo Salmonovy. Vrcholy polárního pětistěnu jsou dvojné body příslušné plochy Hesseovy. Mimo ně nemají obě plochy reálných bodů společných, ony tedy představují deset oválů čáry parabolické. Geometricky je tato okolnost snadno pochopitelná,[2]) ale poněvadž nejjednodušší způsob, jak si zjednáme představu o tvaru parabolické křivky v obecném případu, zejména kdy plocha má 27 přímek reálných, je právě deformace plochy diagonální, zdá se mi záhodno uvésti také algebraický důkaz, že obě plochy mimo vrcholy pětistěnu nemají reálného bodu společného, aspoň za předpokladu, že pětistěn je reálný.

Rovnice Hesseovy plochy jest

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 0$$

či

$$x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_1 + \ldots + x_1x_2x_3x_4 = 0. \tag{3}$$

Kdyby plochy (2) a (3) měly průsečnou křivku, která mimo nekonečně malé ovály ve vrcholech má ještě reálnou větev, pak nemůže tato býti položena v žádné stěně pětistěnu a existoval by tedy bod, jehož pět souřadnic, $x_1, x_2, \ldots, x_5$ vesměs od nuly různých byly by vzhledem k (1) a (3) kořeny rovnice

[1]) Clebsch, Mathemat. Annalen sv. 4 (1871) Ciani, Rom. Acc. Lincei Rend. ř. 4, sv. 6 (1890), sv. 7 (1891), Ascioni, Rend. Acc. Neapoli ř. 2, sv. 6 (1892), sv. 7 (1893), Klein, Mathemat. Annalen, sv. 6 a Sebrané spisy díl. II.

[2]) Srovnej též Zeuthenovy práce v Mathem. Annalen, sv. 7 a 8.

$$x^5 + Ax^3 + Bx^2 + C = 0 \tag{4}$$

s reálnými koeficienty a s $C \gtrless 0$.

Dosadíme-li postupně do (4) $x_1, x_2, \ldots, x_5$ a sečteme, vychází

$$\Sigma x_i^5 + B \,.\, \Sigma x_i^2 + 5C = 0. \tag{5}$$

Ze známých Newtonových vzorců však jest

$$\Sigma x^5 = 5A \,.\, B - 5C, \quad \Sigma x^2 = -2A;$$

tedy podle (5)

$$A \,.\, B = 0.$$

Je-li současně $A = B = 0$, jest tvrzení očividné. Je-li $A = 0$, zní rovnice (4)

$$x^5 + Bx^2 + C = 0$$

a kdyby měla reálné kořeny, měla by je i rovnice derivováním vzniklá

$$5x^4 + 2Bx = 0,$$

ona však má imaginární. Při $B = 0$ jest rovnice (4)

$$x^5 + Ax^3 + C = 0,$$

rovnice derivováním vzniklá

$$x^2(5x^2 + 3A) = 0.$$

Sledujeme-li průběh funkce

$$y = x^5 + Ax^3 = C,$$

shledáme, že stoupá nejprve z hodnot záporných, dosáhne extremních hodnot při $x = \pm\sqrt{-\frac{3}{5}A}$ a má bod obratu při $x = 0$. Má tedy jistě jeden, nejvýše však tři reálné kořeny.

*

Note au sujet de la surface diagonale de Clebsch.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne une démonstration algébrique du théorème disant que la surface diagonale (2) et sa surface hessienne (3) n'ont pas de points réels communs, sauf les sommets du pentaèdre de Sylvester qui donnent, comme il est bien connu, les dix ovales de la courbe parabolique. En effet, l'existence d'un tel point étant admise, ses coordonnées satisfont à l'équation algébrique aux coefficients réels (4), laquelle, cependant, n'a pas de racines réelles; donc, on aboutit à une contradiction.