Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

František Záviška

Translace dvou kruhových válců vazkou tekutinou

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 163--170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108928

Translace dvou kruhových válců vazkou tekutinou.

F. Záviška.

Známé Stokesovo řešení pro rozdělení rychlosti ve viskosní a nestlačitelné tekutině, která se prostírá do nekonečna a v níž se pohybuje koule stálou a velmi malou rychlostí bez otáčení, nedá se, jak již Stokes sám věděl, rozšířiti na translaci kruhového válce. Počet vedl totiž k výsledku, že vliv pohybu válce nevymizí ani v nekonečně velikých vzdálenostech od jeho osy, což je patrně nemožné. Teprve, když Oseen[1]) nalezl přesnější řešení Stokesova problému, ukázal Lamb[2]), že lze stejnou metodou řešiti i problém válce.

V dalším je Lambovo řešení rozšířeno na translaci dvou kruhových válců, které mají rovnoběžné osy a pohybují se konstantní rychlostí U ve směru k osám kolmém. Poloměr válců označíme a, vzdálenost jejich os, která se během pohybu nemění, budiž b; budeme předpokládati s Lambem, že Reynoldsovo číslo tohoto pohybu, t. j. $\varrho Ua/2\mu$, kdež ϱ značí specifickou hmotu a μ koeficient vnitřního tření kapaliny, je velmi malé, mimo to nechť je i a malé proti b. Ze dvou základních případů, kdy totiž rovina os válců je buď rovnoběžná se směrem jejich pohybu, nebo je k němu kolmá, je tu řešen jen případ první, druhý případ dá se řešiti docela stejně.

Udělíme-li celému systému (kapalině i válcům) rychlost U opačného směru, než je směr, v němž se válce pohybují, jsou válce v klidu a kapalina proudí kolem nich tak, že v nekonečnu má rychlost U. Zvolíme si nyní rovinu kolmou k osám válců za souřadnou rovinu OXY; osa OX nechť prochází osami obou válců a má stejný směr jako rychlost kapaliny v nekonečnu (viz obr.). Je-li děj stacionární, nezávisí nic na z ani na t a jde o řešení rovnic

$$\begin{aligned} \varrho U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta u, \\ \varrho U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\,\Delta v, \end{aligned} \tag{1}$$

k nimž ještě přistupuje rovnice kontinuity

[1]) Viz na př. C. W. Oseen: Neuere Methoden u. Ergebnisse in der Hydrodynamik. Lipsko, 1927.

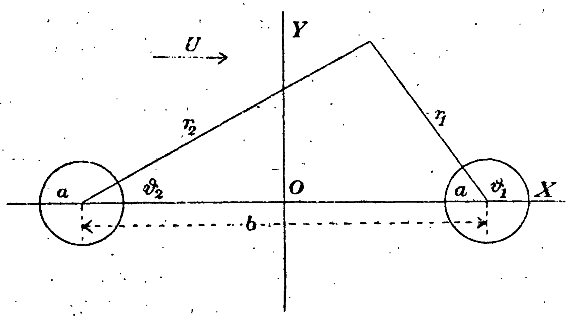
[2]) H. Lamb, Phil. Mg. (6), 21, 112, 1911.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad (1')$$

Zde je p tlak v kapalině; složky její rychlosti jsou $u + U$ a v. Na povrchu válců je kapalina v klidu vůči nim, tam je tedy $u = -U$ a $v = 0$, v nekonečnu musí býti u i v rovno nule.

Jak Lamb ukázal, vyhoví se rovnicím (1) a (1′), je-li

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2k}\frac{\partial \chi}{\partial y} \end{aligned} \qquad (2$$



a

$$p = \varrho U \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad (2')$$

při čemž funkce φ a χ musí splňovati rovnice

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\chi + 2k\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

Při tom je

$$k = \frac{\varrho U}{2\mu}.$$

Zavedeme-li místo pravoúhlých souřadnic souřadnice polární r a ϑ, má řešení rovnice pro φ tvar

$$\varphi = A_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta);$$

zároveň je splněna podmínka, že derivace φ podle x a y, které se vyskytují v rovnicích (2) pro u a v, konvergují k nule, když r roste do nekonečna. Za χ klademe

$$\chi = e^{kx} f(r, \vartheta);$$

funkce f splňuje pak rovnici

$$\Delta f - k^2 f = 0,$$

která v souřadnicích r a ϑ zní

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} - k^2 f = 0.$$

Její řešení jsou

$$B_n(ikr)\cos n\vartheta, \qquad B_n(ikr)\sin n\vartheta,$$

kdež B_n značí obecnou Besselovu funkci imaginárního argumentu ikr, n-tého řádu. Ta musí býti reálná, mimo to musí konvergovati k nule, stává-li se r nekonečně velikým. Jediná Besselova funkce, která vyhovuje oběma těmto podmínkám, je

$$i^{n+1} H_n^{(1)}(ikr);$$

$H_n^{(1)}$ je t. zv. první Hankelova funkce n-tého řádu.[3]) Je zvykem klásti

$$i^{n+1}\frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(ikr) = K_n(kr);$$

obecné řešení rovnice pro χ má pak tvar

$$\chi = e^{kx}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n\cos n\vartheta + D_n\sin n\vartheta)\, K_n(kr).$$

V našem případě, kdy jde o dva válce, položíme

$$\begin{aligned}\varphi = A_{10}\log r_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_1^n}(A_{1n}\cos n\vartheta_1 + B_{1n}\sin n\vartheta_1) + \\ + A_{20}\log r_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_2^n}(A_{2n}\cos n\vartheta_2 + B_{2n}\sin n\vartheta_2),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\chi = e^{kx}\sum_{n=0}^{\infty}(C_{1n}\cos n\vartheta_1 + D_{1n}\sin n\vartheta_1)K_n(kr_1) + \\ + e^{kx}\sum_{n=0}^{\infty}(C_{2n}\cos n\vartheta_2 + D_{2n}\sin n\vartheta_2)K_n(kr_2);\end{aligned} \tag{4}$$

význam veličin r_1, r_2, ϑ_1 a ϑ_2 je patrný z připojeného obrázce. Pohyb kapaliny je symetrický vzhledem k rovině OX-Y; v bodech, které jsou k ní souměrné, má tedy složka u hodnoty stejné, kdežto hodnoty složky v liší se jen znamením. Z rovnic (2) plyne, že funkce

[3]) Viz na př. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, str. 94.

φ a χ musí býti symetrické vzhledem k ose OX, t. j. nesmí se změniti dosadíme-li $-\vartheta_1$ a $-\vartheta_2$ za ϑ_1 a ϑ_2. Ve výrazech (3) a (4) jsou koeficienty u $\sin n\vartheta_1$ a $\sin n\vartheta_2$ rovny nule, takže vznikne

$$\varphi = A_{10}\log r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n}\frac{\cos n\vartheta_1}{r_1^n} +$$

$$+ A_{20}\log r_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\frac{\cos n\vartheta_2}{r_2^n},$$

a

$$\chi = e^{kx}\sum_{n=0}^{\infty}\{C_{1n}K_n(kr_1)\cos n\vartheta_1 + C_{2n}K_n(kr_2)\cos n\vartheta_2\}.$$

Podmínky v nekonečnu jsou tím již splněny a zbývají podmínky na povrchu válců; z nich plynou hodnoty koeficientů A a C. K tomu je třeba rozvinouti výrazy pro φ a χ ve Fourierovy řady postupující jednou po násobcích úhlu ϑ_1, podruhé po násobcích úhlu ϑ_2. To se provede takto. Je

$$r_2^2 = r_1^2 + b^2 + 2r_1 b\cos\vartheta_1 =$$
$$= (b + r_1 e^{i\vartheta_1})(b + r_1 e^{-i\vartheta_1}).$$

V okolí prvního válce je r_1 malé proti b; můžeme tedy psáti

$$\log r_2 = \log b + \tfrac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r_1}{b}e^{i\vartheta_1}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r_1}{b}e^{-i\vartheta_1}\right)$$

a oba poslední výrazy na pravé straně rozvinouti v mocninnou řadu. Vznikne tak

$$\log r_2 = \log b + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r_1^n}{nb^n}\cos n\vartheta_1.$$

Dále je

$$r_2 e^{i\vartheta_2} = r_1 e^{i\vartheta_1} + b$$

a

$$\frac{e^{i\vartheta_2}}{r_2} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{r_1}{b}e^{-i\vartheta_1}\right)^{-1};$$

když tuto rovnici povýšíme na n-tou a porovnáme reálné části na obou stranách, dostaneme

$$\frac{\cos n\vartheta_2}{r_2^n} = \frac{1}{b^n}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-n}{m}\frac{r_1^m}{b^m}\cos m\vartheta_1.$$

Fourierův rozvoj pro $K_n(kr_2) \cos n\vartheta_2$ plyne ze vzorce, který poprvé odvodil Graf,[4]) a analogickým postupem bychom dostali Fourierovy řady i pro úhel ϑ_2. Ovšem další počet je dosti složitý a proto jej provedeme jen s tou přesností, s jakou řešil Lamb translaci jediného válce. Položíme

$$\varphi = A_{10} \log r_1 + A_{20} \log r_2 + A_{11} \frac{\cos \vartheta_1}{r_1} + A_{21} \frac{\cos \vartheta_2}{r_2};$$

v okolí prvního válce je pak přibližně

$$\varphi = A_{20} \log b + A_{10} \log r_1 + \left(\frac{A_{11}}{r_1} + A_{20} \frac{r_1}{b}\right) \cos \vartheta_1 + \frac{A_{12}}{r_1^2} \cos 2\vartheta_1$$

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{A_{20}}{b} + A_{10} \frac{\cos \vartheta_1}{r_1} - A_{11} \frac{\cos 2\vartheta_1}{r_1^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= A_{10} \frac{\sin \vartheta_1}{r_1} - A_{11} \frac{\sin 2\vartheta_1}{r_1^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dále klademe

$$\chi = e^{kx} \{C_{10} K_0(kr_1) + C_{20} K_0(kr_2)\}. \tag{6}$$

Ze vzorce, který odvodil Neumann[5]), plyne, je-li $r_1 < b$,

$$K_0(kr_2) = K_0(kb)\, I_0(kr_1) + 2 \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n K_n(kb)\, I_n(kr_1) \cos n\vartheta_1,$$

kdež

$$I_n(kr_1) = i^{-n} J_n(ikr_1)$$

a J_n je první Besselova funkce n-tého řádu. Pro malé hodnoty součinu kr_1 lze psáti

$$I_0(kr_1) = 1 \qquad I_1(kr_1) = \tfrac{1}{2} kr_1;$$

funkce I_n vyššího řádu možno zanedbati. Je pak

$$K_0(kr_2) = K_0(kb) - K_1(kb)\, kr_1 \cos \vartheta_1.$$

Mimo to je pro malá kr_1 přibližně

$$K_0(kr_1) = \log \frac{2}{\gamma kr_1},$$

kdež $\log \gamma = 0{\cdot}57722$ je t. zv. Eulerova konstanta. Konečně je

$$e^{kx} = e^{k(\frac{1}{2}b + r_1 \cos \vartheta_1)} = e^{\frac{1}{2}kb}(1 + kr_1 \cos \vartheta_1),$$

takže celkem máme

---

[4]) J. H. Graf: Math. Ann. *43*, 136. 1893, srv. též F. Záviška, Ann. d. Phys. *40*, 1023, 1913.

[5]) Viz na př. N. Nielsen, Handbuch der Cylinderfunktionen, str. 280, vzorec 4.

$$\chi = e^{\frac{1}{2}kb}(1 + kr_1 \cos \vartheta_1)\left\{C_{10} \log \frac{2}{\gamma\, kr_1} + C_{20} K_0(kb) - C_{20} K_1(kb) kr_1 \cos \vartheta_1\right\}.$$

Odtud plyne, provedeme-li počet se stejnou přesností jako dosud,

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi = -\frac{1}{2k} e^{\frac{1}{2}kb}\left\{C_{10}\, k\left(\tfrac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma k r_1}\right) + \right.$$

$$\left. + C_{20}\, k\,(K_0(kb) + K_1(kb)) + \frac{C_{10}}{r_1}\cos \vartheta_1 + \tfrac{1}{2} C_{10} \cos 2\vartheta_1\right\},$$

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{1}{2k} e^{\frac{1}{2}kb}\, C_{10}\left(\frac{1}{r_1}\sin \vartheta_1 + \tfrac{1}{2}k \sin 2\,\vartheta_1\right). \tag{7}$$

Dosadíme nyní (5) a (7) do (2); pro $r_1 = a$ má býti $u = -U$ a $v = 0$. To vede k rovnicím

$$\frac{A_{20}}{b} + \frac{C_{10}}{2} e^{\frac{1}{2}kb}\left(\tfrac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma k a}\right) + \frac{C_{20}}{2} e^{\frac{1}{2}kb}(K_0(kb) + K_1(kb)) = U,$$

$$A_{10} = -\frac{1}{2k} C_{10}\, e^{\frac{1}{2}kb},$$

$$A_{11} = \frac{a^2}{2k} C_{10}\, e^{\frac{1}{2}kb}. \tag{8}$$

Počet pro druhý válec je podobný. Výrazy pro $\partial\varphi/\partial x$ a $\partial\varphi/\partial y$ platné v jeho okolí dostaneme z rovnic (5), když v nich indexy 1 a 2 zaměníme. Dále je

$$K_0(kr_1) = K_0(kb)\, I_0(kr_2) + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(kb)\, I_n(kr_2) \cos n\vartheta_2$$

a s touž přesností jako dříve

$$K_0(kr_1) = K_0(kb) + K_1(kb)\, kr_2 \cos \vartheta_2,$$

konečně

$$e^{kx} = e^{\frac{1}{2}kb}(1 + kr_2 \cos \vartheta_2).$$

Tak dospějeme k dalším rovnicím

$$\frac{A_{10}}{b} + \frac{C_{20}}{2} e^{-\frac{1}{2}kb}\left(\tfrac{1}{2} + \log \frac{2}{\gamma k a}\right) + \frac{C_{10}}{2} e^{-\frac{1}{2}kb}(K_0(kb) - K_1(kb)) = U,$$

$$A_{20} = -\frac{1}{2k} C_{20}\, e^{-\frac{1}{2}kb},$$

$$A_{21} = \frac{a^2}{2k} C_{20}\, e^{-\frac{1}{2}kb}. \tag{9}$$

Z rovnic (8) a (9) lze vypočísti konstanty A_{10}, A_{20}, A_{11}, A_{21}, C_{10} a C_{20}. Plyne z nich

$$A_{10}\left(\tfrac{1}{2}+\log\frac{2}{\gamma ka}\right)+A_{20}\left\{e^{kb}(K_0+K_1)-\frac{1}{kb}\right\}=-\frac{U}{k},$$

$$A_{10}\left\{(K_0-K_1)e^{-kb}-\frac{1}{kb}\right\}+A_{20}\left(\tfrac{1}{2}+\log\frac{2}{\gamma ka}\right)=-\frac{U}{k};$$

při tom psáno pro jednoduchost K_0 a K_1 místo $K_0(kb)$ a $K_1(kb)$. Je-li kb veliké proti 1, lze psáti

$$K_0(kb)=K_1(kb)=\sqrt{\frac{2}{\pi kb}}\,e^{-kb};$$

je pak jednodušeji

$$A_{10}\left(\tfrac{1}{2}+\log\frac{2}{\gamma ka}\right)+A_{20}\left(2\sqrt{\frac{2}{\pi kb}}-\frac{1}{kb}\right)=-\frac{U}{k},$$

$$A_{10}\frac{1}{kb}+A_{20}\left(\tfrac{1}{2}+\log\frac{2}{\gamma ka}\right)=-\frac{U}{k}.$$

Odtud se vypočte

$$A_{10}=-\frac{U}{kM}\left\{1-\frac{1}{kbM}\left(2\sqrt{\frac{2kb}{\pi}}-1\right)\right\},$$

$$A_{20}=-\frac{U}{kM}\left(1-\frac{1}{kbM}\right),$$

kdež

$$M=\tfrac{1}{2}+\log\frac{2}{\gamma ka}.$$

Z rovnic (8) a (9) plynou pak ihned hodnoty ostatních konstant.

Vypočteme ještě síly, kterými působí kapalina na délkovou jednotku každého válce, měřenou podél osy. Ty dostaneme integrací výrazu

$$\left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)x+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)y$$

aneb

$$-px+\mu r\frac{\partial u}{\partial r}+\mu\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

podle ϑ v mezích od 0 do 2π. Pro první válec nalezneme

$$P_1=-2\pi\varrho\,U A_{10} \tag{10}$$

anebo

$$P_1=P_0\left\{1-\frac{1}{kbM}\left(2\sqrt{\frac{2kb}{\pi}}-1\right)\right\}, \tag{10'}$$

kdež

$$P_0=\frac{4\pi\mu U}{\tfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{\gamma ka}} \tag{10''}$$

je tlak kapaliny v případě, že je v ní jediný válec. Na délkovou jednotku druhého válce působí kapalina silou

$$P_2 = P_0\left(1 - \frac{1}{kbM}\right).$$

Je tedy tlak kapaliny u každého válce menší než, kdyby byl válec v kapalině sám, mimo to je u druhého válce, který je v předu, větší než u válce prvního, který je vzadu. To souhlasí s obvyklou zkušeností.

*

Sur la translation de deux cylindres de révolution dans un liquide visqueux.

(Extrait de l'article précédent).

L'auteur étend la solution, donnée par Lamb (Phil. Mag. *21*, 120, 1911) pour le déplacement d'un cylindre de révolution dans un liquide visqueux, incompressible, au cas de deux cylindres de révolution, au même rayon a et ayant les axes parallèles, lesquels se déplacent dans un liquide visqueux, incompressible avec une vitesse constante U dans la direction perpendiculaire aux axes. A vrai dire, l'auteur traite le cas, équivalent au point de vue mécanique, de cylindres fixes, le liquide circulant autour des cylindres de sorte qu'il possède, à l'infini, la vitesse U de sens contraire. Il s'agit d'intégrer les équations (1) et (1'), où ϱ désigne la densité du liquide, μ le coefficient de viscosité, p la pression et $k = \varrho U/2\mu$. Les composantes de la vitesse du liquide parallèles aux axes de coordonnées (v. la fig.) sont $u + U$ et v. Sur les cylindres, on doit avoir $u = -U$ et $v = 0$, à l'infini $u = 0$ et $v = 0$. La solution est donnée par les équations (2) et (2'); les fonctions φ et λ qui s'y présentent sont exprimées par les séries (3) et (4). Les coefficients de ces séries sont déterminés par les conditions aux limites et à l'infini; si l'on fait les calculs avec le même degré de précision que Lamb, ces coefficients sont donnés par les équations (8) et (9). Les équations (10) et (10') donnent les pressions du liquide sur des portions des cylindres, ayant, le long des axes, la longueur égale à l'unité; la grandeur P_0 qui y intervient, est la pression dans le cas où il n'y a qu'un seul cylindre. La pression agissant sur chaque cylindre est moindre que s'il n'y en avait qu'un seul; la pression agissant sur le cylindre 2 (v. la fig.), qui se trouve en avant, est plus petite que celle que subit le cylindre 1, se trouvant derrière celui-là.