Antonín Zelenka

Průměrná premiová reserva sociálního pojištění

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 171--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108918

Průměrná premiová reserva sociálního pojištění.

Dr. *Ant. Zelenka.*

V sociálním pojištění důležitou úlohou je stanovení premiových reserv. Pokusíme se v tomto článku naznačiti jeden z možných způsobů určení premiové reservy průměrné, která nezávisí na věku pojištěnce a závisí jedině na příspěvkové době.

Kdežto průměrná premie (t. j. nezávislá na stáří) je brána v sociálním pojištění jako věc samozřejmá, jsou premiové reservy stále počítány individuelně, t. j. s respektováním věku pojištěnce. A přece jsou i tady vážné důvody pro to, abychom dali přednost premiové reservě průměrné. Především jest po stránce matematické důležitá okolnost, že při všech výpočtech týkajících se sociálního pojištění — a tudíž i premiových reserv — důsledně nepřihlížíme k individuelním znakům pojištěnce, kdy na př. k tomu, je-li ženat či svobodný, má-li děti a kolik, jakého je zaměstnání, atd. Druhý důvod je, že premiové reservy individuelní bývají počítány s premiemi individuelními, ač pojištěnec platí premii průměrnou. Metody, které respektují tento fakt, vedou buď k nedosti přijatelným výsledkům, anebo nesou znaky určité libovůle (Schärtlin, Küttner). Třetí důvod jest, že za dnešního stavu sociálního zákonodárství ukládá se sociálně pojišťovacím ústavům povinnost prováděti velké množství výpočtů premiových reserv, takže je nutno využíti všech možností ku zjednodušení této stránky administrativy. A právě zavedení průměrné premiové reservy bylo by ještě značným ulehčením proti dnešnímu stavu.

Předpokládejme pojištění, které při počátku své působnosti postihuje $M(x)$ x-letých pojištěnců, při čemž x je v mezích x_0 až ω, a které zaručuje svým pojištěncům invalidní důchod ve výši „1" ročně; premie platí se po celou dobu aktivity. Průměrná premie p tohoto pojištění je dána relací

$$p \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, a_x^{aa} = \sum_{x=x_0}^{\omega} M(x)\, a_x^{ai}. \tag{1}$$

Průměrnou premiovou reservu po příspěvkové době n označme V_n. Z původního počtu $M(x)$ x-letých pojištěnců je po n-letech ještě $M(x, n)$ aktivních. Prospektivní metodou stanovíme snadno premiovou reservu $\sum_{x_0}^{\omega} V_n M(x, n)$ celého souhrnu jako rozdíl budoucích závazků pojišťovny $\sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{ai}$ a budoucích příjmů $p \sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{aa}$.

$$V_n \sum_{x_0}^{x} M(x, n) = \sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{ai} - p \sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{aa}. \quad (2)$$

Tím hledaná reserva V_n určena. Stejně mohli bychom ji vypočísti retrospektivně, t. j. jako rozdíl mezi předpokládanými dosavadními příjmy a vydáními pojišťovny

$$V_n \sum_{x_0}^{x} M(x, n) = r^n \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{aa}\, p - r^n \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{ai}. \quad (3)$$

Přirozeně hodnoty V_n určené ze vztahů (2) i (3) musí býti stejné, jak ostatně snadno zjistíme z relace (1); dosaďme do ní

$$a_x^{aa} = {}_{|n}a_x^{aa} + v^n\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{aa}, \qquad a_x^{ai} = {}_{n}a_x^{ai} + v^n\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{ai}, \quad \text{(a)}$$

kde $v^n = \frac{1}{r^n}$ je diskontující faktor, $p_{x,n}^{aa}$ je pak pravděpodobnost, že x-letá aktivní osoba je po n-letech ještě aktivní. Pak rovnice (1) jest

$$p \sum_{x_0}^{x} M(x)\, ({}_{|n}a_x^{aa} + v^n\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{aa}) = \sum_{x_0}^{x} M(x)\, ({}_{|n}a_x^{ai} + v^n\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{ai}),$$

odtud dále

$$p \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{aa} - \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{ai} =$$
$$= \left[\sum_{x_0}^{x} M(x)\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{ai} - p \sum_{x_0}^{x} M(x)\, p_{x,n}^{aa}\, a_{x+n}^{aa} \right] v^n.$$

Ale $M(x) \cdot p_{x,n}^{aa} = M(x, n)$. Násobme dále tuto rovnici výrazem r^n:

$$r^n p \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{aa} - r^n \sum_{x_0}^{x} M(x)\, {}_{|n}a_x^{ai} =$$
$$= \sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{ai} - p \sum_{x_0}^{x} M(x, n)\, a_{x+n}^{aa}.$$

Ale to jsou pravé strany rovnice (2) resp. (3), čímž naše tvrzení dokázáno.

Zbývá nyní ještě při výpočtu průměrné premiové reservy respektovati také tu okolnost, že kolektiv pojištěnců není uzavřený, ale že do něho stále vstupují noví pojištěnci. Nechť v době t

od počátku platnosti zákona, který pojištění nařizuje, vstoupí do pojištění $N(x, t)$ osob. Tito pojištěnci zahrnují se pod pojmem „budoucí generace“ proti „generaci nynější“, která je dána dříve uvedeným souborem čísel $M(x)$. Pro počítání s touto budoucí generací je nezbytno učiniti určité předpoklady o ní. Předpokládáme-li, že přístupy jsou rovnoměrně rozloženy během roku, můžeme toto postupné přistupování nahraditi jedním hromadným vstupem v půli roku. Předpokládejme pak dále, že počet těchto přístupů tvoří geometrickou řadu o kvocientu c. Tedy $N(x, t) = c^t N(x)$.

Průměrná premie dána je relací

$$p\left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x)\, a_x^{aa} + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x)\, a_x^{aa}\right] = \sum_{x_0}^{\omega} M(x)\, a_x^{ai} + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x)\, a_x^{ai}, \tag{4}$$

kde $k = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\frac{1}{2}}\, c^{k+\frac{1}{2}}$.

Průměrnou premiovou reservu, stálou po celou dobu trvání zákona, t. j. pro všechny generace, které kdy do pojištění vstoupí, označme V_n po uplynutí příspěvkové doby n. Určíme ji takto: z původního počtu $M(x)$ pojištěnců je po n-letech aktivních ještě $M(x, n)$, z $N(x, t)$ jest jich aktivních $N(x, t, n)$.

Počítejme hodnotu všech těchto reserv V_n k časovému okamžiku po uplynutí n-let od počátku působnosti zákona. Premiové reservy generace nynější mají celkovou hodnotu $\sum_{x_0}^{\omega} M(x,n) V_n$, kdežto u generace, která vstoupila v době t od působnosti zákona, mají hodnotu $\sum_{x_0}^{\omega} N(x, t, n)\, V_n v^t$. Celková hodnota jest tedy

$$V_n \sum_{x_0}^{\omega} M(x, n) + V_n \sum_{t=\frac{1}{2}}^{\infty} v^t \sum_{x_0}^{\infty} N(x, t, n) = V_n\left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x, n) + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x, n)\right].$$

Hodnotu tuto snadno určíme, a to buď prospektivně

$$V_n\left[\sum_{x}^{\omega} M(x, n) + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x, n)\right] = \sum_{x_0}^{\omega} M(x, n)\, a_{x,n}^{ai} + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x, n)\, a_{xn}^{ai} - p\left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x, n)\, a_{x,n}^{aa} + k \sum_{x_0}^{\omega} N(x, n)\, a_{x+n}^{aa}\right],$$

nebo respektivně

$$V_n\left[\sum_{x_0}^{x} M(x,n) + k\sum_{x_0}^{x} N(x,n)\right] =$$

$$= r^n\left\{\left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x)\ {}_{|n}a_x^{aa} + k\sum_{x_0}^{\omega} N(x)\ {}_{|n}a_x^{aa}\right] p = \right.$$

$$\left. = \left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x)\ {}_{|n}a_x^{ai} + k\sum_{x_0}^{\omega} N(x)\ {}_{|n}a_x^{ai}\right]\right\}.$$

Opět jest snadno dokázati, že obě hodnoty jsou stejné, uvážíme-li, že $M(x,n) = M(x)\,p_{x,n}^{aa}$, $N(x,n) = N(x)\,p_{x,n}^{aa}$ a dosadíme-li do relace (4) za a_x^{aa} a a_x^{ai} hodnoty z rovnic (a).

Pro skutečné početní stanovení neskýtá tato metoda žádných obtíží a je velmi jednoduchá a přehledná. I po této stránce jeví se její výhoda proti premiovým reservám individuelním.

Jest samozřejmé, že odvozené výsledky platí pro všechny možné druhy nároků, tedy i starobní, vdovský, sirotčí atd., takže je možno je použíti při všech úlohách týkajících se sociálního pojištění.

*

La réserve moyenne des primes de l'assurance sociale.

(Extrait de l'article précédent.)

La réserve moyenne des primes V_n, indépendante de l'âge de l'assuré, relative à l'assurance d'invalidité d'une rente annuelle égale à l'unité, la prime, étant payée pendant l'activité, peut être exprimée par la formule

$$V_n\left[\sum_{x_0}^{\omega} M(x,n) + k\sum_{x_0}^{x} N(x,n)\right] -$$

$$-\sum_{x_0}^{x} M(x,n)\ a_{x+n}^{ai} + k\sum_{x_0}^{x} N(x,n)\ a_{x+n}^{ai} -$$

$$-\,p\left[\sum_{x_0}^{x} M(x,n)\ a_{x+n}^{aa} + k\sum_{x_0}^{x} N(x,n)\ a_{x+n}^{aa}\right].$$

Ici, $M(x)$ désigne le nombre des assurés de l'âge x de la génération présente; $N(x)$ désigne le nombre des assurés de l'âge x entrant dans le système d'assurance au cours de l'année qui suit le début du fonctionnement de la loi. $M(x,n) = M(x)\,p_{x,n}^{aa}$, $N(x,n) = N(x)\,p_{x,n}^{aa}$, où $p_{x,n}^{aa}$ est la probabilité que l'assuré actif de l'âge x sera encore actif au bout de n ans. Si l'on suppose que le nombre d'entrées dans le système parcourt les termes d'une série géométrique au quotient c et que les entrées sont reparties regulièrement sur toute l'année, on a $k = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+\frac{1}{2}}\,c^{k+\frac{1}{2}}$.