Bedřich Procházka

Příspěvek ke křivosti ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 83--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108913

Příspěvek ke křivosti ploch druhého stupně.

Napsal prof. Dr. *Bedřich Procházka.*

1. Theorém Meusnierův.

Nechť jsou dány tři sdružené průměry P, Q, R plochy 2. stupně **P** o středu o a bod a budiž jedním z mezných bodů průměru P. Jest zřejmo, že roviny α, β diametrálných kuželoseček A, B určených průměry P, Q resp. P, R jsou *rovinami sdruženými*

Tečny T', T'', v bodě a ke kuželosečkám A, B sestrojené a svírající úhel ψ, stanoví tečnou rovinu plochy **P**, rovnoběžnou s rovinou diametrálnou ω obsahující průměry Q a R. Normála N, v bodě a této plochy sestrojená, protíná rovinu ω v bodě n. Rovina táž protíná rovinu α kuželosečky A ve přímce $\overline{og}$ rovnoběžné s tečnou $T' \equiv \overline{ab}$ a rovinu β ve přímce $\overline{oh}$ s tečnou $T'' \equiv \overline{at}$.

Normála $\overline{ag}$ kuželosečky A, v bodě a sestrojená, svírá s průměrem P úhel λ' a s normálou $N \equiv \overline{an}$ plochy **P** úhel $\varkappa'$. Též normála $\overline{ah}$ křivky B, v témže bodě a sestrojená, svírá s průměrem P úhel λ'' a s normálou N úhel $\varkappa''$.

Předpokládejme, že kuželosečka B se beze změny pošinula ve směru tečny $\overline{ab} \equiv T'$ křivky A do polohy soumezné ${}^sB$, tvořící s kuželosečkou B prvek plochy **P**. V této poloze soumezné protíná rovina kuželosečky ${}^sB$ tečnu $T' \equiv ab$ v bodě b a křivku A v bodě c. Je zřejmo, že poloměrem křivosti kuželosečky A v bodě a jest poloměr kružnice, s kterou spadá kružnice K dotýkající se křivky té v bodě a a protínající ji v bodě c, když tento bod se nekonečně přibliží bodu a.

Promítněme dále bod c na normálu $\overline{ag}$ kuželosečky A do bodu r a na tečnu $T' \equiv \overline{ab}$ do bodu i. Nekonečně malou úsečku 1. stupně $\overline{ab}$ označme písmenem v', nekonečně malou úsečku 2. stupně $\overline{bc}$ písmenem τ' a poloměr kružnice uvažované ϱ'.

Potom bude, položíme-li za úsečku $\overline{ar}$ rovnou úsečku $\overline{ic}$,

$$\overline{rc}^2 = (\overline{ab} + \overline{bi})^2 = \overline{ar}\,(2\varrho^2 - \overline{ar}) = \overline{ic}(2\varrho' - \overline{ic}).$$

Ježto bod c jest nekonečně blízkým bodu a, jsou úsečky $\overline{bi}$, $\overline{ic}$ nekonečně malými 2. stupně a mohou býti vůči úsečkám $\overline{ab}$

a $2\varrho'$ zanedbány, z čehož plyne, že

$$\overline{ab}^2 = \overline{ic} \cdot 2\varrho' \quad \text{nebo} \quad 2\varrho' = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{ic}}, \tag{1}$$

kterýžto vztah můžeme psáti, položíme-li podle hořejšího $\overline{ab} = v'$, $\overline{bc} = \tau'$, se zřetelem k tomu, že z pravoúhlého trojúhelníka bci vyplývá

$$\overline{ic} = \overline{bc} \cos \lambda' = \tau' \cos \lambda', \tag{1'}$$

$$v'^2 = \tau' \cos \lambda' \,.\, 2\varrho' \quad \text{anebo} \quad 2\varrho' = \frac{v'^2}{\tau' \cos \lambda'}. \tag{2}$$

Z poloměru křivosti kuželosečky A lze sestrojiti křivost normálního řezu ${}^nA$, procházejícího tečnou T a plošnou normálou N a protínajícího přímku $\overline{cl} \parallel \overline{gn}$, kolmou k rovině normálního řezu ${}^nA$ v bodě l soumezném bodu c.

Ze vzniknuvšího trojúhelníka pravoúhlého cil[1]) plyne

$$\overline{il} = \overline{ci} \,.\, \cos \varkappa'$$

a vzhledem k rovnici (1′) lze psáti

$$\overline{il} = \tau' \cos \lambda' \cos \varkappa' \tag{3}$$

Podle vzorce (1) budeme míti pro poloměr křivosti ${}^n\varrho$ normálného řezu ${}^nA$ výraz

$$2\,{}^n\varrho' = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{il}}$$

a po dosazení hodnoty za úsečku $\overline{il}$ (z rovn. (3))

$$2\,{}^n\varrho' = \frac{v'^2}{\tau' \cos \lambda' \cos \varkappa'} \tag{4}$$

a vůči rovnici (2)

$${}^n\varrho' = \frac{\varrho'}{\cos \varkappa'}, \tag{4'}$$

čili poloměr křivosti ${}^n\varrho'$ řezu normálného ${}^nA$ je roven poloměru křivosti ϱ', řezu šikmého A prvé křivky v bodě a se dotýkajícího, lomenému kosinem úhlu $\varkappa'$, jejž svírají roviny obou křivek.

Ze vztahu tohoto plyne *theorém Meusnierův*

$$\varrho' = {}^n\varrho' \cos \varkappa',$$

t. j. **poloměr křivosti šikmého řezu plochy 2. stupně je orthogonálním průmětem poloměru křivosti normálného řezu jeho se v uvažovaném bodě dotýkajícího.** —

---

[1]) Pravý úhel nalézá se při vrcholu l.

2. Závislost křivosti v nějakém bodě a řezu normálného na křivosti dvou ke průměru $P \equiv \overline{ao}$ sdružených řezů diametrálných A a B plochy 2. stupně P.

Abychom určili v uvažovaném bodě a křivost nějakého řezu šikmého M, předpokládejme, že jeho rovina σ, procházející průměrem P protíná rovinu tečnou plochy $\mathbf{P}$, v tomto bodě sestrojenou, ve přímce $\overline{ad}$, tvořící s tečnou $\overline{ab} \equiv T'$ kuželosečky A úhel φ, a rovinu ω ve přímce $\overline{ou} \parallel \overline{ad}$.

Normála $\overline{au}$ této kuželosečky M v bodě a je orthogonálním průmětem normály $N = \overline{an}$ na rovinu σ a svírá s průměrem P úhel λ a s normálou N úhel $\varkappa$. Protíná-li kuželosečka M plochy $\mathbf{P}$ kuželosečku ${}^sB$ soumeznou, shodnou a shodně položenou k řezu diamentrálnému B, v bodě f a rovina σ křivky M rovinu křivky ${}^sB$ ve přímce $\overline{fd}$, rovnoběžné s průměrem P, a mimo to tečnu $\overline{ce}$ křivky ${}^sB$, rovnoběžné s přímkou $\overline{db}$ v bodě e, potom, označíce úsečku $\overline{db} = v''$ a úsečku $\overline{fe} \doteq \tau''$, obdržíme pro poloměr křivosti ϱ'' křivky ${}^sB$ podle vzorce (2)

$$2\varrho'' = \frac{v''^2}{\tau'' \cos \lambda''}, \tag{5}$$

kde značí λ'' jako dříve úhel normály $\overline{ah}$ s průměrem P.

Z kosoúhlého trojúhelníka abd plyne, že

$$v'' = \frac{v' \sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} \tag{5'}$$

a předchozí vzorec pro poloměr křivosti křivky ${}^sB$ lze potom psáti ve formě

$$2\varrho'' = \frac{v'^2 \sin \varphi}{\tau'' \sin^2(\varphi + \psi) \cos \lambda''}. \tag{6}$$

Normálný řez ${}^nB$, tečnou $\overline{at''} \equiv T''$ křivky této sestrojený, bude míti poloměr křivosti ${}^n\varrho''$, jehož velikost vyjádříme podle vzorce (4) s použitím vzorce (5′) rovnicí

$$2\,{}^n\varrho'' = \frac{v''^2}{\tau'' \cos \lambda'' \cos \varkappa''} = \frac{v'^2 \sin^2 \varphi}{\tau'' \sin^2(\varphi + \psi) \cos \lambda'' \cos \varkappa''}, \tag{7}$$

ve které značí $\varkappa''$, jak předem se stalo, úhel normály $\overline{ah}$ křivky B s normálou N.

Označíme-li úsečku $\overline{ad}$ písmenem v a $\overline{df}$ písmenem τ, bude poloměr křivosti ϱ šikmého řezu M vyjádřen vzorcem (podle vzorce (2))

$$2\varrho = \frac{v^2}{\tau \cos \lambda}, \tag{8}$$

ve kterém značí λ odchylku přímky $\overline{df}$, rovnoběžné s průměrem P, od normály $\overline{au}$, sestrojené v bodě a křivky M.

Položme do rovnice (8) za délku $v = \overline{ad}$, jak z trojúhelníka abd plyne,

$$v = \frac{v' \sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)}$$

a za délku $\tau = df$, rovnou součtu úseček $\overline{de} = \tau'$ a $\overline{ef} = \tau''$, kteréž lze ze vzorců (4) a (7) vypočítati:

$$\tau' = \frac{v'^2}{2\,{}^n\varrho' \cos \lambda' \cos \varkappa'},$$

$$\tau'' = \frac{v'^2 \sin^2 \varphi}{2\,{}^n\varrho'' \sin(\varphi + \psi) \,.\, \cos \lambda' \cos \varkappa''}.$$

Obdržíme za τ výraz:

$$\tau = \frac{v'^2}{2\,{}^n\varrho' \cos \lambda' \cos \varkappa'} + \frac{v'^2 \sin^2 \varphi}{2\,{}^n\varrho'' \sin(\varphi + \psi) \cos \lambda'' \cos \varkappa''}$$

a pro poloměr křivosti ϱ křivky M v bodě a

$$2\varrho = \frac{\dfrac{v'^2 \sin^2 \psi}{\sin^2(\varphi + \psi)}}{\left(\dfrac{v'^2}{2\pi\varrho' \cos \lambda' \cos \varkappa'} + \dfrac{v'^2 \sin^2 \varphi}{2\,{}^n\varrho \sin^2(\varphi + \psi) \cos \lambda'' \cos \varkappa''}\right) \cos \lambda}.$$

Posléze po malé redukci nabudeme pro ϱ

$$\varrho = \frac{\sin^2 \psi}{\left(\dfrac{\sin^2(\varphi + \psi)}{{}^n\varrho \cos \lambda' \cos \varkappa'} + \dfrac{\sin^2 \psi}{{}^n\varrho'' \cos \lambda'' \cos \varkappa''}\right) \cos \lambda}.$$

Pro poloměr křivosti ${}^n\varrho$ normálného řezu ${}^nM$, tečnou $\overline{ad}$ křivky M vedeného, označíme-li, jak se již nahoře stalo, úhel normály $\overline{au}$ křivky M s normálou N plochy písmenem $\varkappa$ a s průměrem P písmenem λ, obdržíme potom analogicky podle vzorce (4) výraz:

$${}^n\varrho = \frac{\sin^2 \psi}{\left(\dfrac{\sin^2(\varphi + \psi)}{{}^n\varrho' \cos \lambda' \cos \varkappa'} + \dfrac{\sin^2 \psi}{{}^n\varrho'' \cos \lambda'' \cos \varkappa''}\right) \cos \lambda \cos \varkappa},$$

z kterého plyne pro reciprokou hodnotu poloměru křivosti řezu normálného ${}^nM$

$$\frac{1}{{}^n\varrho} = \left(\frac{\sin^2(\varphi + \psi)}{{}^n\varrho' \cos \lambda' \cos \varkappa'} + \frac{\sin^2 \varphi}{{}^n\varrho'' \cos \lambda'' \cos \varkappa''}\right) \frac{\cos \lambda \cos \varkappa}{\sin^2 \psi}. \qquad (9)$$

Označíme-li úsečku $\overline{an}$ normály N písmenem μ a úsečku $\overline{ao}$ průměru P písmenem π, potom jest

$$\mu = \pi \cos \lambda' \cos \varkappa' = \pi \cos \lambda'' \cos \varkappa'' = \pi \cos \lambda \cos \varkappa$$

a tudíž i součin

$$\cos\lambda'\cos\varkappa' = \cos\lambda''\cos\varkappa'' = \cos\lambda\cos\varkappa.$$

Se zřetelem k těmto posledním rovnostem lze rovnici (9) zjednodušiti a psáti

$$\frac{1}{{}^n\varrho} = \left(\frac{\sin^2(\varphi+\psi)}{{}^n\varrho'} + \frac{\sin^2\psi}{{}^n\varrho''}\right)\frac{1}{\sin^2\psi}, \tag{9'}$$

jakožto výraz, kterým se vyjadřuje **závislost poloměru křivosti normálného řezu ^nM na křivosti normálných řezů ^nA, ^nB, dotýkajících se v bodě a dvou sdružených diametrálných kuželoseček AB a svírajících úhel ψ, z nichž kuželosečka A s kuželosečkou M úhel φ tvoří.**

3. Dupinova indikatrix.

Klademe-li v rovnici (9′)

$$k\,{}^n\varrho = r^2, \quad k\,{}^n\varrho' = r'^2, \quad k\,{}^n\varrho'' = r''^2, \tag{10}$$

kde k značí libovolnou konstantní úsečku, obdržíme rovnici:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\sin^2(\varphi+\psi)}{r'^2} + \frac{\sin\varphi}{r''^2}\right)\frac{1}{\sin^2\psi},$$

jakožto polární rovnici středové kuželosečky, představující **Dupinovu indikatrix**, plochy 2. stupně **P** v bodě a.

Z rovnice této jest zřejmo, že jsou tečny $\overline{ab}$, $\overline{at}$ křivek A, B v bodě a, uzavírající úhel ψ, sdruženými průměry této indikatrixy, v nich se nalézají poloměry r', r'', jež lze z rovnic (10) sestrojiti.

Známou konstrukcí sestrojíme osy této indikatrix co do polohy i velikosti a odvodíme v normálných řezech těmito osami položených hlavní řezy křivosti uvažované plochy 2. stupně **P** v bodě a a ze vztahu $k\,{}^n\varrho = r$ sestrojíme i jejich poloměry křivosti.

*

Contribution à la théorie de la courbure des quadriques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne un complément aux considérations générales contenues dans son manuel de géométrie descriptive („Vybrané stati z deskriptivní geometrie", p. 102), conduisant à une démonstration simple des théorèmes de Meusnier et de Dupin, mais valable seulement pour les quadriques.