Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Truksa

Poznámka k polynomům Charlier-Jordanovým

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 58 (1929), No. 1-2, 141--148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108909

Poznámka k polynomům Charlier-Jordanovým.

Dr. *L. Truksa.*

Limitní případ obecných J. P. Gramem[1]) odvozených orthogonálních systémů funkcí $\Phi_k(x)$ o charakteristickém vztahu

$$\sum \psi(x)\, \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, \omega = 0, \quad m \gtrless n$$

byl pro lim $\omega = 0$ — jedná-li se o soustavu polynomů — zevrubně v matematické analysi vyšetřován pro různá $\psi(x)$, a to jak po stránce funkčně teoretické, tak i se zřetelem na praktické použití v numerickém počítání. Vyšetřování případu obecného nebylo však jak v ryzí, tak v užité matematice věnováno značnější pozornosti přes to, že zejména při approximativním vyjadřování numericky daných funkcí — na př. pouze pro celistvé argumenty neodvisle proměnné — buď metodou nejmenších čtverců anebo metodou momentů, dále v numerické sumaci, přísluší právě obecnému případu zvláštní důležitost. Navazuje na práce Poissonovy a zejména Charlierovy o rozvoji pravděpodobnosti v řadu podle postupných diferencí funkce $\dfrac{e^{-m}\, m^x}{x!}$ podal v nedávné době zajímavý příspěvek v tomto směru Ch. Jordan[2]) odvozením některých vlastností obecné orthogonální soustavy polynomů $G_K(x, m)$, je-li

$$\psi(x, m) = \frac{m^x\, e^{-m}}{x!} = \lim_{np=m,\ n=\infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

a sumační meze $(0, \infty)$. O podmínkách rozvoje libovolných funkcí v řadu použitím těchto polynomů jedná H. Pollaczek-Geiringerová v článku: Die Charlier'sche Entwicklung willkürlicher Verteilungen.[3])

Z tvaru funkce $\psi(x, m)$, jež jest známým Poissonovým limitním případem pravděpodobnosti zjevů opakovaných v seriích, vyplývá

---

[1]) Journal f. d. reine u. angew. Mathem., sv. 94, 1883.

[2]) Sur la probabilité des épreuves répétées, Bull. d. l. Société Math. de France, 1926.

[3]) Skandinavisk Aktuarietidskrift. 1928. Viz též čl. »Über die Poissonsche Verteilung und die Entwickelung willkürlicher Verteilungen« v čas. Zeitschrift f. d. angew. Math. u. Mech. 1928.

očividně, že praktické použití těchto polynomů lze očekávati především při vyjadřování frequenčních křivek zjevů zřídka se vyskytujících (na př. ve statistice úrazů, scintillací radioaktivního záření, Brownova pohybu atd.).

Vycházeje z obecného vyjádření libovolného orthogonálního systému polynomů ve formě determinantu hodlám v dalším odvoditi nejprve některé vlastnosti polynomů $G_k(x, m)$ v pracích výše zmíněných neuvedené; dále budou odvozeny k těmto polynomům $G_k(x, m)$, jež lze nazvati polynomy I. druhu, příslušné polynomy II. druhu $H_k(x, m)$. Polynomů těchto — jako všech systémů polynomů II. druhu příslušných k obecným orthogonálním polynomům I. druhu — lze upotřebiti v numerické sumaci analogické Gaussově numerické integraci (mechanické kvadratuře).

Označme i-tý moment funkce $\psi(x, m)$

$$M_i = \sum_{x=0}^{\infty} x^i \, \psi(x, m)$$

a utvořme determinant

$$D_n(x, m) = \begin{vmatrix} 1 & M_0 & M_1 & \dots & M_{n-1} \\ x & M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ x^2 & . & . & \dots & . \\ . & . & . & & . \\ x^n & M_n & M_{n+1} & \dots & M_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Vynásobíme-li determinant $D_n(x, m)$ součinem $x^i \, \psi(x, m)$ a provedeme-li sumaci v mezích $(0, \infty)$, obdržíme pro $i = 0, 1, 2, \dots \overline{n-1}$ vztah

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi(x, m) \, x^i \, D_n(x, m) = 0 = \sum_{0}^{\infty} \psi(x, m) \, R_i(x) \, D_n(x, m),$$

$R_i(x)$ značí polynom stupně i. Vztah tento můžeme psáti též ve tvaru

$$\sum_{0}^{\infty} \psi(x, m) \, D_s(x, m) \, D_r(x, m) = 0, \qquad s \gtrless r.$$

Lze snadno dokázati, že polynomy Charlier-Jordanovy $G_n(x, m)$ vyhovující rovněž posléze uvedenému vztahu mohou se lišiti od polynomů $D_n(x, m)$ toliko o multiplikativní konstantu.

Jiné analogické vyjádření polynomů $G_n(x, m)$ ve formě determinantu — zavedeme-li momenty tvaru

$$\mathfrak{M}_s^i = \sum_{x=0}^{\infty} x^{i+1} \, (x-1)\,(x-2) \dots (x-s+1) \, \psi(x, m) \quad s > 1$$

$$\mathfrak{M}_s^i = \sum_{x=0}^{\infty} x^{i+s}\,\psi(x, m), \qquad s = 0, 1$$

jest dáno výrazem

$$\mathfrak{D}_n(x, m) = \begin{vmatrix} 1 & \mathfrak{M}_0^0 & \mathfrak{M}_0^1 \ldots \mathfrak{M}_0^{n-1} \\ x & \mathfrak{M}_1^0 & \mathfrak{M}_1^1 \ldots \mathfrak{M}_1^{n-1} \\ x\,(x-1) & \mathfrak{M}_2^0 & . \qquad . \\ . & . & . \qquad . \\ x\,(x-1) \ldots (x-n+1) & \mathfrak{M}_n^0 & \mathfrak{M}_n^1 \ldots \mathfrak{M}_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

neboť i tu platí evidentně základní vztah

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi(x, m)\,\mathfrak{D}_s(x, m)\,\mathfrak{D}_r(x, m) = 0 \qquad s \gtrless r.$$

Provedeme nyní výpočet subdeterminantů $\mathfrak{D}_n^0$ a $\mathfrak{D}_{n-1}$ příslušných k členům první a n-té řádky v prvním sloupci.

Z derivace funkce $\psi(x, m)$ podle m

$$m\,\frac{d\,\psi(x, m)}{dm} = -\,m\,\psi + x\,\psi$$

vyplývá pro výpočet momentů $\mathfrak{M}_0^s$ relace:

$$\mathfrak{M}_{s+1}^0 = (m-s)\,\mathfrak{M}_s^0 + m\,\frac{d}{dm}\,\mathfrak{M}_s^0$$

a pro $M_s^i\,(i > 0)$:

$$\mathfrak{M}_s^{i+1} = m\left(\mathfrak{M}_s^i + \frac{d}{dm}\,\mathfrak{M}_s^i\right).$$

Používajíce vztahu

$$\mathfrak{M}_0^0 = \sum_{x=0}^{\infty} \psi(x, m) = 1,$$

obdržíme z rovnic předcházejících postupně

$$\mathfrak{M}_1^0 = m,\ \mathfrak{M}_2^0 = m^2, \ldots \mathfrak{M}_s^0 = m^s,$$

$$\mathfrak{M}_s^1 = m\,(m^s + s\,m^{s-1}) = m^s\,(m+s) = m^s\,p_1(s)$$

$$\mathfrak{M}_s^2 = m\,(m^s\,p_1(s) + s\,m^{s-1}\,p_1(s) + m^s\,\frac{d}{dm}\,p_1(s)) = m^s\,p_2(s).$$

Označíme-li $p_i(s)$ polynom v »s« stupně »i« s koeficientem »1« u nejvyšší mocniny proměnné »s«, platí dále obecně

$$\mathfrak{M}_s^i = m^s\,p_i(s)$$

Po dosazení hodnot momentů $\mathfrak{M}_s^i$ a vytknutí součinitelů u polynomů $p_i\,(s)$ obdržíme postupným odečítáním řádků v determinantu

$\mathfrak{D}_n^0$ *a* $\mathfrak{D}_{n-1}$ a dosazením vztahu

$$\Delta^i \mathfrak{M}_s^i = i!$$

hodnoty jejich

$$\mathfrak{D}_n^0 = m^{n^2}\, 1!\, 2! \ldots n!$$
$$\mathfrak{D}_{n-1} = m^{n(n-1)}\, 1!\, 2! \ldots \overline{n-1}!.$$

Definujeme-li nyní polynomy Charlier-Jordanovy

$$G_n(x, m) = \frac{(-1)^n}{m^n\, \mathfrak{D}_{n-1}} \mathfrak{D}_n\,(x, m), \tag{1}$$

vyplývá z předchozího nejprve relace

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_n^2(x, m)\, \psi(x, m) = \frac{n!}{m^n}, \tag{2}$$

dále rekurentní vztah:

$$G_{n+1}(x, m) = \frac{x - n - m}{m} G_n(x, m) - \frac{n}{m} G_{n-1}(x, m). \tag{3}$$

Vzorec (3) je specielní — polynomům Charlier-Jordanovým odpovídající — tvar obecné funkcionální rovnice, kterou lze odvoditi pro libovolný orthogonální systém polynomů.

Další rekurentní vztah obdržíme, vyjádříme-li 1. diferenci

$$\Delta\, G_n(x, m) = \sum_{i=0}^{n=1} \alpha_i\, G_i(x, m).$$

Ježto pro $i \leqq n - 2$ jest

$$\sum_{x=0}^{\infty} G_n(x + 1, m)\, \psi(x, m)\, G_i(x, m) =$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} G_n(x, m) \frac{x}{m}\, \psi(x, m)\, G_i(x - 1, m) =$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} G_n(x, m)\, \psi(x, m)\, \frac{x}{m}\, G_i(x - 1, m) = 0,$$

takže

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-2} = 0,$$

redukuje se výraz tento na

$$\Delta\, G_n(x, m) = \frac{n}{m} G_{n-1}(x, m), \tag{4}$$

neboť

$$a_{n-1} = \frac{n}{m^n} : \frac{1}{m^{n-1}},$$

jak plyne ze srovnání koeficientů při nejvyšší mocnině x. Z rovnic (3) a (4) plynou také tyto další vztahy:

$$G_n(x, m) = \frac{x - n - m + 1}{n} \Delta G_n(x, m) - \Delta G_{n-1}(x, m),$$

$$\Delta G_{n+1}(x, m) = \frac{x - n - m + 1}{nm} (n + 1) \Delta G_n(x, m) - \frac{n+1}{m} \Delta G_{n-1}(x, m). \quad (5)$$

Polynomy $G_n(x, m)$ vyhovují lineární diferenční rovnici 2. řádu, kterou lze odvoditi jednoduchým způsobem ze vzorců (3) a (5) ve tvaru

$$\Delta^2 G_n(x, m) - \frac{x + 1 - n - m}{m} \Delta G_n(x, m) + \frac{x}{m} G_n(x, m) = 0 \quad (6)$$

resp.

$$m\, G_n(x + 2, m) - (x + 1 + m - n)\, G_n(x + 1, m) + (x + 1)\, G_n(x, m) = 0.$$

Funkcionální rovnice (3) poskytuje nové jednoduché vyjádření polynomů $G_n(x, m)$ ve formě determinantu

$$G_n(x, m) =$$

$$= \frac{1}{m^n} \begin{vmatrix} x - n - m + 1 & m & 0 & \dots & 0 \\ n - 1 & x - n - m + 2 & m & \dots & 0 \\ 0 & n - 2 & x - n - m + 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n - 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x - m \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{m^n} \begin{vmatrix} x - n - m + 1 & \sqrt{m(n-1)} & \dots & 0 \\ \sqrt{m(n-1)} & x - n - m + 2 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{m(n-2)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{m} \\ 0 & 0 & \dots & x - m \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Z těchto vyjádření vyplývá též, že nulové body polynomů $G_n(x, m)$ jsou všecky reálné. Annulováním determinantu (7) obdržíme totiž specielní tvar saekulární rovnice[4]), jež se vyznačuje vlastností právě uvedenou.

Z rekurentní relace (3) resp. z determinantového vyjádření (7) plyne dále aplikací základní vlastnosti nekonečných zlomků řetězových vyjádření polynomů $G_n(x, m)$ jakožto jmenovatelů postupných přibližných hodnot nekonečného zlomku řetězového

$$\frac{\frac{1}{m}}{\left|\frac{x-m}{m}\right.} - \frac{\frac{1}{m}\Big|}{\left|\frac{x-m-1}{m}\right.} - \frac{\frac{2}{m}\Big|}{\left|\frac{x-m-2}{m}\right.} - \frac{\frac{3}{m}\Big|}{\left|\frac{x-m-3}{m}\right.} - \cdots$$

Postupné čitatele tohoto zlomku $H_n(x, m)$ jsou jak patrno polynomy v x stupně o »1« nižšího nežli $G_n(x, m)$ a vyhovují téže funkcionální rovnici jako polynomy $G_n(x, m)$. V souhlase s analogickými případy u jiných orthogonálních systémů polynomů se vyskytujících označme je polynomy Charlier-Jordanovy II. druhu.

Počáteční z nich buďtež zde uvedeny:

$$\begin{aligned} H_1(x, m) &= \frac{1}{m}, \\ H_2(x, m) &= \frac{x-m-1}{m^2}, \\ H_3(x, m) &= \frac{(x-m-2)(x-m-1)}{m^3} - \frac{2}{m^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Jiné odvození polynomů II. druhu $H_n(x, m)$ a zároveň způsob použití jich v numerické sumaci naskýtá se při řešení této úlohy:

Stanoviti jest součet x ekvidistantních hodnot funkce $F(x)$ tvaru

$$F_i(x) = f_i(x)\,\psi(x, m)$$

v mezích $(0, \infty)$, je-li $f_i(x)$ funkcí racionální celistvou stupně »i«, z daných »n« hodnot $f_i(x)$ pro argumenty $x_1, x_2, \ldots x_n$ tak volené, aby výsledek platil přesně, pokud $f_i(x)$ jest stupně $2n-1$ nebo nižšího.

Postupem analogickým, jakým řešení podáno jest v případě, že $\psi(x, m) = 1$ v mém pojednání o zobecněných polynomech Legendrových[4]), obdržíme řešení úlohy vyjádřené polynomy Charlier-Jordanovými I. a II. druhu ve tvaru

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f_i(x_k)\,\frac{H_n(x_k, m)}{G'_n(x_k, m)} + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\cdot\frac{n!}{m^n}, \tag{10}$$

---

[4]) na př. Baltzer, Determinanten, 1881.
[4]) Čas. mat. a fys., roč. LVI., č. 4, Praha 1927.

x_k značí abscissy nulových bodů polynomů $G_n(x, m)$, ξ jest jistá hodnota argumentu v mezích $(0, \infty)$. Polynomy $H_n(x, m)$ jsou v tomto případě určeny vztahem:

$$\overline{H}_n(x, m) = G_n(x, m)\,\overline{H}_0\,(x, m) - H_n\,(x, m) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{G_n(y, m)\,\psi(y, m)}{x - y}. \tag{11}$$

Budiž podotknuto, že funkce

$$T_r(x) = \psi(x, m) \sum_{i=0}^{r} a_i\, G_i\,(x, m),$$

kdež

$$a_i = \frac{\sum\limits_{x=0}^{\infty} f_n(x)\,\psi(x, m)\,G_i(x, m)}{\sum\limits_{x=0}^{\infty} \psi(x, m)\,G_i^2(x, m)}$$

vyjadřuje funkci $F_n(x) = f_n(x)\,\psi(x, m)$ aproximativně metodou momentů. Pro $r = n$ poskytuje $T_n(x)$ vyjádření zcela přesné.

V případě $r = n - 1$, jest rozdíl $F_n(x) - T_{n-1}(x) = a_n G_n(x, m)\,\psi(x, m)$, takže obě křivky se protínají v nulových bodech polynomu $G_n(x, m)$. Se zřetelem k této okolnosti jest $T_{n-1}(x)$ současně křivkou, jejíž součet ekvidistantních hodnot v mezích $(0, \infty)$ jest řešením výše uvedené úlohy numerické sumace.

*

Note sur les polynômes de Charlier-Jordan.

(Extrait de l'article précédent.)

Pour établir quelques propriétés fondamentales des polynômes de Charlier-Jordan, à savoir

$$G_n\,(x, m) = \frac{1}{\psi\,(x, m)} \cdot \frac{d^n}{dm^n}\,\psi\,(x, m); \quad \psi(x, m) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

l'auteur se sert de l'expression générale des systèmes orthogonaux par un déterminant. Après avoir introduit les moments $\mathfrak{M}^i_s$ et le déterminant $\mathfrak{D}_n(x, m)$ (voir le texte tchèque), il définit les polynomes de Charlier-Jordan par la relation (1), où $\mathfrak{D}_{n-1}$ est le mineur du dernier élément dans la première colonne de $\mathfrak{D}(x, m)$. Il en déduit l'équation fonctionnelle (3) et les formules de récurrence (4), (5). Il en résulte l'équation linéaire du 2e ordre à différences inies (6).

Dans la suite, l'auteur donne une autre forme de l'expression des polynomes $G_n(x, m)$ par des déterminants, laquelle suit de l'équation fonctionnelle (7), et une autre expression, dans laquelle ces polynômes se présentent comme les dénominateurs des réduites successives de la fraction continue

$$\frac{\frac{1}{m}}{\Big|\frac{x-m}{m}} - \frac{\frac{1}{m}\Big|}{\Big|\frac{x-m-1}{m}} - \frac{\frac{2}{m}\Big|}{\Big|\frac{x-m-2}{m}} - \frac{\frac{3}{m}\Big|}{\Big|\frac{x-m-3}{m}} \cdots$$

Quant aux numérateurs $H_n(x, m)$ de ces réduites, qui sont des polynômes de l'ordre $n - 1$, il les nomme, d'accord avec des cas analogues dans d'autres systèmes orthogonaux de polynômes, polynômes de Charlier-Jordan de la deuxième espèce. L'auteur signale la façon dont on peut appliquer les polynômes des deux espèces dans la sommation numérique.