Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Zahradníček

O některých křivkách odvozených z kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 281--287

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108886

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1920

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

dává ostatně výsledky uspokojivé; na př. pro $x=1$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{30}+\frac{11}{30.2^5}+\frac{31}{30.6^5}+\frac{61}{30.12^5}+$$
$$+\frac{101}{30.20^5}+\dots$$

Také rovnice (24^5) pro $p=2$

$$\lim_{n=\infty}\left[\sum_0^{n-1}\frac{1}{x+\nu}-\log(x+n)\right]=$$
$$=-\log x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{120x^4}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\vartheta_2(x+\nu),$$
$$\vartheta_2(u)=\log\frac{u}{u+1}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)+\frac{1}{120}\left[\frac{1}{u^2}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]\left[10-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]$$

dává dobré výsledky; tak pro $x=1$ již čtvrtý člen má hodnotu

$$0<\vartheta_2(4)<\frac{1}{10^6}.$$

O některých křivkách odvozených z kuželoseček.

Dr. Josef Zahradníček.

(Dokončení.)

Jest určiti geom. místo průsečíků výšek v trojúhelníku F_1F_2M, kde F_1, F_2 jsou ohniska a M bod ellipsy.

Bod ellipsy má souřadnice

$$M\,(a\cos\varphi,\quad b\sin\varphi);$$

rovnice dvou výšek trojúhelníka F_1F_2M jsou

$$x=a\cos\varphi,\quad y=-\frac{a\cos\varphi+e}{b\sin\varphi}(x-e).$$

Souřadnice jejich průsečíku jsou:

$$x=a\cos\varphi,\quad y=\frac{a^2\cos^2\varphi-e^2}{b\sin\varphi}.$$

Rovnice tyto při proměnlivém φ jsou zároveň rovnicemi hledaného geom. místa ve tvaru parametrickém. Rovnici geom.

místa v souřadnicích pravoúhlých obdržíme vyloučením proměnného φ:

$$a^2 (x^2 - e^2)^2 - b^2 y^2 (a^2 - x^2) = o.$$

Obdobně pokračujeme při hyperbole. (Viz G. Loria str. 106—107.)

Geom. místo těžiště trojúhelníka $F_1 F_2 M$ určí se zcela jednoduše. Souřadnice těžiště jsou v tomto případě

$$x = \frac{a \cos \varphi}{3}, \quad y = \frac{b \sin \varphi}{3},$$

a vyloučením φ obdržíme rovnici

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{3}}\right)^2 = 1.$$

Jest určiti obálku normál kuželosečky.

Obálka normál kuželosečky — tak zvaná evoluta kuželosečky — stanoví se jako geom. místo průsečíku dvou nekonečně blízkých normál řešením rovnice normály a její první derivace dle proměnného parametru.

V případě ellipsy jest směrnice tečny

$$A = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi},$$

rovnice normály pak jest:

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi = \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2}.$$

Derivujíce tuto rovnici dle φ obdržíme:

$$ax \cos \varphi + by \sin \varphi = e^2 \cos 2\varphi.$$

Z obou posledních rovnic vyplývá

$$\frac{ax}{e^2} = \cos^3 \varphi, \quad \frac{by}{e^2} = -\sin^3 \varphi.$$

Vyloučením φ dostáváme rovnici hledané evoluty ellipsy v souřadnicích pravoúhlých.

$$\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

rovnici této odpovídá tak zvaná obecná asteroida. (Viz na př. Weyr, Počet differenciálný, Praha 1902, str. 310.)

Normála hyperboly má rovnici

$$ax \sin 2\varphi + 2by \cos \varphi = 2e^2 \sin \varphi;$$

derivováním dle φ vyplývá:

$$ax \cos 2\varphi - by \sin \varphi = e^2 \cos \varphi.$$

Z obou rovnic pak obdržíme:

$$\cos^3 \varphi = \frac{e^2}{ax}, \quad \sin^3 \varphi = -\frac{by}{ax}.$$

Rovnice evoluty hyperboly ve formě parametrické jsou

$$x = \frac{e^2}{a \cos^3 \varphi}, \quad y = -\frac{e^2 \sin^3 \varphi}{b \cos^3 \varphi},$$

anebo v souřadnicích pravoúhlých

$$\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{by}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Při parabole ponecháme souřadnice libovolného bodu

$$\frac{p}{2A^2}, \quad \frac{p}{A},$$

rovnice normály jest

$$2A^3y + 2A^2x - 2A^2p = p,$$

první derivace dle A

$$6A^2y + 4Ax - 4Ap = 0.$$

Z této rovnice plyne:

$$A = \frac{2(p - x)}{3y};$$

dosaďme do předešlé a obdržíme po krátké úpravě rovnici obálky

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$

(Viz na př. Weyr, Počet differenciálný, str. 309.) Rovnice představuje tak zvanou semikubickou parabolu.

Jest dokázati, že tečna a normála kuželosečky půlí úhel průvodičů.

Dokážeme větu tuto jen pro ellipsu. Má tu platiti

$$\nu - \alpha = \beta - \nu,$$

kde ν jest úhel, jejž svírá normála s kladným směrem osy x-ové, α, β úhly průvodičů s osou x-ovou. Je tedy

$$2\nu = \alpha + \beta$$

a

$$\operatorname{tg} 2\nu = \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Rozvedeme-li tangenty a dosadíme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b \sin \omega}{b \cos \omega + e}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \omega}{a \cos \omega - e}, \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{a \sin \omega}{b \cos \omega},$$

jest předešlá rovnice identicky splněna a tím důkaz proveden.

Čáry kaustické.

Podle předešlého můžeme odvoditi i rovnice tak zvaných čar kaustických. Paprsky vycházející ze zdroje svítícího, vytvořují po odrazu, po případě po lomu obálku — čáru katakaustickou resp. diakaustickou. Omezíme se v následujících výpočtech jen na případ nejjednodušší: paprsky vycházející z bodu svítícího odrážejí se na dutém zrcadle parabolickém nebo kulovém.

Libovolný paprsek rovnoběžný s osou paraboly — svítící bod v nekonečnu — dopadá na křivku v bodě

$$x_1 = \frac{p \operatorname{tg}^2 \varphi}{2}, \quad y_1 = p \operatorname{tg} \varphi,$$

kde φ jest úhel dopadu.*) Odražený paprsek má rovnici:

$$y - y_1 = -\operatorname{tg} 2\varphi (x - x_1),$$

anebo dosadíme-li za x_1, y_1:

$$x \sin 2\varphi + y \cos 2\varphi = \frac{p}{2} \sin 2\varphi.$$

Derivujíce dle φ obdržíme:

$$x \cos 2\varphi - y \sin 2\varphi = \frac{p}{2} \cos 2\varphi.$$

Z obou posledních rovnic plyne řešením rovnice obálky odražených paprsků

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = 0;$$

*) Subnormála paraboly je veličina stálá a rovna parametru. Z jednoduchého výkresu pak vysvítá platnost vztahu

$$y_1 = p \operatorname{tg} \varphi;$$

druhou souřadnici podává rovnice paraboly. (Srovnej se souřadnicemi dřívějšími pro libovolný bod paraboly.)

kaustická čára redukuje se v tomto případě na pouhý bod — ohnisko. Poznatek tento vyplývá z věty, že normála paraboly půlí úhel průvodičů.

Odvodíme nyní kaustickou čáru pro duté zrcadlo, jehož osovým řezem je kruh. Úvahu provedeme jako v předešlém pro jeden libovolný řez osový — rovina xy. Kulovému zrcadlu odpovídá zde kružnice a naopak kaustické čáře odpovídá kaustická plocha.

Paprsek rovnoběžný s osou x-ovou dopadá na zrcadlo v bodě

$$M\,(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi);$$

paprsek odražený má rovnici

$$y - a\sin\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi\,(x - a\cos\varphi);$$

snadno ji převedeme na tvar

$$x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi - a\sin\varphi = 0.$$

Derivováním dle φ obdržíme

$$x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi - \frac{a\cos\varphi}{2} = 0.$$

Z obou rovnic plyne rovnice obálky vyjádřená parametricky

$$x = a\left(\sin\varphi\sin 2\varphi + \frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{2}\right),$$

$$y = a\left(\frac{\sin 2\varphi\cos\varphi}{2} - \sin\varphi\cos 2\varphi\right),$$

anebo jednodušeji

$$x = \frac{a}{2}\cos\varphi\,(1 + 2\sin^2\varphi),$$

$$y = a\sin^3\varphi.$$

V souřadnicích pravoúhlých — vyloučením φ — jest rovnice kaustické čáry *)

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\left[1 + 3\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

*) Snadno se dá dokázati, že kaustická čára kruhu pro svítící bod v nekonečnu je tak zvaná epicykloida; opisuje ji bod kruhu s poloměrem $\frac{a}{4}$ valícího se po kruhu s poloměrem $\frac{a}{2}$. Z rovnice křivky plyne její konstrukce: paprsek rovnoběžný s osou vytvoří v kruhu tětivu délky t; od bodu dopadu nanesme na odražený paprsek $\frac{t}{4}$ a máme bod kaustické čáry. (G. Loria, str. 665.) — Viz obrazec v Jeništově učebnici fysiky pro VIII. tř. g. na str. 157., anebo v Maškově učebnici pro VII. tř. r. na str. 170.

v souřadnicích polárných pak

$$r^2 = \frac{a^2}{4}(1 + 3\sin^2\varphi).$$

(Srovnej na př. G. Loria str. 665.)

Je-li zdroj světelný v konečnu na př. v bodě $S(-l, 0)$, pak rovnice odraženého paprsku, jak patrno z jednoduchého náčrtku, jest:

$$y - a\sin(\varphi + \omega) = \operatorname{tg}(2\varphi + \omega)[x - a\cos(\varphi + \omega)],$$

anebo

$$y\cos(2\varphi + \omega) - x\sin(2\varphi + \omega) + a\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

kde ω jest úhel, jejž tvoří dopadající paprsek s osou x-ovou, φ pak úhel dopadu. Derivováním dle φ obdržíme:

$$-y\sin(2\varphi + \omega)\left[\frac{d\omega}{d\varphi} + 2\right] - x\cos(2\varphi + \omega)\left[\frac{d\omega}{d\varphi} + 2\right] + \\ + a\cos\varphi = 0.$$

Z rovnice

$$l\sin\omega = a\sin\varphi, \tag{2}$$

jejíž platnost z náčrtku patrna, plyne

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{a\cos\varphi}{l\cos\omega};$$

dosaďme hodnotu tuto do předešlé rovnice a obdržíme

$$y\sin(2\varphi + \omega) + x\cos(2\varphi + \omega) = \frac{al\cos\varphi\cos\omega}{a\cos\varphi + 2l\cos\omega}. \tag{3}$$

Pravou stranu této rovnice nazveme M a upravíme ji — vyloučením l pomocí (2) — na tvar:

$$M = \frac{a\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega}{\sin(\varphi + \omega) + \sin\varphi\cos\omega}. \tag{4}$$

Z rovnic (1) a (3) pak vyplývá:

$$x = M\cos(2\varphi + \omega) + a\sin\varphi\sin(2\varphi + \omega),$$
$$y = M\sin(2\varphi + \omega) - a\sin\varphi\cos(2\varphi + \omega).$$

Rovnice tyto vyjadřují parametricky obálku odražených paprsků, při čemž nutno míti zřetel i na vztahy (2) a (4).

V souřadnicích polárných jest

$$x^2 + y^2 = r^2$$

a kaustická čára má rovnici

$$r^2 = M^2 + a^2\sin^2\varphi,$$

anebo dosadíme li za M a upravíme

$$r^2 = \frac{a^2 \sin^2\varphi\,[\cos^2\omega + \sin^2(\varphi+\omega) + 2\sin\varphi\cos\omega\sin(\varphi+\omega)]}{[\sin\varphi\cos\omega + \sin(\varphi+\omega)]^2}. \tag{5}$$

Z obecné rovnice této dostáváme zvláštní případy:

pro $l = \infty$, $\omega = 0$ jest

$$r^2 = \frac{a^2}{4}(1 + 3\sin^2\varphi),$$

jak už dříve bylo odvozeno; pro $l = a$, $\omega = \varphi$ jest

$$r^2 = \frac{a^2}{9}(1 + 8\sin^2\varphi);$$

pro $l = 0$, $\varphi = 0$ jest

$$r^2 = 0,$$

v tomto případě jest obálkou pouhý bod. Obecně jest

$$l = \frac{m}{n}a,$$

pak dle (2)

$$\sin\omega = \frac{n}{m}\sin\varphi \quad \text{a} \quad \cos\omega = \pm\sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2}\sin^2\varphi};$$

dosadíme-li hodnoty tyto do (5), vyskytuje se v polárné rovnici kaustické čáry jen jeden proměnný úhel ω.

Chronometr a signalisace normálního času.

Otto Seydl, v Č. Budějovice.

(Dokončení.)

Nejčastějším ze signálů akustických je — tak jako bývalo v Praze — výstřel děla. Je málo spolehlivý, neboť přesnost jeho závisí na tom, je-li dělo vypáleno dělostřelcem nebo automaticky hodinami observatoře a na distanci lodi od místa výstřelu. I na tuto okolnost kalendář lodníka upozorňuje a uvádí mu rychlost zvuku v jeho vlastních jednotkách: 1 mořská míle je proběhnuta zvukovou vlnou za 5·5^{sec} čili rychlost zvuku nad hladinou moře 339 *m* jest 0·18 mořské míle za sekundu. Konečně rychlost šíření se akust. signálu závisí i na teplotě vzduchu, barometrickém tlaku a větru. V jediném případě (Honolulu) jest signál normál. času dáván zazněním parní píšťaly soukromé továrny.