Juraj Hronec

K teorii Fuchsových relácií lin. dif. systémov

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 1, 14--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108872

K teorii Fuchsových relácií lin. dif. systémov.

Napísal *J. Hronec.*

V práci „Fuchsove relácie pre lineárne diferenciálne systémy a počet ich členov"[1]) sú určené tieto relácie pri tej podmienke, že korene determinujúcich rovníc, patriacich k jednotlivým singulárnym bodom sú všetky rôzne a že ich reálna čiastka pohybuje sa medzi 0 a —1, čo potom platí i pre korene adjungovaných lin dif. systémov.

V tomto článku umienil som si po prvé preskúmať možnosť takovýchto lin. dif. systémov a po druhé poukázať na to, že podmienka, aby reálna čiastka koreňov determinujúcich rovníc sa pohybovala medzi 0 a —1, je nie dôležitá, že Fuchsove relácie v istom prípade dajú sa určiť, jestliže táto podmienka sa nesplní a konečne ukažem to na jednom príklade pre $n = 2$.

I.

Vezmime lin. dif. systém

$$\text{A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda a_{\lambda k}, \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

kde je

$$a_{\lambda k} = \frac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_{\lambda k}^{(0)} + b_{\lambda k}^{(1)} x + \ldots + b_{\lambda k}^{(\sigma-1)} x^{\sigma-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{B_{\lambda k}^{(\nu)}}{x-a_\nu},$$

a však je:

$$B_{\lambda k}^{(\nu)} = \frac{g_{\lambda k}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

V okolí sing. bodu $x = a_\nu$ je:

$$a_{\lambda k} = \frac{B_{\lambda k}^{(\nu)}}{x-a_\nu} + \psi_{\lambda k}^{(\nu)}(x),$$

kde je

$$\psi_{\lambda k}^{(\nu)}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \alpha_{ik}^{(\varkappa)} (x-a_\nu)^\varkappa,$$

takže normálny tvar lin. dif. systému A) ohľadom sing. bodu $x = a_\nu$ je:

---

[1]) **Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LII.**

$$(x-a_\nu)\frac{dy_k}{dx}-\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda\,[B^{(\nu)}_{\lambda k}+(x-a_\nu)\,\psi^{(\nu)}_{\lambda k}(x)]=0$$

alebo vo tvaru mátrixov:

$$\mathrm{A}')(\delta_{ik}\,(x-a_\nu))\left(\frac{dy_{ik}}{dx}\right)-(y_{ik})\,[(B^{(\nu)}_{ik})+(\delta_{ik}(x-a_\nu))\,(\psi^{(\nu)}_{ik}(x))]=(0),$$

kde je:
$$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & \text{je-li } i=k\\ 0 & \text{„ } i\neq k.\end{cases}$$

A′ je pre y_{ik} lin. dif. rovnica prvého radu a jej determinújuca rovnica, patriaca k sing. bodu $x=a_\nu$ je[2])

1. $$(\delta_{ik}\,r^{(\nu)})-(B^{(\nu)}_{ik})=0,$$

alebo $$(B^{(\nu)}_{ik}-\delta_{ik}\,r^{(\nu)})=0$$

a jej korene dostaneme z rovnice

2. $$|B^{(\nu)}_{ik}-\delta_{ik}r^{(\nu)}|=0,$$

kde je
$$i,k=1,2\ldots n,$$
$$\nu=1,2,\ldots\sigma.$$

1. representuje vlastne σ rovnic pre $r^{(\nu)}$, kde je $\sigma\geqq 2$, a to n-ho stupňa, a dá nám $n\sigma$ koreňov.

Udáme-li $a_{\lambda k}=\dfrac{g_{\lambda k}(x)}{\varphi(x)}$ funkcie, týmto sú dané i

$$\frac{g_{\lambda k}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}=B^{(\nu)}_{\lambda k}$$

t. j. i korene $r^{(\nu)}_k$ $(k=1,2,\ldots n)$, $(\nu=1,2,\ldots\sigma)$.

Opačne udáme-li korene $r^{(\nu)}_k$ tým sú dané rovnice

3.
$$\begin{aligned}D_1^{(\nu)}&=r_1^{(\nu)}+r_2^{(\nu)}+\ldots+r_n^{(\nu)}\\ D_2^{(\nu)}&=r_1^{(\nu)}\,.\,r_2^{(\nu)}+\ldots+r_{n-1}^{(\nu)}\,r_n^{(\nu)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_n^{(\nu)}&=r_1^{(\nu)}\,.\,r_2^{(\nu)}\ldots\,.\,r_{n-1}^{(\nu)}\,r_n^{(\nu)}.\end{aligned}$$

kde $D_1^{(\nu)}$ je súčet diagonálnych minorov 1-ho radu, $D_2^{(\nu)}$ je súčet diagonálnych minorov 2-ho radu atď. determinantu $|B^{(\nu)}_{ik}|$ a $D_n^{(\nu)}=$ $=|B^{(\nu)}_{ik}|$.

Výrazy 3. representujú $n\sigma$ lineárnych rovnic pre $B^{(\nu)}_{ik}$, teda pre $n^2\sigma$ neznámych a tak zbýva nám predbežne ešte $n\sigma(n-1)$ ľubovolných $B^{(\nu)}_{ik}$ konštantných hodnôt.

---

[2]) Vid. L. Fuchs: Math. Werke. Sv. I. str. 188.

Je-li $x=\infty$ sing. bodom kanonického systému A), vtedy v okolí $x=\infty$ sú

$$a_{ik}=\frac{g_{ik}^{(1)}}{x}+\frac{g_{ik}^{(2)}}{x^2}+\ldots$$

a determinujúca rovnica, patriaca k tomuto bodu bude, když označíme $g_{ik}^{(1)}=B_{ik}^{(\sigma+1)}$:

$$|B_{ik}^{(\sigma+1)}-\delta_{ik}r^{(\sigma+1)}|=0,$$

kde je:

$$B_{ik}^{(\sigma+1)}=-\sum_{\nu=1}^{\sigma}B_{ik}^{(\nu)},$$

alebo:

4.
$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1}B_{ik}^{(\nu)}=0.$$

A preto teda máme $n\,\sigma+1$ rovníc a

$$n\,\sigma\,(n-1)-1$$

$B_{ik}^{(\nu)}$ ľubovolných konstantných hodnôt.

Z rovníc 1. a 4. vyplýva zase, že je

5.
$$\sum_{\nu=1}^{\sigma+1}\sum_{k=1}^{n}r_k^{(\nu)}=0.$$

Udáme-li korene determinujúcich rovníc ľubovolne, musíme ich predsa tak voliť, aby sa na nich posledná relácia 5. splnila, teda môžeme ich tak voliť, aby sa ich reálna čiastka pohybovala medzi 0 a -1 a reálna čiastka koreňov determinujúcich rovníc adjungovaného lin. dif. systému

B')
$$\frac{d(\varphi(x)\mu_k(x))}{dx}=-\sum_{\lambda=1}^{n}g_{k\lambda}(x)\,\mu_\lambda(x)$$

mení sa tiež medzi 0 a -1.[4])

Týmto zodpovedajne máme určiť

$$a_{ik}=\frac{b_{ik}^{(0)}+b_{ik}^{(1)}x+\ldots+b_{ik}^{(\sigma-1)}x^{\sigma-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\sigma)}$$

t. j. konstanty $b_{ik}^{(0)}, b_{ik}^{(1)}\ldots b_{ik}^{(\sigma-1)}$, k čomu máme systém lin. rovníc:

$$b_{ik}^{(0)}+b_{ik}^{(1)}a_\nu+b_{ik}^{(2)}a_\nu^2+\ldots+b_{ik}^{(\sigma-1)}a_\nu^{\sigma-1}=B_{ik}^{(\nu)}\varphi'(a_\nu),$$

$$i,\ k=1,2,\ldots n,$$

$$\nu=1,2,\ldots\sigma,$$

---

[4]) Vid Fuchsove relácie atď. Časopis LII.

kde je:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{\sigma-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{\sigma-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_\sigma & a_\sigma^2 & \dots & a_\sigma^{\sigma-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} \prod_{l,j=1}^{\sigma} (a_l - a_j),$$

$a_1, a_2, \dots a_\sigma$ sú však rôzne a preto je $D \neq 0$; a tak $b_{ik}^{(0)}, b_{ik}^{(1)}, \dots b_{ik}^{(\sigma-1)}$ a tým i $a_{ik}(x)$ dajú sa vždy určiť, udáme-li sing. body $a_1, a_2, \dots$ $\dots a_\sigma \infty$ a udáme-li ľubovolné hodnoty koreňov k nim patriacich determinujúcich rovníc.

Takýchto lin. dif. systémov je:

$$n\,\sigma(n-1)-1$$

a všetky tieto lin. dif. systémy patria do jednej *triedy* definovanej Riemannom.

II.

Vezmime lin. dif. systém normálneho tvaru ohľadom sing. bodu $x = a_\nu$:

$$(x-a_\nu)\frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$(x-a_\nu)\frac{dy_2}{dx} = y_2 + y_3$$

$$(x-a_\nu)\frac{dy_3}{dx} = \quad 2y_3 + y_4$$

$$(x-a_\nu)\frac{dy_n}{dx} = -\frac{g_{1n}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^n y_1 - \frac{g_{2n}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^{n-1} y_2 - \dots$$

$$\dots - \frac{g_{n-1,n}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2 y_{n-1} + [(n-1) - \frac{g_{nn}(x)}{\varphi(x)}(x-a_n)]\,y_n,$$

kde je:

$$\frac{g_{\lambda n}(x)}{\varphi(x)} = \frac{b_{\lambda n}^{(0)} + b_{\lambda n}^{(1)} x + \dots + b_{\lambda n}^{(\sigma-1)} x^{\sigma-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\sigma)}$$

$$(\lambda = 1, 2 \dots n).$$

Determinujúca rovnica tohoto systému je:

$$\begin{vmatrix} -r^{(\nu)}, & 1, & 0, & 0, & & 0, & 0 \\ 0, & 1-r^{(\nu)} & 1, & 0, & & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2-r^{(\nu)}, & 1, & & 0, & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & 0, & & n-2-r^{(\nu)}, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & & 0, & n-1-\frac{g_{nn}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} - r^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

t. j.

$$r^{(\nu)}(r^{(\nu)}-1)(r^{(\nu)}-2)\ldots$$
$$\ldots(r^{(\nu)}-n+2)\left[r^{(\nu)}-n+1+\frac{g_{nn}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}\right]=0$$

a jej korene sú:

$$0, 1, 2, \ldots n-2, \qquad n-1-\frac{g_{nn}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

Pre $n=2$ máme systém normálneho tvaru:

$$6. \quad \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{g_{1n}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2 y_1 + \left[1-\dfrac{g_{22}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]y_2 \end{cases}$$

a jeho determinujúca rovnica, patriaca k sing. bodu $x=a_\nu$ je:

$$r^{(\nu)}\left[r^{(\nu)}-1+\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}\right]=0,$$

jej korene sú:

$$r_1^{(\nu)}=0, \qquad r_2^{(\nu)}=1-\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

Adjungovaný dif. systém systému 6 je:

$$7. \quad \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{dz_1}{dx} = \dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2 z_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{dz_2}{dx} = -z_1+\left[-1+\dfrac{g_{22}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]z_2, \end{cases}$$

jeho determinujúca rovnica, patriaca k sing. bodu $x=a_\nu$ je:

$$\begin{vmatrix} -r'^{(\nu)} & 0 \\ -1 & -1+\dfrac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}-r'^{(\nu)} \end{vmatrix}=0$$

a jej korene sú zase:

$$0,\ 1-\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

Dosadíme-li $\qquad z_k=\varphi(x)\mu_k, \quad (k=1, 2),$

vtedy adjungovaný systém je:

$$8. \quad \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{d(\varphi(x)\mu_1)}{dx} = \dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2\varphi(x)\mu_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{d(\varphi(x)\mu_2)}{dx} = \\ \qquad = -\varphi(x)\mu_1+\left[-1+\dfrac{g_{22}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]\varphi(x)\mu_2 \end{cases}$$

a korene det. rovnice pre μ_k sú:

$$-1, \quad -\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}$$

a preto systém 8. v tomto tvare nemôžeme použiť pre Fuchsove relácie; avšak dajú sa tieto systémy transformovať do lin. dif. systémov stejnej triedy, definovanej Riemannom.

Vezmime

$$y_1 = u_1 \varphi^{s_\nu} x$$
$$y_2 = u_2 \varphi^{s_\nu}(x),$$

tak zo systému 6 bude

$$9. \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{du_1}{dx} = -s_\nu \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)u_1 + u_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{du_2}{dx} = -\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2 u_1 + \left[1 - \dfrac{g_{22}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu) - \right. \\ \qquad \left. - s_\nu \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right] u_2. \end{cases}$$

Determinujúca rovnica tohoto systému, patriaca k sing. bodu $x = a_\nu$ je

$$\begin{vmatrix} -s_\nu - r^{(\nu)} & 1 \\ 0 & 1 - \dfrac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} - s_\nu - r^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0$$

a jej korene sú zase:

$$-s_\nu, \qquad 1 - s_\nu - \frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

Adjungovaný lin. dif. systém systému 9. je:

$$10. \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{dv_1}{dx} = s_\nu \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)v_1 + \\ \qquad + \dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2 v_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{dv_2}{dx} = \quad -v_1 + \\ \qquad + \left[-1 + \dfrac{g_{22}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu) + s_\nu \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right] v_2 \end{cases}$$

a jeho determinujúca rovnica, patriaca k sing. bodu $x = a_\nu$, je:

$$\begin{vmatrix} s_\nu - r^{(\nu)} & 0 \\ -1 & -1 + \dfrac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} + s_\nu - r^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0,$$

jej korene sú zase:

$$s_\nu, \qquad -1+\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}+s_\nu$$

a korene pre u_1 a u_2 sú:

$$-1+s_\nu, \qquad -2+s_\nu+\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)}.$$

Chceme-li pre lin. dif. systém 9, poťažne 10 použiť Fuchsove relácie, vtedy musíme s_ν tak voliť, aby bolo:

$$0 < \text{reálna čiastka } s_\nu < 1,$$
$$1 < \quad " \quad " \quad s_\nu+\frac{g_{22}(a_\nu)}{\varphi'(a_\nu)} < 2,$$

čo sa vždy dá dosiahnuť.

III.

Vezmime ešte speciálnejší prípad, a síce, že je

$$g_{22}(x)=\frac{1}{2}\varphi(x),$$

vtedy lin. dif. systém 6 prejde do tvaru:

$$6' \quad \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{dy_1}{dx} = \qquad y_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)y_1 + \\ \qquad +\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]y_2. \end{cases}$$

Korene determinujúcej rovnice, patriacej k sing. bodu $x=a_\nu$ sú:

$$r_1^{(\nu)}=0, \quad r_2^{(\nu)}=\frac{1}{2}.$$

Dosaďme do tohoto:

$$y_1=u_1\varphi^{s_\nu}(x),$$
$$y_2=u_2\varphi^{s_\nu}(x),$$

pak je:

$$9' \quad \begin{cases} (x-a_\nu)\dfrac{du_1}{dx} = -s_\nu\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)u_1 \qquad +u_2 \\ (x-a_\nu)\dfrac{du_2}{dx} = -\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2u_1 + \\ \qquad +\left[1-\left(s_\nu+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]u_2. \end{cases}$$

Korene det. rovnice tohoto systému, patriacej k sing. bodu $x=a_\nu$ sú:

$$r_1^{(\nu)}=-s_\nu, \qquad r_2^{(\nu)}=-s_\nu+\frac{1}{2}.$$

Adjungovaný dif. systém systému 9′ je zase:

$$10'.\left\{\begin{aligned}&(x-a_\nu)\frac{dv_1}{dx}=s_\nu\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)v_1+\frac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2v_2\\&(x-a_\nu)\frac{dv_2}{dx}=\quad -v_1\quad +\\&\qquad\qquad+\left[-1+\left(s_\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]v_2,\end{aligned}\right.$$

korene det. rovnice tohoto systému, patriace k sing. bodu $x=a_\nu$ sú:

$$r'^{(\nu)}_1=s_\nu, \qquad r'^{(\nu)}_2=s_\nu-\frac{1}{2}$$

a korene pre μ_1 a μ_2 sú zase:

$$\varrho_1^{(\nu)}=-1+s_\nu, \qquad \varrho_2^{(\nu)}=-\frac{3}{2}+s_\nu$$

a tak Fuchsove relácie na lin. dif. systém 9′ môžeme vždy použiť, jestliže je:

$$\frac{1}{2}<\text{reálna čiastka } s_\nu<1;$$

a tieto sú:

$$\int_{a_\mu}^{a_\nu}dx\int_{a_\varkappa}^{a_\lambda}dz\,(u_{ik}(z))\,(U_{ik}(x,z))\,(V_{ik}(x))=$$

$$=\begin{cases}0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & \text{je-li } \mu\neq\nu\neq\varkappa\neq\lambda\neq\mu\neq\varkappa,\\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(\delta_{ik})+(A_{ik}^{(\nu)}-\delta_{ik})^{-1}\}\;.\;. & \text{„}\quad \mu\neq\nu=\varkappa\neq\lambda\neq\mu,\\ 2\pi\sqrt{-1}\,\{(2\delta_{ik})+(A_{ik}^{(\nu)}-\delta_{ik})^{-1}+\\ \qquad\qquad+(A_{ik}^{(\varkappa)}-\delta_{ik})^{-1}\}.\;. & \text{„}\quad \mu\neq\nu=\varkappa\neq\lambda=\mu.\end{cases}$$

$(i, k=1, 2)$.

Chceme-li tieto relácie použiť na pôvodný systém 6′, vtedy je:

$$\begin{matrix}(u_{ik}(x))\\(i,\,k=1,\,2)\end{matrix}=\begin{pmatrix}y_{11}\,\varphi^{-s_\nu}(x), & y_{12}\,\varphi^{-s_\nu}(x)\\ y_{21}\,\varphi^{-s_\nu}(x), & y_{22}\,\varphi^{-s}(x)\end{pmatrix}.$$

Na $(V_{ik}(x))$ zase platí, že je:

$$(\varphi(x)\;V_{ik}(x))=(u_{ik}(x))^{-1}$$

a pri tom je $\qquad \varphi(x)\;V_{ik}(x)=v_{ki}(x).$

Inak mátrix $(V_{ik}(x))$ určíme týmto spôsobom: Dosaďme do dif. systému 10′

$$v_1=(x-a_\nu)^{-1}\,\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,z_1,$$
$$v_2=(x-a_\nu)^{-\frac{1}{2}}\,\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,z_2,$$

tak je:

$$11.\begin{cases}(x-a_\nu)\dfrac{dz_1}{dx}=\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]z_1+\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2z_2,\\ (x-a_\nu)\dfrac{dz_2}{dx}=\qquad -z_1.\end{cases}$$

Systém 6' pre fundamentálny systém je:

$$\begin{cases}(x-a_\nu)\dfrac{dy_{11}}{dx}=\qquad y_{12}\\ (x-a_\nu)\dfrac{dy_{22}}{dx}=-\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2y_{21}+\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]y_{22}\end{cases}$$

a zase systém 11 po dosadení $z_{11}=w_{22}$, $z_{22}=w_{11}$, $z_{12}=-w_{21}$, $z_{21}=-w_{12}$ je

$$\begin{cases}(x-a_\nu)\dfrac{dw_{11}}{dx}=\qquad w_{12}\\ (x-a_\nu)\dfrac{dw_{22}}{dx}=-\dfrac{g_{12}(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)^2w_{21}+\left[1-\dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}(x-a_\nu)\right]w_{22}.\end{cases}$$

Tieto dva systémy sú však totožné a preto je:

$$\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12}\\ v_{21} & v_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,y_{22} & -(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,y_{21}\\ -(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,y_{12} & (x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu+\frac{1}{2}}(x)\,y_{11}\end{pmatrix}$$

a z toho zase pre ($V_{ik}(x)$ matrix ($i,k=1,2$) máme:

$$\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu-\frac{1}{2}}(x)\,y_{22} & -(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu-\frac{1}{2}}(x)\,y_{12}\\ -(x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu-\frac{1}{2}}(x)\,y_{21} & (x-a_\nu)^{-1}\varphi^{s_\nu-\frac{1}{2}}(x)\,y_{11}\end{pmatrix}$$

$U_{ik}(x,z)$ sú racionálne funkcie celistvé $\sigma-2$-ho určené z dif. systému 9' pomocou vzorcov:

$$L_{ik}(x,z)=\begin{cases}\dfrac{g_{ik}(x)-g_{ik}(z)}{x-z}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{je-li } i\neq k\\ \dfrac{g_{ik}(x)-g_{ik}(z)}{x-z}+\dfrac{\varphi(x)-\varphi(z)}{(x-z)^2}-\dfrac{\varphi'(z)}{x-z}\quad ,,\quad i=k\end{cases}$$

a konečne je:

$$(A_{ik}^{(\nu)}-\delta_{ik})^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-2\pi s_\nu\sqrt{-1}}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{-1}{e^{-2\pi s_\nu\sqrt{-1}}+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}^{-1}$$
$(i,k=1,2)$.

kde c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} sú ľubovolné konštanty, na ktoré platí, že je:

$$\begin{vmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Contribution à la théorie des relations de Fuchs des systèmes différentiels linéaires.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre l'existence de systèmes linéaires différentiels pour lesquels on peut déterminer les relations de Fuchs. Le nombre de tels systèmes est $n(\sigma+1)(n-1)-1$; ils appartiennent à une classe définie par Riemann. $\sigma+1$ est le nombre des points singuliers. Il démontre, de plus, que la condition demandant que la partie réelle des racines des équations déterminantes soit contenue entre 0 et -1, n'est pas essentielle; par fin de compte, il fait voir, en traitant le cas de $n=2$, qu'on est à même de déterminer les relations de Fuchs même dans le cas où la condition précitée n'est pas satisfaite.