Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

O ploše tečen, stanovených ke křivkám intensitním v bodech určité křivky kruhové na libovolné ploše točné. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 5, 289--297

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108840`

O ploše tečen, stanovených ke křivkám intensitním v bodech určité křivky kruhové na libovolné ploše točné.

Sepsal

Vilém Jung,

professor státní průmyslové školy v Praze.

(Dokončení.)

Budiž $\mathfrak{S}$ úhel, v němž protíná normala točné plochy její osu Z.

Můžeme tedy psáti:

$$\cos^2\mathfrak{S} = \frac{f'^2}{1+f'^2} = \frac{f'^2}{u^2},$$

jakož i

$$\nu_1 = \nu \cos\mathfrak{S}, \quad \mu_1 = \mu.$$

Protíná-li přímka P_1, (F_1) přímku $V_1 \equiv V$ v úhlu ϑ_1, (ϑ_2), platí dále:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 \,.\, \operatorname{tg}\vartheta_2 = -\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2} = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \,.\, \frac{f'^2}{u^2}$$

t. j.

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 \,.\, \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{f'^2}{ff''}. \tag{4}$$

Tečná rovina T v bodě m má rovnici:

$$(\xi - x)x + (\eta - y)y - ff'\zeta = 0$$

čili

$$\mathrm{T} \equiv (\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\sin\varphi - f'\zeta = 0. \tag{5}$$

Přímka P jest průsečnicí tečné roviny T s rovinou U, která prochází bodem m rovnoběžně se směrem S a stojí kolmo na rovině T.

Platí tedy:

$$\begin{aligned} U \equiv A(\xi - x) + B(\eta - y) + C\zeta &= 0 \\ Aa + B\theta + C = 0,&\quad U \parallel S, \\ A\cos\varphi + B\sin\varphi - Cf' = 0,&\quad U \perp T, \end{aligned}$$

proto
$$\frac{A}{-\sin\varphi} = \frac{B}{\cos\varphi + af'} = \frac{C}{a\sin\varphi},$$

tak že

$$(6)\quad U \equiv -(\xi - x)\sin\varphi + (\eta - y)(\cos\varphi + af') + \zeta a \sin\varphi = 0.$$

Abychom obdrželi rovnici přímky P_1, musíme z rovnic (5) a (6) vyloučiti veličinu ζ.

Nazveme-li úhel, jejž svírá přímka P_1 s osou X, ω_1, můžeme psáti:

$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{-a\cos\varphi\sin\varphi + f'\,.\,\sin\varphi}{f'\cos\varphi + af'^2 + a\sin^2\varphi}.$$

Přímka $V \equiv V_1$, dotýkající se v bodě m kružnice K, má rovnici:

$$\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi = f.$$

Znamená-li $\sphericalangle(V, X) = \tau$, platí

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Znamená-li dále $\sphericalangle(F_1, X) = \omega_2$, a jsou-li ξ, η, ζ souřadnicemi libovolného bodu přímky F, můžeme psáti:

$$\operatorname{tg}\omega_2 = \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{\eta - f\,.\,\sin\varphi}{\xi - f\,.\,\cos\varphi}.$$

Dále jest patrno, že

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \operatorname{tg}(\omega_1 - \tau) = \frac{\operatorname{tg}\omega_1 - \operatorname{tg}\tau}{1 + \operatorname{tg}\omega_1 \operatorname{tg}\tau},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \operatorname{tg}(\omega_2 - \tau) = \frac{\operatorname{tg}\omega_2 - \operatorname{tg}\tau}{1 + \operatorname{tg}\omega_2 \operatorname{tg}\tau}.$$

Dosadíme-li do těchto vzorců místo $\operatorname{tg}\omega_1$, $\operatorname{tg}\omega_2$, $\operatorname{tg}\tau$ příslušné hodnoty, obdržíme po krátké redukci:

$$(7)\ \operatorname{tg}\vartheta_1 \, . \, \operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{(1+af' \, . \cos\varphi)f'}{a(1+f'^2)\sin\varphi} \, . \, \frac{\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi-f}{\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi}$$
$$= \frac{f'^2}{ff''} \, .$$

Rovnice (7) spojena s rovnicí (5) určuje polohu tečné přímky F.

Dosadíme-li do rovnice (5) hodnoty $x = f \, . \cos\varphi$, $y = f \, . \sin\varphi$, obdržíme

$$(5') \qquad \mathrm{T} \equiv \xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi-f-f' \, . \, \zeta = 0.$$

Rovnice (7) promění se následkem relací:

$$\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi-f = f' \, . \, \zeta$$

a

$$\begin{aligned}\sin\varphi(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi) &= \xi\sin^2\varphi-\eta\sin\varphi\cos\varphi\\ &= \xi\sin^2\varphi-(f+f' \, . \, \zeta-\xi\cos\varphi)\cos\varphi\\ &= \xi-(f+f' \, . \, \zeta)\cos\varphi,\end{aligned}$$

v rovnici:

$$(7') \qquad \frac{(1+af' \, . \cos\varphi)\zeta}{a(1+f'^2)(\xi-[f+f' \, . \, \zeta]\cos\varphi)} = \frac{1}{ff''} \, .$$

Rovnice (5') a (7') stanoví tečnu F, sestrojenou v bodě m ku křivce intensitní J.

Vyloučíme-li z rovnic (5'), (7') a z rovnice

$$(8) \qquad \cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1,$$

veličiny $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, obdržíme rovnici hledané plochy, která jest obecně plochou zborcenou.

2. Položíme-li

$$\begin{aligned} af(1+f'^2)+af'(1+ff''+f'^2)\zeta &= P,\\ a(1+f'^2)\xi-ff'' \, . \, \zeta &= Q,\\ f+f' \, . \, \zeta &= R,\end{aligned}$$

můžeme rovnice (5'), (7'), (8) předešlého odstavce psáti ve tvaru:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & P\cos\varphi &= Q,\\ &(\mathrm{II}) & \xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi &= R,\\ &(\mathrm{III}) & \cos^2\varphi+\sin^2\varphi &= 1.\end{aligned}$$

Z těchto plyne vyloučením veličin $\cos\varphi$, $\sin\varphi$

(IV) $$\eta^2 Q^2 + (PR - \xi Q)^2 = \eta^2 P^2$$

jakožto rovnice hledané plochy.

Tato rovnice jest 4. stupně, neboť výrazy P, R jsou linearnými funkcemi veličiny ζ a výraz Q linearnou funkcí veličin ξ a ζ; mimo to jest ohledně η souměrnou.

Znamená tedy zborcenou plochu 4. stupně orthog. souměrnou ohledně roviny $(ZX) \| S$. Stanovme rovinný řez L této plochy s rovinou $\eta = 0$.

Z (IV) plyne pro $\eta = 0$

(V) $$(PR - \xi Q)^2 = 0;$$

tato rovnice znamená, že rovinným řezem L jest kuželosečka, kterou nutno považovati za *dvojnou křivku* plochy.

Řez této plochy s rovinou

$$(\mathrm{I}) \equiv P\cos\varphi - Q = 0$$

má rovnici

$$\eta^2 P^2 \cos^2\varphi + (PR - \xi P\cos\varphi)^2 = \eta^2 P^2$$

t. j.

(VI) $$P^2 = 0,$$

(VII) $$\eta^2 \sin^2\varphi = (R - \xi\cos\varphi)^2.$$

Rovnice (VII) spojena s rovnicí (I) znamená dvě povrchové přímky plochy, t. j. dvě tečny k jistým intens. křivkám plochy točné.

Rovnice (VI) spojena s rovnicí (I) znamená přímku U*) kolmou k rovině (ZX).

Tato přímka jest *dvojnou přímkou* hledané plochy.

Zároveň jest patrno, že *dvojná přímka* U protíná *dvojnou kuželosečku* L v určitém bodě, neboť hodnoty $P = 0$, $Q = 0$ vyhovují rovnici (V).**)

---

*) Z rovnice (IV) vysvítá, že přímka U v hledané ploše leží, neboť hodnoty $P = 0$, $Q = 0$ vyhovují rovnici (IV).

**) Dvojnou křivku plochy tvoří tedy kuželosečka L a přímka U, jež se v jednom bodě protínají. Tato dvojná křivka má s každou povrchovou přímkou plochy $(4 - 2) = 2$ body společné; v bodech této křivky má plocha obecně *dvě různé* roviny tečné.

Řez s rovinou (XY) obdržíme ze (IV), položíme-li $\zeta = 0$ t. j.

$$\eta^2\xi^2 + (f^2 - \xi^2)^2 = \eta^2 f^2,$$

z toho plyne

$$f^2 - \xi^2 = 0 \quad \text{čili} \quad \xi = \pm f,$$

kterážto rovnice znamená dvě s osou Y rovnoběžné přímky v rovině (XY) t. j. dvě tečny ve vrcholech jistých intens. křivek plochy točné; jakož i

$$\xi^2 + \eta^2 = f^2,$$

jež znamená povrchovou kružnici K.

Jest tedy hledaná plocha stanovena následujícími *řídícími útvary*:

a) kruhovou křivkou K v rovině (XY),

b) kuželosečkou L v rovině (ZX),

c) přímkou U, kolmou k rovině (ZX).

Řidící křivky K a L mají *dva body společné*; přímka U protíná kuželosečku L *v jednom bodě.*

Kuželosečka L a přímka U jsou *dvojnými* útvary, kružnice K *jednoduchým* útvarem plochy hledané.

K těmže výsledkům dospějeme krátce bez užití rovnice (IV) takto:

Rovnice (I) znamená svazek rovinový 1. třídy, jehož osa jest stanovena rovnicemi $P = 0$, $Q = 0$. Rovnice (II) znamená rovinový svazek 2. třídy, jehož roviny dotýkají se kuželové plochy točné, opsané dle povrchové kružnice K ploše točné.

Povrchovými přímkami hledané plochy jsou průsečnice sdružených rovin obou svazků rovinových.*)

Proto se nalézá osa U rovinového svazku 1. třídy na hledané ploše.

Rovinný řez plochy s rovinou (ZX) obdržíme, dosadíme-li do rovnic (I) a (II) hodnotu $\eta = 0$, t. j.

---

*) Každé rovině svazku 1. třídy příslušejí dvě ohledně roviny $(ZX) \,||\, S$ souměrně položené roviny svazku 2. třídy. Oba svazky rovinové nalézají se v souvislosti jednodvojznačné; souměrnost, vyskytující se ve svazku 2. třídy, jest zvláštním případem involuce 2. stupně.

$$(\mathrm{I}') \qquad P \cos \varphi = Q,$$
$$(\mathrm{II}') \qquad \xi \cos \varphi = R.$$

Tyto dvě rovnice znamenají dva projektivné svazky paprskové v rovině $\eta = 0$; výtvorem jich jest kuželosečka L, jež prochází oběma středy těchto svazků, z té příčiny protíná osa U kuželosečku L v jednom bodě.

Jest tedy hledaná plocha stanovena *kružnicí K, kuželosečkou L* a *přímkou U.* Obě řídící křivky K, L mají dva body společné a přímka U protíná kuželosečku L v jediném bodě. Stupeň plochy obdržíme dle známé zásady, totiž

$$n = 2(2 \,.\, 2 \,.\, 1) - 1 \,.\, 2 - 2 \,.\, 1 = 4.$$

Kružnice K jest $2 \,.\, 1 - 1 = 1$duchým, kuželosečka L $2 \,.\, 1 = 2$násobným a přímka U $2 \,.\, 2 - 2 = 2$násobným útvarem plochy.

Tato plocha jest zvláštním případem *zborcené plochy 4. stupně*, určené *dvěma* kuželosečkami K, L, jež mají *dva* body společné, a přímkou U, jež protíná jednu z kuželoseček na př. L v jediném bodě.

Svazek rovin, jehož osou jest *dvojná přímka* U plochy, stanoví ve *dvojné kuželosečce L jednoduchou* řadu bodovou a v *jednoduché kuželosečce K involutorní* řadu 2. stupně. Tyto dvě řady bodové jsou v souvislosti jednodvojznačné a mají dva prvky společné, jež se obecně různí od *samodružných* prvků řady involutorní. Tyto samodružné prvky jsou buď *dva různé realné* aneb *pomyslné*, neboť pro případ, že se oba samodružné prvky ztotožní, přejde zmíněná plocha v plochu 2. stupně.

Jsou-li samodružné prvky involutorní řady *realné*, jsou s nimi *dva* body jednoduché řady ve dvojné kuželosečce L združeny; v každém z těchto dvou bodů protínají se dvě *soumezné* povrchové přímky plochy, dvojná křivka má v nich karaktér křivky vratu, jsou tedy *cuspidalními* body plochy; tato má dle povrchových přímek jim příslušných rozvinutelné elementy. Při ploše tuto vyšetřované ztotožňují se body společné křivkám K a L se samodružnými prvky involuce v křivce K, tak že jsou *cuspidalními body* plochy. Řadě bodové *ve dvojné přímce U* přísluší soustava kuželových ploch 2. stupně, jež mají *dvojnou kuželosečku L* za společnou řídící křivku.

Rovinným řezem této soustavy kuželových ploch s rovinou *jednoduché* kuželosečky K jest soustava kuželoseček, jež procházejí *dvěma body* a sice oběma průsečíky kuželoseček K, L plochy; mimo to se všechny dotýkají jisté přímky v určitém bodě, mají tedy 4 body společné a tvoří involuci 2. stupně.

Dvojná přímka U plochy jest společnou povrchovou přímkou kuželových ploch; dle této mají kuž. plochy společnou rovinu tečnou, stanovenou *dvojnou přímkou* a tečnou ke *dvojné kuželosečce* L, sestrojenou v průsečíku jejím s dvojnou přímkou plochy. Soustava kuželoseček stanoví v *jednoduché* kuželosečce K, jež oněmi dvěma body prochází, involutorní řadu bodovou 2. stupně.

Každému bodu *dvojné* přímky U příslušejí *dva body* involutorní řady v jednoduché kuželosečce K. Má-li tato involuce *dva realné samodružné prvky*, nalézají se na *dvojné přímce* dva *cuspidalní body* plochy.

Cuspidalní body*) hledané plochy možno analyticky následujícím způsobem nalézti.

Budiž dána zborcená plocha rovnicemi

$$A \equiv A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 = 0,$$
$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0,$$

při čemž A_k, a_k jsou funkcemi parametru φ.

Znamenejž dále

$$A'_k = \frac{dA_k}{d\varphi}, \quad a'_k = \frac{da_k}{d\varphi}.$$

Cuspidalní body plochy zborcené jsou dány rovnicemi

$$A = 0, \; a = 0, \; A' = 0, \; a' = 0.$$

Znamenejme dále

$$p = a(1 + f'^2), \; q = ff', \; n = af'(1 + ff'' + f'^2),$$

potom platí pro rozvinutelné elementy plochy následující rovnice:

*) Viz mé pojednání: *„Několik analyt. studií o plochách zborcených"* v tomto časopise. Zborcená plocha n-tého stupně má obecně $(2n - 4)$ cuspidalních bodů; zborcená plocha 4. stupně tedy 4 cusp. body.

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad p\xi - (q + n\cos\varphi)\zeta - pf\,.\,\cos\varphi = 0,\\
&(2) \qquad \cos\varphi\,.\,\xi + \sin\varphi\,.\,\eta - f'\,.\,\zeta - f = 0,\\
&(3) \qquad n\sin\varphi\,.\,\zeta + pf\,.\,\sin\varphi = 0,\\
&(4) \qquad -\sin\varphi\,.\,\xi + \cos\varphi\,.\,\eta = 0.
\end{aligned}
$$

Této soustavě se vyhoví hodnotou $\sin\varphi = 0$, čemuž přísluší $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, tak že $\cos\varphi_1 = 1$, $\cos\varphi_2 = -1$.

Ze (4) pak plyne $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$.

Z rovnice (1) a (2) obdržíme:

$$p\xi - (q \pm n)\zeta = \pm pf, \qquad \pm\xi - f'\zeta = f.$$

Těmto rovnicím vyhovují hodnoty

$$\zeta_1 = 0, \quad \xi_1 = f; \quad \zeta_2 = 0, \quad \xi = -f.$$

Tomuto řešení příslušejí 2 cuspidalní body ($\xi_1 = +f$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$) a ($\xi_2 = -f$, $\eta_2 = 0$, $\zeta_2 = 0$).

Druhé řešení podává pro veličinu φ obecně dvě takové hodnoty, že $\sin\varphi \gtrless 0$; z té příčiny možno rovnici (3) veličinou $\sin\varphi$ krátiti, čímž obdržíme:

$$pf + n\zeta \equiv P = 0.$$

Z rovnice $(1) \equiv Q - P\cos\varphi = 0$ plyne $Q = 0$.

Z té příčiny nalezají se příslušné cusp. body na dvojné přímce U, určené rovnicemi $P = 0$, $Q = 0$.

Souřadnice těchto cusp. bodů obdržíme

z (3) $$\zeta = -\frac{pf}{n},$$

z (1) $$\xi = \frac{q}{p}\zeta = -\frac{qf}{n},$$

a z (4) $$\eta = \xi\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice (2) se podává:

$$\cos\varphi = \frac{\xi}{f'\,.\,\zeta + f} = -\frac{1}{af'}.$$

Proto obdržíme

$$\eta = \pm\frac{qf}{n}\sqrt{a^2f'^2 - 1}.$$

Tomuto řešení příslušejí dva $\begin{Bmatrix}\text{realné}\\ \text{pomyslné}\end{Bmatrix}$ body cuspidalní, když $\begin{Bmatrix} a^2f'^2 > 1 \\ a^2f'^2 < 1 \end{Bmatrix}$.

Jest-li $af' = \pm 1$, ztotožní se oba body cusp., neboť $\eta = 0$.

Dodatek. Pro *bod obratu merid. křivky* platí $f'' = 0$, a veškeré body příslušné povrchové kružnice K jsou parabolickými body plochy točné. Určité dvě intensitní křivky plochy točné mají v průsečících křivky K s meridianovou rovinou, rovnoběžnou se směrem S, vrcholy, jež jsou pro tento případ *body vratu* zmíněných intens. křivek, tak že v každém z těchto dvou bodů existuje svazek tečných přímek v rovině tečné.

Z té příčiny *rozpadá* se hledaná plocha na *dvě roviny tečné* a na *točnou plochu kuželovou*, opsanou dle povrchové kružnice K ploše točné.

To se dá také analyticky dokázati, neboť pro $f'' = 0$ obdržíme

$$P = a(1+f'^2)(f+f'.\zeta) = a(1+f'^2).R,$$
$$Q = a(1+f'^2)\xi,$$
$$R = f+f'.\zeta.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (IV) a krátíme-li veličinou $a^2(1+f'^2)^2$, obdržíme

$$[R^2-\xi^2]^2 = \eta^2[R^2-\xi^2],$$

t. j.

$$R^2-\xi^2 = 0 \text{ čili } \xi = \pm(f+f'.\zeta),$$

což znamená dvě tečné roviny, dotýkající se točné plochy v bodech $(\pm f, 0, 0.)$; jakož i

$$\eta^2+\xi^2 = R^2 = (f+f'.\zeta)^2,$$

což znamená točnou plochu kuželovou, opsanou dle povrchové kružnice K ploše točné.