Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 5, 334--352

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108839

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1893

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

zavěsil dvě pozlátka a pověsil do skleněné vhodné nádoby a rovněž tak sestrojil druhý jednoduchý elektroskop s tyčinkou skleněnou.

Ukázalo se, že elektroskop s křemenovou isolací ani tehdy náboje svého neztrácel, když nalézal se v atmosfeře úplně prosycené vodními parami, kdežto elektroskop druhý v tomto případě v několika vteřinách úplně svůj náboj ztratil. Tato vlastnosť, že podržuje křemen velmi houževnatě stav elektrický, jest příčinou, proč nyní neužívá se křemene při hotovení závaží jemných, ač by to byl material nad jiné vhodný.

5. Ke konci poukázati dlužno ještě k jedné vlastnosti křemenu. *Boysovi* podařilo se zpracovati tento material i pro chemické potřeby ve tvar rour, malých nádob a t. d., které mají všechny význačné vlastnosti nádob skleněných, tak že je lze stejným způsobem spracovati. Předností jejich však jest, jak aspoň udává *B.*, že nepůsobí na stěny jejich rušivě ani nejmocnější sloučeniny chemické a že snesou temperaturu tak značnou, při níž i platina počíná se taviti, aniž by snad při tom svůj *tvar* měnily. Mimo to vyloučena jest zde téměř možnosť, aby při náhlém zahřátí nebo ochlazení takové nádoby praskly.

Řešení úloh.

Úloha 23.

Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, dán-li poloměr r kružnice opsané i poloměr ϱ kružnice vepsané. Který z těchto trojúhelníků má při daném r největší ϱ, který při daném ϱ nejmenší r?

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Hájíček,* učitel v Grygově u Olomouce.)

Buď ABC žádaný trojúhelník, $CD = v$ výška jeho. Je-li O střed kružnice opsané, S střed kružnice vepsané, jest

$$OA = OB = OC = r,$$

$$SD = SE = SF = \varrho,$$
$$SE \perp AC, \qquad SF \perp BC.$$

Dále jest

$$\overline{AC}^2 = 2rv, \quad \overline{AD}^2 = v\,(2r - v)$$

a poněvadž z podobnosti trojúhelníků $\triangle ACD \sim \triangle CES$ plyne

$$CS : ES = AC : AD,$$

obdržíme úměru

$$(v - \varrho) : \varrho = \sqrt{2rv} : \sqrt{v\,(2r - v)}.$$

Odtud vznikne rovnice kvadratická

$$v^2 - 2\,(r + \varrho)\,v + \varrho\,(4r + \varrho) = 0,$$

z níž vypočítáme

$$v = r + \varrho \pm \sqrt{r\,(r - 2\varrho)}.$$

Výrazem tím podává se samo sebou sestrojení výšky v a tím i trojúhelníka žádaného. Zároveň vysvítá z výrazu toho, že při daném $\begin{matrix} r \\ \varrho \end{matrix}$ nabývá $\begin{matrix} \varrho \text{ maxima } \varrho = \frac{1}{2}r. \\ r \text{ minima } r = 2\varrho. \end{matrix}$ V obou případech vzniká trojúhelník rovnostranný.

Úloha 24.

Jak velký úhel α musí uzavírati osa c šikmého válce s jeho elliptickou základnou, jejíž osy jsou $2a$, a, aby průsek s rovinou normálnou byl kruh? Jak velký jest pak povrch válce?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Langr,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové).

Poloměr normálního průseku kruhového jest $\frac{a}{2}$. Úhel α nachází se v pravoúhlém trojúhelníku, jehož přeponou jest velká poloosa ellipsy a, odvěsna proti α ležící jest $\frac{a}{2}$. Jest tedy

$$\sin\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \text{tudíž} \quad \alpha = 30^0.$$

Povrch válce jest pak

$$P = 2\pi a \,.\, \frac{a}{2} + 2\pi \frac{a}{2} \,.\, c = \pi a\,(a + c).$$

Úloha 25.

Základnou komolého kužele jest kuželosečka daná rovnicí

$$r = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \cos\varphi}$$

a jeho výška $v = 6$. Jak velký jest obsah jehlanu vepsaného do tohoto kužele, je-li základnou jeho čtverec?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Pithardt*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Danou rovnici lze uvésti na tvar

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

kdež

$$p = \sqrt{3}; \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rovnice značí ellipsu.

Jelikož

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}, \quad e^2 = a^2 - b^2,$$

jsou poloosy ellipsy

$$a = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{6}$$

a tedy rovnice její

$$x^2 + 2y^2 = 12.$$

Položíme-li $x = y$, obdržíme souřadnice vrcholu vepsaného čtverce $x = \pm 2$. Obsah jehlanu čtvercového o dané výšce jest pak

$$J = 4x^2 . \frac{v}{3} = 32.$$

Úloha 26.

Drát ohnutý do pravého úhlu visí v rovnováze, zavěšen jsa za vrchol. Spojíme-li konce drátu přímkou, obdržíme trojúhelník o kosých úhlech α, β. Jaké úhly x, y tvoří ramena drátu s obzorem?

Řešení. (Zaslal p. *Jan Matoušek*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.)

Znamenají-li A, B váhy ramen a, b, ležících proti úhlům α, β, bude za rovnováhy

$$A \frac{a}{2} \cos x = B \frac{b}{2} \cos y,$$

a že $y = 90^0 - x$, jest

$$Aa \cos x = Bb \sin x;$$

tedy

$$\operatorname{tg} x = \frac{Aa}{Bb}.$$

Pro

$$A : B = a : b$$

jest

$$\operatorname{tg} x = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\operatorname{tg} \alpha)^2$$

a

$$\operatorname{tg} y = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\operatorname{tg} \beta)^2.$$

Úloha 27.

Proud řeky hnal by plachtovou lodici silou P, kdyby působil kolmo na její stranu; proud pak větru, dujícího směrem protivným kolmo na plachtu, hnal by lodici silou V. Dáme-li plachtu kolmo k délce lodě, jak velký úhel α musí délka lodi svírati s proudem řeky, aby loď plula kolmo přes proud řeky, a jakou silou S bude hnána ku břehu?

Řešení. (Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Svírá-li délka lodice s proudem řeky úhel α, bude složka P_1 síly P, kolmá na lodici,

$$P_1 = P \sin \alpha,$$

kdežto složka $P \cos \alpha$ zůstane bez účinku na loď.

Síla P_1 rozpadá se na složku

$$P_2 = P_1 \sin \alpha = P \sin \alpha^2,$$

účinkující směrem proudu, a na složku

$$P_3 = P_1 \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha,$$

působící na loď kolmo přes proud řeky.

Proud větru bude svírati s plachtou úhel $(90^0 - \alpha)$, bude tedy tlačiti kolmo na plachtu silou

$$V_1 = V \cos \alpha$$

a odcházeti bez účinku podél plachty silou $V \sin \alpha$.

Síla V_1 dá směrem větru složku

$$V_2 = V_1 \cos \alpha = V \cos \alpha^2,$$

a kolmo na proud větru složku

$$V_3 = V_1 \sin \alpha = V \sin \alpha \cos \alpha.$$

Aby lodice byla hnána kolmo přes proud vody, musí

$$P \sin \alpha^2 = V \cos \alpha^2;$$

tedy musí úhel α vyhověti rovnici

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{V}{P}}.$$

Lodice pak bude hnána silou

$$S = P_3 + V_3 = (P + V) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dosadíme-li zde

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}} = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{P+V}} \text{ a } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P+V}},$$

shledáme, že

$$S = \sqrt{PV}.$$

Úloha 28.

Kterou hodnotu musí míti prostý člen p v rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 23x + p = 0,$$

aby kořeny její tvořily řadu arithmetickou a které jsou pak tyto kořeny?

Řešení. (Zaslal p. *Václav Bubeník*, stud. VI. tř. české r. v Praze.)

Kořeny dané rovnice buďtež $u - v$, u, $u + v$, dle známých vlastností součinitelů v rovnici jest

$$u - v + u + u + v = 9,$$
$$(u - v)\,u + u\,(u + v) + (u + v)\,(u - v) = 23,$$
$$(u - v)\,u\,(u + v) = -p$$

čili

$$3u = 9, \quad 3u^2 - v^2 = 23,$$
$$u\,(u^2 - v^2) = -p.$$

Odtud vypočítáme $v = 3$, $v = 2$, $p = -15$. Jest tedy žádaná rovnice

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

a kořeny její 1, 3, 5.

Úloha 29.

Čísly racionálnými řešiti rovnici

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 2 & y & 4 \\ x & 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 4 \\ x & y & x \\ 4 & x & 2 \end{vmatrix}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Skála*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.)

Vyčíslíme-li determinanty, objeví se daná rovnice v podobě

$$3y - x = x^2,$$

z níž

$$y = \frac{x(x+1)}{3}.$$

Pro libovolné racionálné x bude též y racionálným. Řešíme-li však rovnici dle x, najdeme

$$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+12y});$$

položíme-li

$$\sqrt{1+12y} = 1 + ty,$$

ustanovíme

$$y = \frac{2(6-t)}{t^2}$$

a k tomu

$$x = \frac{6-t}{t} \quad \text{aneb} \quad x = -\frac{6}{t}.$$

Chceme-li míti řešení čísly celými, položme

$$x = 3u \quad \text{aneb} \quad x = 3u - 1,$$

načež

$$y = u(3u+1) \quad \text{aneb} \quad y = u(3u-1).$$

Úloha 30.

Dvě osoby A a B vydají se současně na cestu týmž směrem z míst od sebe 60 *km* vzdálených. A urazí první den 40 *km* a každý následující den o 3 *km* méně; B pak urazí první den 30 *km* a každý den následující o 2 *km* více. Za kolik dní

dohoní B osobu A? Za kolik dní budou od sebe nejvíce vzdáleny, a která jest tato vzdálenost.

Řešení. (Zaslal p. *Stanislav Mdra*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Dohoní-li B osobu A za x dní, jest řešiti rovnici

$$[30+30+(x-1)2]\frac{x}{2}=[40+40-(x-1)3]\frac{x}{2}+60,$$

z čehož plyne

$$x^2-5x-24=0;$$

proto $x=8$. B dohoní A za 8 dní.

Největší vzdálenost m mezi A a B bude za y dní:

$$m=60+[80-(y-1)3]\frac{y}{2}-[60+(y-1)2]\frac{y}{2}$$

aneb

$$5y^2-25y-2(60-m)=0,$$

z čehož plyne

$$m=75\frac{5}{8}\,km,\quad y=2\frac{1}{2}\text{ dne.}$$

Úloha 31.

Vedeme-li dvěma sousedními vrcholy n úhelníka všechny úhlopříčky, rozdělí se tento na

$$\tfrac{1}{2}(n^2-n-4)$$

části (dílem trojúhelníky, dílem čtyrúhelníky). Podati toho důkaz.

Řešení. (Zaslal p. *Emil Rynda*, stud. VI. tř. české realky v Praze.)

Mějme n-úhelník $a_1a_2a_3\ldots a_4$ s úhly vesměs dutými. Vrcholem a_1 veďme všechny úhlopříčky, jimiž dělí se mnohoúhelník v $n-2$ trojúhelníky. Každý z těchto trojúhelníků rozpadne se v několik částí, vedeme-li ještě úhlopříčky z vrcholu a_n sousedního ku a_1. Zejmena rozložíme tak

trojúhelník	$a_1a_1a_3$	ve	2	části,
"	$a_1a_3a_4$	"	3	"
"	$a_1a_4a_5$	"	4	"
	$\vdots$		$\vdots$	
"	$a_1a_{n-2}a_{n-1}$	"	$n-2$	"
"	$a_1a_{n-1}a_n$	"	$n-2$	"

Celý n-úhelník jest tak rozdělen na

$$x = 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-2)$$

částí, jest pak

$$x = \frac{(n-3)(2+n-2)}{2} + n - 2$$

čili

$$x = \frac{1}{2}(n^2 - n - 4).$$

Úloha 32.

Sestrojiti trojúhelník ABC, dána-li pata V výšky na AB, průsečík U strany AB s příčkou půlící úhel ACB a střed O kružnice o trojúhelník opsané.

Řešení. (Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Základna AB hledaného trojúhelníka ABC bude procházeti body V a U, čímž dán také směr jeho výšky CV. Vedeme-li z temene C průměr kružnice opsané kolem trojúhelníka ABC, až protne její obvod v bodě G, pak AG, a prodloužíme-li výšku CV, až ku průsečíku H s kružnicí, bude

$$\sphericalangle ACH = \sphericalangle BAG,$$

poněvadž $CH \perp AB$ a $AG \perp AC$; tedy je také

$$\sphericalangle ACH = \sphericalangle BCG.$$

Má-li tudíž přímka CU půliti úhel ACB, musí také půliti úhel VCO.

Spustíme-li tedy z O kolmici na CU, až protne výšku CV v D, obdržíme rovnoramenný trojúhelník DOU o základně

DO, jehož prodloužená výška UE protne výšku CV v temeni C hledaného trojúhelníka.

Sestrojme tudíž kolem U kružnici o poloměru UO. Tato protne prodlouženou výšku CV v bodech D a D′; spusťme pak UE $\perp$ DO, neb UE′ $\perp$ OD′. Průsečíkem C neb C′ prodloužených těchto kolmic se směrem výšky CV najdeme vrchol trojúhelníka. Opíšeme-li konečně kolem O kružnici o poloměru OC neb OC′, omezíme jejím obvodem stranu AB trojúhelníka ABC neb stranu A′B′ druhého trojúhelníka A′B′C′.

Podmínka:

$$VU \leqq OU.$$

Úloha 33.

V přímce X dány body o, a, b; bodem o veden libovolný paprsek P a k bodu a stanoven dle P souměrně sdružený bod a'. Které jest geometrické místo průsečíku p paprsku P se spojnicí $a'b$?

Řešení. (Zaslal p. *Boh. Zvěřina*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

Sestrojíme-li k bodům a, b dle paprsku P souměrně sdružené body a', b', stanoví kolmice aa', bb' v přímce P body m, n a bod p jest průsečíkem spojnic ba', ab'. Budiž v X bod c tak ustanoven, že jest $cp \perp$ P. Příčka cp půlí v trojúhelníku abp úhel při p, protož

$$ac : cb = ap : bp.$$

Jest však také

$$ap : bp = am : bn = oa : ob,$$

tudíž

$$ac : cb = oa : ob.$$

Píšeme-li krátce

$$\overline{oa} = a, \quad \overline{ob} = b, \quad \overline{oc} = x,$$

bude

$$(x - a) : (b - x) = a : b$$

čili

$$x = \frac{2ab}{a+b}.$$

Poloha bodu c nezávisí tudíž na poloze paprsku P, bod c jest bod harmonicky sdružený s o vzhledem ku a, b. Geometrické místo bodu p jest totožné s geometrickým místem pat kolmic spuštěných s bodu c na paprsky svazku o; t. j. geometrické místo bodu p jest kružnice na průměru $\overline{oc}$. Průměr ten jest harmonickým průměrem délek oa, ob.

Úloha 34.

Do pravidelného čtyrstěnu vepsána jest koule a směrem ku všem vrcholům opět a opět vepsány jsou koule tak, že každá tří stěn čtyrstěnu a předešlé koule se dotýká. Budiž určen součet všech koulí, jež takto čtyrstěn vyplňují.

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Doležal,* stud. VII. tř. real. v Pardubicích.)

Poloměr r koule do čtyrstěnu hrany a vepsané rovná se $\frac{1}{4}$ výšky jeho $v = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; proto obsah koule

$$K = \frac{\pi a^3}{72}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vedeme-li tečnou rovinu ke kouli rovnoběžně se základnou, půlí se jí výška i hrany; proto koule do čtyrstěnu tečnou rovinou uťatého jest osminou obsahu koule předešlé atd. Dle toho jest tedy součet všech koulí

$$S = \frac{\pi a^3}{72}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[1 + 4\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \dots\right)\right],$$

$$S = \frac{11\pi a^3}{504}\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Úloha 35.

Úhlopříčna rovnoběžnostěnu pravoúhlého $= 5\sqrt{2}$, povrch $= 94$, obsah $= 60$; určiti hrany.

Řešení. (Zaslal p. *Vincenc Sura*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Z daných podmínek plynou rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 50\,,$$
$$2xy + 2xz + 2yz = 94\,,$$
$$xyz = 60\,.$$

Sečtením prvních dvou obdržíme

$$(x+y)^2 + 2z(x+y) - (144 - z^2) = 0\,,$$
$$x + y = -z + 12.$$

Z druhé rovnice

$$xy = 47 - z(x+y) = 47 - z(12 - z)\,,$$

což dosazeno do rovnice třetí, dá

$$z^3 - 12z^2 + 47z - 60 = 0$$
$$(z-3)(z-4)(z-5) = 0\,.$$

Kořeny rovnice této určují hrany rovnoběžnostěnu daného.

Úloha 36.

V kolmém kruhovém kuželi jest zvětšiti poloměr a zmenšiti výšku tak, aby se tím nezměnil ani povrch ani obsah kužele.

Řešení. (Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

V kuželi daném označme poloměr r, výšku v, stranu s; v žádaném kuželi buď poloměr x, výška y. Úloha daná vyžaduje pak, aby se vyhovělo rovnicím

$$x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = r^2 + rs\,,$$
$$x^2 y = r^2 v\,.$$

Vyloučivše x obdržíme po snadné úpravě rovnici

$$vy^2 - (r+s)^2 y + 2rv(r+s) = 0,$$

ze které, hledíce ku vztahu

$$r^2 + v^2 = s^2,$$

vypočítáme

$$y = \frac{r+s}{2v}\,[r+s \pm (3r - s)]$$

čili

$$y_1 = \frac{2r(r+s)}{r} = 2r\sqrt{\frac{s+r}{s-r}}, \quad y_2 = v;$$

k tomu sluší

$$x_1 = \sqrt{\frac{r}{2}(s-r)}, \quad x_2 = r.$$

Hodnoty x_2, y_2 jsou rozměry kužele daného; x_1, y_1 náleží kuželi novému. Má-li býti $x_1 > r$, $y_1 < v$, jak úloha žádá, musí splněna býti podmínka

$$s > 3r.$$

Poloměr základny kužele daného jest pak prodloužiti o $x_1 - r$ a výšku zkrátiti o $v - y_1$, aby povrch i obsah zůstal nezměněn.

Úloha 37.

Rovnice přímek P, Q, R jsou:

$$\begin{aligned} P &\equiv y = 0 \\ Q &\equiv 4y + 3x - 24 = 0 \\ R &\equiv y - 3x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Vyhledati jest na přímce P bod m, aby paty kolmic, které jsou z něho spuštěny na přímky Q a R byly na přímce, která jest rovnoběžná s přímkou $S \equiv 7x - 24y = 0$.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Hösch*, stud. VII. tř. česk. gymn. v Budějovicích).

Hledaný bod m měj souřadnice ξ, $\eta = 0$. Kolmice jím ku přímkám Q, R vedené mají rovnice

$$Q_1 \equiv y - \frac{4}{3}(x - \xi) = 0,$$

$$R_1 \equiv y + \frac{1}{3}(x - \xi) = 0;$$

paty kolmic těch buďtež

$$q(x_1, y_1), \quad r(x_2, y_2).$$

Souřadnice bodů těchto obdržíme hodnotami

$$x_1 = \frac{72 + 16\xi}{25}, \quad y_1 = \frac{96 - 12\xi}{25}$$

$$x_2 = \frac{\xi - 18}{10}, \quad y_2 = \frac{3\xi + 16}{10}.$$

Má-li pak býti $\overline{qr} \parallel$ S, musí býti

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{7}{24},$$

z čehož po dosazení hořejších hodnot plyne

$$\xi = 2.$$

Úloha 38.

Dány jsou osy X $\perp$ Y, v ose X body a, b a bodem a přímka T $\parallel$ Y. Vedeme-li kterýmkoli bodem k osy Y přímku M $\parallel$ X a přeneseme-li na ni délku $km = km' = kl$, kdež l jest průsečík přímky T se spojnicí bk, jest geom. místo bodů m, m' hyperbola. Je-li n průsečík osy Y s přímkou $bn \perp bk$, jest mn tečnou hyperboly v bodě m. Odůvodniti toto sestrojení.

Řešení. (Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě.)

Položme

$$\overline{oa} = a, \quad \overline{ob} = b,$$

$$\overline{ok} = y, \quad \overline{kl} = \overline{km} = x;$$

potom jest

$$\overline{oa} : \overline{ob} = \overline{kl} : \overline{kb}$$

čili

$$a : b = x : \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Dáme-li této rovnici podobu

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

poznáváme, že geometrické místo bodu m jest hyperbola.

Rovnice tečny v bodě m jest

$$b^2x\xi - a^2y\eta = a^2b^2$$

a úsek tečny na ose Y

$$\overline{on} = -\frac{b^2}{y}.$$

Jelikož

$$\overline{ok} : \overline{ob} = \overline{ob} : \overline{on},$$

jest tím sestrojení tečny odůvodněno.

Úloha 39.

Po nakloněné rovině počaly současně se pohybovati dvě koule proti sobě a setkaly se rovnými rychlostmi. Vyšla-li horní koule volně ze klidu, jakou počáteční rychlost měla dolní? Jak dlouho pohybovaly se a jak se mají k sobě jejich dráhy?

Řešení. (Zaslal p. *Jos. Kučera*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Obě koule se pohybují stejně dlouho t a srazí se, když bude součet jejich drah roven délce l nakloněné roviny, jejíž výškou budiž a. Znamená-li s_1 dráhu horní, s_2 dráhu dolní koule, a c počáteční její rychlost, bude

$$s_1 = \frac{ag}{2l}t^2$$

$$s_2 = ct - \frac{ag}{2l}t^2;$$

tedy
$$l = ct,$$
t. j. koule se srazí za dobu, za kterou by dolní koule s počáteční svou rychlostí urazila stejnoměrným pohybem délku roviny.

Mezní rychlosť v_1 horní koule bude pak
$$v_1 = \frac{ag}{l} t = \frac{ag}{c}$$
a dolní
$$v_2 = c - \frac{ag}{c}$$
a že obě mají býti stejné, musí
$$c - \frac{ag}{c} = \frac{ag}{c},$$
tedy
$$c = \sqrt{2ag}.$$

Dolní koule počala tudíž svůj pohyb s rychlostí, s jakou by horní koule dospěla ku patě roviny.

Dráha s_1 horní koule bude za dobu $t = \frac{l}{c}$
$$s_1 = \frac{ag}{2l} \cdot \frac{l^2}{2ag} = \frac{l}{4}$$
a tedy dráha s_2 dolní koule
$$s_2 = l - s_1 = \frac{3}{4} l,$$
pročež
$$s_1 : s_2 = 1 : 3.$$

Úloha 40.

K místu A blíží se přímým směrem a rychlostí $c_1 = 20\frac{13}{16}\,m$ těleso znějící tonem $\overline{a}$, jehož absolutní výška $N = 435$. Má se dokázati, že posluchač v A stojící slyší ton $\overline{ais}$, je-li relat. výška půltonu $\frac{16}{15}$ a rychlost zvuku ve vzduchu $c = 333\,m$. (Princip Dopplerův.)

Řešení. (Zaslal p. *Josef Pithardt*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Je-li N absolutní výška tonu, jest doba jednoho výchvěje

$$T = \frac{1}{N} = \frac{\lambda}{c}.$$

Znějící těleso za touž dobu T urazí dráhu

$$c_1 T = \frac{c_1}{N},$$

čímž délka vlny v zkrátí se o $\frac{c_1}{N}$, a do ucha posluchače přicházeti budou vlny délky

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{c_1}{N} = \frac{c - c_1}{N}$$

t. j. počet výchvějů za sekundu bude

$$N_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{cN}{c - c_1}.$$

Dosadíme-li zvláštní hodnoty dané, jest

$$N_1 = 435 \cdot \frac{16}{15}.$$

Řešení cenné úlohy.

Stanoviti obsah K kužele komolého, jemuž lze vepsati dvojkužel složený z kuželů, jichž obsahy jsou k_1, k_2 (viz str. 160).

Dané kužele jsou si podobny. Značí-li tedy r_1, r_2 poloměry jich základen, v součet výšek, jest

$$k_1 : k_2 = r_1^3 : r_2^3$$

a to

$$k_1 = \frac{\pi v r_1^3}{3(r_1 + r_2)}, \quad k_2 = \frac{\pi v r_2^3}{3(r_1 + r_2)}.$$

Jest tedy

$$k_1 + k_2 = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2),$$

a ježto

$$K = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$$

lze psáti

$$\frac{K}{k_1 + k_2} = \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2}.$$

Poněvadž pak $$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}},$$

obdržíme dosadíce do rovnic poslední

$$\frac{K}{k_1 + k_2} = \frac{\sqrt[3]{k_1^2} + \sqrt[3]{k_1 k_2} + \sqrt[3]{k_2^2}}{\sqrt[3]{k_1^2} - \sqrt[3]{k_1 k_2} + \sqrt[3]{k_2^2}}$$

a posléze odtud

$$K = (\sqrt[3]{k_1} + \sqrt[3]{k_2})(\sqrt[3]{k_1^2} + \sqrt[3]{k_1 k_2} + \sqrt[3]{k_2^2})$$

čili

$$K = k_1 + 2\sqrt[3]{k_1^2 k_2} + 2\sqrt[3]{k_1 k_2^2} + k_2.$$

Slavným výborem Jednoty českých mathematiků v Praze uznáno, že za nejlepší řešení této úlohy mají vypsanou cenu obdržeti pp.:

Jaroslav Doležal, stud. VII. tř. realky v Pardubicích,
Josef Hájíček, učitel v Grygově u Olomouce,
August Haas, stud. VIII. tř. česk. gymn. v Opavě.

Jmena ostatních pp. řešitelů viz níže.

Správné řešení úloh*) zaslali pp.:

Frant. Hösch, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 37.
**Václav Hazuka*, stud. VII. tř. g. v Budějovicích.
Jos. Křivka, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 26.
Boh. Zvěřina, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 28., 29., 30., 31., 32., 35., 36., 37.
**Jan Vykruta*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 24., 25.
**Frant. Nachtikal*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech.
**Josef Kincl*, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 24., 26., 28., 29., 30., 31., 33., 34., 35.
**Josef Langr*, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 24., 26., 28., 29., 30., 31., 33., 34., 35., 36., 39.
Vinc. Sura, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 24., 30., 31., 34.
**Jan Matoušek*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 25., 26.

---

*) Hvězdičkou označení zaslali správné řešení cenné úlohy (viz str. 350).

Ant. Marydnek, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 23., 24., 25., 26., 27.
Frant. Očadlík, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 23., 24., 25., 26., 27.
**Jul. Levith*, stud. VI. tř. g. v Ml. Boleslavi.
**Jan Pouč*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
Ignác Kluka, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 25., 29., 31., 35.
**Aug. Haas*, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 23., 24., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 32., 33., 34., 35., 36., 37., 38., 39., 40.
**Jarosl. Doležal*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 24., 25., 28., 29., 30., 31., 32., 33., 34., 35., 37., 39.
Josef Záleský, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 32.
**Josef Pithardt*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 24., 25., 28., 29., 31., 32., 33.. 34., 35., 37., 39., 40.
**Josef Partaj*, stud. VI. tř. r. v Písku.
Emil Spálenský, stud. VIII. tř. g. v Písku, úl. 30.
Václ. Bubeník, stud. VI. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 28., 30., 31.
Josef Kamzík, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 30., 31.
Josef Roubíček, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 30., 31., 35.
Emil Rynda,, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 30., 31.
Hrabě *E. Thun z Hohensteinů*, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 29., 36., 39.
Jan Pexider, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 24., 25., 28., 29., 30., 35., 36., 37., 39., 40.
Stanislav Mára, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 30., 31.
Jos. Kučera, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 28., 30.
**O. Podhajský*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.
**Adolf Sláma*, stud. V. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 35.
Leopold Šauer, stud. VII. tř. g. v Truhlářské ul. v Praze, úl. 37.
Josef Materna, stud. VII. tř. g. ve Spálené ul. v Praze, úl. 30., 31., 32.
**Jarosl. Skála*, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 23., 24., 28., 29., 30., 31., 34., 35., 39.
**Ant. Vyhlídal*, stud. V. tř. g. v Přerově, úl. 26., 27., 30., 31.
**Ondřej Brandstätter*, stud. VIII. tř. g. v Přerově.
Frant. Vojta, stud. VIII. tř. g. v Roudnici, úl. 30., 37.
**Václav Beneš*, stud., VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
**Frant. Miláček*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
**Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce, úl. 23., 24., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 32., 33., 34., 35., 36., 37., 38., 39., 40.