Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Čtyry věty arithmetické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 5, 204–207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108797

buď postupně nebo dle vzorce (8), totiž

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}, \ldots$$

načež obdržíme dle vzorce (13) soustavu hodnot rovnici vyhovujících

$$x = 1, 10, 109, 360, \ldots$$
$$y = 3, 33, 360, 1113, \ldots$$

Čtyry věty arithmetické.

Podává

A. Strnad, professor v Hradci Králové.

V zasedání král. české společnosti nauk dne 9. listopadu r. 1887 předložil p. *M. Lerch* důkaz dvou zajímavých theoremů arithmetických; tyto jednají o funkci $\psi(\alpha, \beta)$ vyjádřující počet všech dělitelů čísla α, které jsou větší než β. Budiž dovoleno, abychom tuto dokázali věty ony spůsobem novým, zcela elementárným, jímž nabudeme zároveň prostředku k stanovení dvou určitých součtů, k funkci ψ se vztahujících.

1. Nechať značí $\Psi(\alpha, \beta)$ všechny dělitele čísla α, které jsou větší než β; jich počet jest $\psi(\alpha, \beta)$. Znakem

$$(a) \qquad \overset{n}{\underset{\varrho=0}{\Psi}}(n+\varrho, \varrho)$$

zahrňme veškeré dělitele obsažené ve výrazech

$$\Psi(n, o), \quad \Psi(n+1, 1), \quad \Psi(n+2, 2), \ldots, \quad \Psi(2n, n);$$

k hodnotám dalším netřeba zvláště přihlížeti, jelikož při $\varrho > n$ bylo by

$$\Psi(n+\varrho, \varrho) = n+\varrho, \qquad \psi(n+\varrho, \varrho) = 1.$$

Skupina dělitelů (a) počíná členem 1 a končí $2n$; neboť z čísel daných tvarem $\Psi(n, 0)$ jest patrně nejmenší rovno 1, kdežto výraz $\Psi(2n, n)$ značí jediné toliko číslo $2n$. Snadnou úvahou můžeme se přesvědčiti, *že ve skupině* (a) *neschází žádné* *z celých čísel od 1 včetně do 2n, a že každé z nich vyskytuje se tam toliko jednou.*

Mezi čísly $n+\varrho$ ($\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n$) lze totiž vždy najíti takové, které by bylo násobkem libovolného čísla p obsaženého v mezích od 1 včetně do $2n$ a většího než příslušné ϱ. Neboť za těchto podmínek lze vždy řešiti rovnici

$$(1) \qquad n+\varrho = mp$$

čísly ϱ, m celými a kladnými, ježto plynoucí odtud nerovnici

$$(2) \qquad \frac{n}{p} \leqq m < \frac{n}{p} + 1$$

můžeme vždy vyhověti celistvou a kladnou hodnotou m. Pokud jest $p \leqq n$, bude $m > 1$; při $p > n$ bude stále $m = 1$ a tedy $n+\varrho = p$, což ostatně též zřejmo z pojmu výrazu $\Psi(n+\varrho, \varrho)$, který dělitele $n+\varrho$ vždy obsahuje. Každé z čísel od 1 až včetně do $2n$ nalezá se tedy ve skupině (a) a sice jen jednou, poněvadž nerovnice (2) připouští jedinou toliko hodnotu m při daném n i p.

Ostatně lze i jinak poznati, že žádný dělitel nemůže současně přicházeti ve skupinách

$$\Psi(n+\alpha, \alpha) \text{ a } \Psi(n+\alpha+\beta, \alpha+\beta).$$

Mají-li čísla $n+\alpha$, $n+\alpha+\beta$ společného dělitele d, jest $d \leqq \beta$, tedy také $d < \alpha+\beta$ a proto nemůže se d vyskytovati mezi členy poslední skupiny.

Z úvah těchto patrno, že *seřadíme-li členy skupiny* (a) *dle velikosti, budou tvořiti arithmetickou posloupnost*

$$(3) \qquad \overset{n}{\underset{\varrho=0}{\Psi}}(n+\varrho, \varrho) = 1, 2, 3, \ldots, 2n.$$

Počet členů této posloupnosti jest

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho, \varrho) = 2n.$$

a součet její

$$(\mathrm{II}) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \Psi(n+\varrho, \varrho) = n(2n+1).$$

2. Zcela podobně vyšetřiti lze počet členů i součet skupiny

$$(b) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} \Psi(n-\varrho, \varrho).$$

V této skupině jest nejmenší člen 1 a největší n, oba obsažené ve výrazu $\Psi(n, o)$. Že ve skupině (b) přichází každé číslo p obsažené v mezích od 1 až včetně do n, patrno opět z rovnice

$$(4) \qquad n-\varrho = mp.$$

Neboť aby bylo $p > \varrho \geqq 0$, k tomu jest nutnou i dostatečnou podmínka

$$(5) \qquad \frac{n}{p} \geqq m > \frac{n}{p} - 1,$$

které lze skutečně vždy celistvým a kladným m vyhověti, poněvadž zlomek $\frac{n}{p} \geqq 1$. Při $n = p$ bude $m = o$, $n = \varrho$, což patrno; jestiť $\Psi(n, n) = 0$. Rovněž jest $\Psi(n-\varrho, \varrho) = 0$, kdykoli jest $\varrho > n - \varrho$; proto by také úplně dostačilo, kdybychom skupinu (b) uvažovali jen v mezích od $\varrho = 0$ do $\varrho = E\left(\frac{n}{2}\right)$, kdež $E(x)$ značí dle *Legendrea* největší celé číslo, které není větší než x. Že pak skupina (b) neobsahuje žádného dělitele dvakráte, vysvítá z nerovnice (5), jíž toliko jediná celistvá a kladná hodnota m vyhovuje; totéž poznáváme, pozorujíce skupiny dělitelů

$$\Psi(n-\alpha, \alpha) \quad \text{a} \quad \Psi(n-\alpha-\beta, \alpha+\beta).$$

Mají-li čísla $n-\alpha$, $n-\alpha-\beta$ společného dělitele d, jest $d \leqq \beta$ a tedy také $d < \alpha + \beta$; pročež dělitele d není mezi členy skupiny poslední.

Tak stvrzeno, že *ve skupině* (b) *vyskytují se všechna celá čísla od 1 včetně do n, a sice každé toliko jednou.* Totéž lze říci jinými slovy: *seřadíme-li členy skupiny* (b) *dle velikosti, tvoří arithmetickou posloupnosť*

$$(6) \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} \Psi(n-\varrho, \varrho) = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Počet členů této posloupnosti jest

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} \psi(n-\varrho, \varrho) = n$$

a součet její

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{n-1} \Psi(n-\varrho, \varrho) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vzorce (I) a (III) jsou totožny s oněmi, které vyvodil p. *Lerch* v pojednání napřed jmenovaném; vzorce (II) a (IV) obsahují výsledky, které pisateli těchto řádků odjinud známy nebyly.

O nejnovějších pracích v oboru zářivé energie.

Napsal

Dr. **Jos. A. Theurer,**
assistent fysikalního ústavu v Praze.

(Dokončení.)

1. Fotografie.

Veškeré výhody, které fotografická methoda poskytuje ve studiu části ultrafialové, do nedávna byly bez významu pro část infračervenou proto, že chemická působivost paprsků na obyčejné fotografické desky nesahá za světlo modrofialové. Snahy pozorovatelů nesly se proto za cílem, nalézti látky, na něž by paprsky méně lomivé tak působily, jako paprsky nejkratší na Daguerrovy desky.

Skoro současně rozřešili otázku tu *Edm. Becquerel* a *Vogel* (r. 1873), kteří shledali, že lze připraviti desky fotografické, citlivé i pro paprsky delší, totiž žluté, zelené a červené, hlavně pak citlivými objevily se jodid stříbrnatý, jenž dává obraz spektra až ku čáře E, a více ještě bromid neb bromojodid stří-