Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Sedláček

O perfektních a kvaziperfektních grafech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 100 (1975), No. 2, 135--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108773

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 100 (1975), Praha

O PERFEKTNÍCH A KVAZIPERFEKTNÍCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Došlo dne 30. listopadu 1973)

Nebude-li jinak výslovně uvedeno, všechny grafy v tomto článku jsou konečné a neorientované, nemají smyčky a jsou bez násobných hran. Pojmy, jež zde nejsou definovány, se najdou např. v [1], [8] a [9]. Je triviální, že neexistuje graf na n uzlech ($n \geqq 2$) takový, že každé dva různé uzly mají různý stupeň.*) M. BEHZAD a G. CHARTRAND [2] reservovali pro něj název *perfektní* graf. Dále graf $\mathscr{G}$ s alespoň dvěma uzly nazvali *kvaziperfektním*, existují-li v $\mathscr{G}$ právě dva uzly u a v téhož stupně; tyto uzly u a v můžeme nazvat *význačnými*. Behzad a Chartrand ukázali, že pro každé $n \geqq 2$ existují právě dva neizomorfní kvaziperfektní grafy na n uzlech, jeden souvislý a druhý nesouvislý. V souvislém grafu mají význačné uzly stupeň $[\frac{1}{2}n]$, v nesouvislém $[\frac{1}{2}(n - 1)]$. Přitom $[x]$ značí celou část reálného čísla x, tj. největší celé číslo m takové, že $m \leqq x$; dále klademe $\{x\} = -[-x]$. Několik dalších vlastností kvaziperfektních grafů popsal nedávno L. NEBESKÝ [7].

V těchto řádcích si všimneme podrobněji souvislého kvaziperfektního grafu na n uzlech, jejž budeme označovat $\mathscr{D}_n$ ($n \geqq 2$). Nejprve určíme počet koster $k(\mathscr{D}_n)$ grafu $\mathscr{D}_n$.

Věta 1. *Platí*

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{\{\frac{1}{2}n\}}.$$

Důkaz. Použijeme známé determinantové metody – viz např. [4], str. 92. Je-li n sudé (tedy $n = 2r$), postupujeme takto: očíslujeme uzly grafu $\mathscr{D}_n$ tak, že pro $s < r$ uzel stupně s dostane pořadové číslo s, význačné uzly dostanou čísla r, $r + 1$ (v libovolném pořadí) a pro $s > r$ uzel stupně s nechť má číslo $s + 1$. Sestrojíme matici $A = (a_{ij})$ tak, že pro $i \neq j$ klademe $a_{ij} = -1$ nebo 0 podle toho, existuje-li v $\mathscr{D}_n$ hrana ij nebo nikoli; dále klademe $a_{ii} = \text{st } i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.**)

*) Srovnej též cvičení II. 2,3 a II. 2,4 na str. 33 autorovy knížky [9].

**) st u značí stupeň uzlu u.

Podle věty 1 z práce [7] má matice A tento tvar: V hlavní diagonále (shora dolů) jsou po řadě čísla $1, 2, 3, \ldots, r, r, r + 1, r + 2, \ldots, 2r - 1$. Prvky vedlejší diagonály jsou čísla -1. Nediagonální prvky jsou buď 0 nebo -1 podle toho, jsou-li nad vedlejší diagonálou nebo pod ní. Nyní libovolný hlavní minor matice A se rovná hledanému počtu koster. Výpočet dává

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{r}$$

a obdobná úvaha pro liché číslo $n = 2r + 1$ vede ke vzorci

$$k(\mathscr{D}_n) = \frac{(n-1)!}{r+1}.$$

Tím je důkaz podán.

U koster grafu $\mathscr{D}_n$ zůstaneme i v další větě. Pro stručnost vyjádření píšeme $\mathscr{G}_1 \cong \mathscr{G}_2$, jsou-li grafy $\mathscr{G}_1$ a $\mathscr{G}_2$ izomorfní.

Věta 2. *Nechť $\mathscr{S}$ je libovolný strom na n uzlech $(n \geqq 2)$. Potom existuje kostra $\mathscr{K}$ grafu $\mathscr{D}_n$ tak, že $\mathscr{K} \cong \mathscr{S}$.*

Důkaz.*) Pro $n = 2$ a 3 je tvrzení zřejmé. Nechť $n \geqq 4$ a předpokládejme, že pro $n - 2$ tvrzení platí. Zvolme dva sousední uzly u, v stromu $\mathscr{S}$ na n uzlech tak, že u je uzel koncový a nechť w_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jsou všichni další sousedé uzlu v. Každá komponenta grafu $\mathscr{L} = \mathscr{S} - \{u, v\}$ je strom. Při $m > 1$ doplňme $\mathscr{L}$ hranami $w_i w_{i+1}$ (pro $i = 1, 2, \ldots, m - 1$), čímž vznikne strom $\mathscr{S}_0$ na $n - 2$ uzlech; při $m = 1$ klademe $\mathscr{S}_0 = \mathscr{L}$. Podle indukčního předpokladu existuje kostra $\mathscr{K}^*$ grafu $\mathscr{D}_{n-2}$ taková, že $\mathscr{K}^* \cong \mathscr{S}_0$. Pro každé i nechť v tomto izomorfismu uzel w_i přejde do w_i^*. Vypusťme nyní z $\mathscr{K}^*$ hrany $w_i^* w_{i+1}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$, uzel $(n - 1)$-ního stupně v grafu $\mathscr{D}_n$, do něhož je $\mathscr{D}_{n-2}$ vnořen, spojme s každým w_i^* a též s koncovým uzlem grafu $\mathscr{D}_n$. Vznikne tak hledaná kostra a důkaz je podán.

Označme $f_n(z)$ chromatický mnohočlen grafu $\mathscr{D}_n$. Definice chromatického mnohočlenu se najde např. ve druhém díle knihy [8], str. 215.

Věta 3. *Platí*

$$f_n(z) = z\left(z - \frac{n}{2}\right)^{[n/2]-[(n-1)/2]} \prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} (z - i)^2 .$$

Důkaz. Zřejmě je $f_2(z) = z(z - 1)$, $f_3(z) = z(z - 1)^2$ a pro každé přirozené číslo $n \geqq 2$ platí

$$f_{n+2}(z) = z(z - 1) f_n(z - 1), \tag{1}$$

*) Během recensního řízení zjednodušil L. Nebeský důkaz věty 2 tak, jak jej zde s jeho laskavým svolením uvádím.

jak plyne z této úvahy: Je-li z (dostatečně velké) přirozené číslo a barvíme-li přípustným způsobem z barvami uzly grafu $\mathscr{D}_{n+2}$, pak pro obarvení jeho koncového uzlu u máme z možností, na jeho souseda v zbývá $z - 1$ možnost a pro obarvení všech uzlů grafu $\mathscr{D}_{n+2} - \{u, v\}$ celkem $f_n(z - 1)$ možností. Z (1) pak už plyne žádaný vztah.

Ještě několik poznámek k větě 3. Předně je vidět, že při $n \geqq 5$ není $\mathscr{D}_n$ jediným grafem, jehož chromatický mnohočlen je $f_n(z)$. Dále známe-li $f_n(z)$, určíme chromatické číslo $\chi(\mathscr{D}_n)$ grafu $\mathscr{D}_n$ tím, že najdeme nejmenší přirozené číslo z_0, pro něž $f_n(z_0) > 0$. Je vidět, že

$$\chi(\mathscr{D}_n) = \left\{\frac{n + 1}{2}\right\}$$

ve shodě s tím, co uvádí L. Nebeský [7]. Při čísle $\chi(\mathscr{G})$ jde o barvení uzlů grafu $\mathscr{G}$ a proto se v literatuře někdy obšírněji nazývá $\chi(\mathscr{G})$ *uzlovým* chromatickým číslem (vertex chromatic number). *Hranové* chromatické číslo $\chi_1(\mathscr{G})$ grafu $\mathscr{G}$ (s aspoň jednou hranou) je minimální počet barev nutný k obarvení hran grafu $\mathscr{G}$ tak, že každé dvě hrany se společným uzlem jsou obarveny různě. Podle známé Vizingovy věty pro každý graf $\mathscr{G}$ (s aspoň jednou hranou) je $\chi_1(\mathscr{G}) = \varrho$ nebo $\varrho + 1$, kde ϱ je maximální stupeň uzlu v $\mathscr{G}$. *Totální* chromatické číslo $\chi_2(\mathscr{G})$ je minimální počet barev nutných k obarvení uzlů a hran grafu $\mathscr{G}$ tak, že každé dva sousední uzly jsou obarveny různě, každé dvě hrany se společným uzlem dostanou odlišné barvy a totéž platí o každé dvojici hrana a uzel s ní incidentní. O hranových a totálních chromatických číslech viz např. [1].

Věta 4. *Platí*

a) $\chi_1(\mathscr{D}_n) = n - 1;$

b) $\chi_2(\mathscr{D}_2) = 3,\ \chi_2(\mathscr{D}_n) = n$ *pro* $n \geqq 3.$

Důkaz. a) Případy $n = 2$ a 3 jsou jasné. Je-li $n \geqq 4$, označme uzly grafu $\mathscr{D}_n$ po řadě $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tak, že $\operatorname{st} u_n = n - 1$, $\operatorname{st} u_{n-1} = 1$. Protože $\chi_1(\mathscr{D}_n) \geqq n - 1$, stačí ukázat, že k obarvení vystačíme s $n - 1$ barvami. Nejprve přiřadíme hraně $u_n u_i$ zbytkovou třídu (mod $n - 1$), v níž leží číslo i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$); budeme ji značit $\mathfrak{Z}_i$. Pak hraně $u_i u_j$ ($1 \leqq i < j \leqq n - 2$) přiřadíme třídu $\mathfrak{Z}_{i+j}$. Je vidět, že toto obarvení splňuje žádané podmínky.

b) Popíšeme jen případ $n \geqq 4$ a uzly nechť jsou tak označeny jako v odstavci a). Vzhledem ke vztahu $\chi_2(\mathscr{D}_n) \geqq n$ stačí, obarvíme-li uzly a hrany n barvami. Uzlu u_n přiřadíme zbytkovou třídu $\mathfrak{Z}_1$ (mod n) a každé z hran $u_n u_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) zbytkovou třídu $\mathfrak{Z}_{i+1}$ (mod n). Uzly u_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 2$) nechť dostanou po řadě třídy $\mathfrak{Z}_{i+2}$ a uzel u_{n-1} třídu $\mathfrak{Z}_2$ (mod n). Konečně každá ze hran $u_i u_j$ ($1 \leqq i < j \leqq$ $\leqq n - 2$) nechť má přiřazenou třídu $\mathfrak{Z}_{i+j+2}$ (mod n). Snadno i zde ověříme, že jsou splněny podmínky pro totální chromatické číslo a důkaz je podán.

Často studovanými charakteristikami konečného grafu $\mathscr{G}$ jsou čísla $\beta(\mathscr{G})$ a $\beta_1(\mathscr{G})$ jejichž definice nyní připomeneme. Nechť U_0 je množina některých uzlů grafu $\mathscr{G}$ taková, že pro žádné $x \in U_0$, $y \in U_0$ neexistuje hrana xy; pak U_0 se nazývá (*uzlově*) *nezávislá* množina. Maximální ze všech U_0 nechť je označena $U_{\max}(\mathscr{G})$. Nyní položíme

$$|U_{\max}(\mathscr{G})| = \beta(\mathscr{G}) \tag{2}$$

a počet všech $U_{\max}(\mathscr{G})$, pro něž platí (2), označíme $p(\mathscr{G})$. V anglické literatuře se $\beta(\mathscr{G})$ často nazývá (vertex) independence number. Podobně nechť H_0 je množina některých hran z $\mathscr{G}$ taková, že pro žádné $h \in H_0$, $k \in H_0$ nemají h, k společný uzel. Říkáme, že H_0 je (*hranově*) *nezávislá* a maximální ze všech H_0 označíme $H_{\max}(\mathscr{G})$. Klademe

$$|H_{\max}(\mathscr{G})| = \beta_1(\mathscr{G}) \tag{3}$$

a počet všech $H_{\max}(\mathscr{G})$ splňujících (3) označme $p_1(\mathscr{G})$. Číslo $\beta_1(\mathscr{G})$ bývá nazýváno (edge) independence number (viz též [1], str. 145).

Věta 5. *Platí*

a) $\beta(\mathscr{D}_n) = [\frac{1}{2}(n + 1)]$; *pro n liché je* $p(\mathscr{D}_n) = 1$, *pro n sudé je* $p(\mathscr{D}_n) = 2$.

b) $\beta_1(\mathscr{D}_n) = [\frac{1}{2}n]$; *pro n liché je* $p_1(\mathscr{D}_n) = 2^{(n-1)/2}$, *pro n sudé je* $p_1(\mathscr{D}_n) = 1$.*)

Důkaz. a) Nejprve k číslu $\beta(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je vztah zřejmý. Nechť $n \geqq 4$ a nechť tvrzení platí pro indexy $2, 3, \ldots, n - 2$. Kdyby bylo

$$\beta(\mathscr{D}_n) > \left[\frac{n + 1}{2}\right],$$

pak (při označení uzlů jako v důkaze věty 4) vytvořme $\mathscr{D}_{n-2} = \mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}$. Protože z u_n, u_{n-1} nejvýše jeden může patřit do $U_{\max}(\mathscr{D}_n)$, bylo by též

$$\beta(\mathscr{D}_{n-2}) > \left[\frac{n - 1}{2}\right],$$

což je spor. Že platí rovnost, o tom se přesvědčíme, když $U_{\max}(\mathscr{D}_{n-2})$ doplníme prvkem u_{n-1}.

Nyní ukážeme, že při $n \geqq 4$ uzel u_{n-1} musí patřit do každého $U_{\max}(\mathscr{D}_n)$. Předpokládejme opak. Pak ze vztahu $u_n \in U_{\max}(\mathscr{D}_n)$ by plynulo $U_{\max}(\mathscr{D}_n) = \{u_n\}$, což není možné. Tedy máme důsledek

$$\beta(\mathscr{D}_{n-2}) = \left[\frac{n + 1}{2}\right]$$

a to je spor.

*) Srovnej též důsledek 1 v práci [7].

Obraťme se nyní k hodnotám $p(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je tvrzení zřejmé. Nechť $n \geqq 4$ a nechť n je liché. Dejme tomu, že je to nejmenší liché číslo té vlastnosti, že $p(\mathscr{D}_n) > 1$. Protože u_{n-1} patří do každého $U_{\max}(\mathscr{D}_n)$, je též $p(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}) > 1$ (spor). Podobně pro n sudé.

b) Zase nejprve k číslu $\beta_1(\mathscr{D}_n)$. Případy $n = 2$ a 3 jsou zřejmé a nechť tedy $n \geqq 4$. Nechť tvrzení platí pro $2, 3, \ldots, n - 2$ a nechť

$$\beta_1(\mathscr{D}_n) > \left[\frac{n}{2}\right].$$

Protože nejvýše jedna ze hran incidentních s u_n může patřit do $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$, bylo by pak též

$$\beta_1(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}) > \left[\frac{n-2}{2}\right],$$

což je spor. Rovnost ve vzorci pro $\beta_1(\mathscr{D}_n)$ ověříme tím, že $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ doplníme hranou $u_n u_{n-1}$.

Je vidět, že při $n \geqq 4$ jedna hrana incidentní s u_n patří do $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$. Kdyby žádná tam nepatřila, bylo by

$$\beta_1(\mathscr{D}_{n-2}) = \left[\frac{n}{2}\right],$$

což není možné.

Studujme nyní $p_1(\mathscr{D}_n)$. Pro $n = 2$ a 3 je věc zřejmá. Předpokládejme $n \geqq 4$, n liché a nechť tvrzení platí pro $2, 3, \ldots, n - 2$. Každá množina $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$ se dá dvěma způsoby vytvořit z $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ tím, že přidáme jednu hranu: Buď přidáme $u_n u_{n-1}$ nebo $u_j u_n$, kde u_j je ten uzel z $\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\}$, jenž neinciduje se žádnou hranou ležící v $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$. Je tedy

$$p_1(\mathscr{D}_n) = 2p_1(\mathscr{D}_{n-2}) = 2^{(n-1)/2}.$$

Je-li n sudé ($n \geqq 4$), jedinou $H_{\max}(\mathscr{D}_n)$ dostaneme, doplníme-li jedinou $H_{\max}(\mathscr{D}_n - \{u_n, u_{n-1}\})$ hranou u_n, u_{n-1}. Důkaz je podán.

Než opustíme problematiku perfektních a kvaziperfektních grafů, ještě několik poznámek. Graf $\mathscr{D}_n$ (pro $n \geqq 2$) má právě dva automorfismy: identický a dále ten, jenž význačné uzly u, v grafu $\mathscr{D}_n$ převádí jeden ve druhý a ostatní zachovává. To je snadný důsledek věty 1 z práce [7]. Přeneseme-li však definici kvaziperfektního grafu i na grafy nekonečné, snadno sestrojíme v této třídě souvislý graf mající jediný automorfismus (identický). Další naše poznámka se týká multigrafů. Omezíme se na konečné neorientované multigrafy bez smyček, v nichž každé dva uzly jsou propojeny nejvýše dvěma hranami. Přeneseme-li sem pojem perfektnosti, je snadno vidět, že při $n \geqq 3$ tu vždy existuje souvislý perfektní multigraf na n uzlech. Při $n \geqq 4$ není jeho struktura určena jednoznačně.

Perfektní a kvaziperfektní grafy nás mohou inspirovat ke studiu příbuzných otázek. Definici kvaziperfektního grafu můžeme totiž modifikovat např. tak, aby v grafu byly tři význačné uzly mající stejný stupeň a ostatní stupně aby byly různé (viz práci [3]*)). Ještě v jiné variantě může počet požadovaných význačných uzlů být ovšem i větší než tři. Přirozeně nás může napadnout i otázka, jaké vlastnosti mají grafy se dvěma páry význačných uzlů atd. Nadhozené otázky se dají studovat užitím známé *Havlovy věty* [6], jež často v literatuře bývá omylem připisována S. L. HAKIMIMU [5].

Literatura

[1] *M. Behzad - G. Chartrand:* Introduction to the theory of graphs, Allyn and Bacon Inc. Boston 1971.

[2] *M. Behzad - G. Chartrand:* No graph is perfect, Amer. Math. Monthly *74* (1967), 962—963.

[3] *V. N. Bhat:* Characterization of 3-perfect graphical degree sequences, Graph Theory Newsletter, Vol. *1*, No 4 (1972), Abstract 5.

[4] *K. Čulík - V. Doležal - M. Fiedler:* Kombinatorická analýza v praxi, Praha 1967.

[5] *S. L. Hakimi:* On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph, J. SIAM, *10* (1962), 496—506.

[6] *V. Havel:* Poznámka o existenci konečných grafů, Časopis pro pěstování matematiky *80* (1955), 477—480.

[7] *L. Nebeský:* On connected graphs containing exactly two points of the same degree, Časopis pro pěstování matematiky *98* (1973), 305—306.

[8] *H. Sachs:* Einführung in die Theorie der endlichen Graphen I., Leipzig 1970, II., Leipzig 1972.

[9] *J. Sedláček:* Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů), Praha 1964.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Summary

ON PERFECT AND QUASIPERFECT GRAPHS

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

A finite graph is said to be *quasiperfect* if it contains exactly two vertices of the same degree. M. Behzad and G. Chartrand [2] showed that for each $n \geqq 2$ there is exactly one connected quasiperfect graph $\mathcal{D}_n$ on n vertices. If x is a real number, then $[x]$ denotes the greatest integer m such that $m \leqq x$; further $\{x\} = -[-x]$. Let $k(\mathcal{D}_n)$ be the number of all trees spanning the graph $\mathcal{D}_n$. A graph $\mathcal{G}$ on n vertices is called *tree-complete* if for every tree $\mathcal{T}_1$ on n vertices there is a tree $\mathcal{T}_2$ spanning

*) Doplněno v korektuře 4. 12. 1974 C.—G. d'AMBLY publikoval mezitím práci o grafech s právě třemi význačnými uzly [Publ. Math. Debrecen *21* (1974), 15—29].

the graph $\mathcal{G}$ such that $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ are isomorphic. Let $f_n(z)$ be the chromatic polynomial of $\mathcal{D}_n$. Let $\chi_1(\mathcal{D}_n)$ and $\chi_2(\mathcal{D}_n)$ be the edge chromatic number of $\mathcal{D}_n$ and the total chromatic number of $\mathcal{D}_n$ respectively. Finally let $\beta(\mathcal{D}_n)$, $\beta_1(\mathcal{D}_n)$, $p(\mathcal{D}_n)$ and $p_1(\mathcal{D}_n)$ be the vertex independence number, the edge independence number, the number of all maximal independent vertex sets and the number of all maximal independent edge sets respectively.

Theorem 1.

$$k(\mathcal{D}_n) = \frac{(n-1)!}{\{n/2\}}.$$

Theorem 2. *The graph $\mathcal{D}_n$ is tree-complete.*

Theorem 3.

$$f_n(z) = z\left(z - \frac{n}{2}\right)^{[n/2]-[(n-1)/2]} \prod_{i=1}^{[(n-1)/2]} (z-i)^2.$$

Theorem 4.

a) $\chi_1(\mathcal{D}_n) = n - 1$;

b) $\chi_2(\mathcal{D}_2) = 3$, $\chi_2(\mathcal{D}_n) = n$ *for* $n \geqq 3$.

Theorem 5.

a) $\beta(\mathcal{D}_n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$; $p(\mathcal{D}_n) = 1$

if n is odd and $p(\mathcal{D}_n) = 2$ if n is even.

b) $\beta_1(\mathcal{D}_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$; $p_1(\mathcal{D}_n) = 2^{(n-1)/2}$

if n is odd and $p_1(\mathcal{D}_n) = 1$ if n is even.)*

*) See also [7], Corollary 1.