Časopis pro pěstování matematiky

Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 3, 381--383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108755

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy č. 6 (autor *Ladislav Mišík*) z roč. *81* (1956), str. 354.

Úloha: Nech R je teleso racionálnych čísel, nech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú reálne čísla a nech $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ je teleso, ktoré vznikne z telesa racionálnych čísel adjunkciou čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Či existuje taká postupnosť reálnych čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a taký konečný počet čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, že pre $n = 1, 2, 3, \ldots$ je $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ vlastnou podmnožinou $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$ a $R(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \subset R(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$.

Odpověď na tento problém je negativní, jak plyne z následujícího obecného tvrzení:

Konečně generované rozšíření komutativního tělesa K neobsahuje žádnou nekonečnou rostoucí posloupnost nadtěles tělesa K.

Důkaz. Předpokládejme, že $L_1 \subsetneqq L_2 \subsetneqq \ldots$ je nějaká rostoucí posloupnost nadtěles tělesa K, obsažených v $K(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. $L = \bigcup_i L_i$ je rovněž nadtěleso tělesa K, a jak dokážeme dále, je konečně generované nad K. Každý generátor patří do určitého L_i a tudíž existuje přirozené číslo n_0 takové, že L_{n_0} obsahuje všechny generátory L nad K. Odtud vyplývá, že každá rostoucí posloupnost nadtěles je konečná.

Zbývá dokázat, že L je konečně generované.

Nechť dim tr $K(\mu_1, \ldots, \mu_r)/K = n \leqq r$ a nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ je transcendentní base L nad K. Je-li $p < n$, pak tuto basi tělesa L doplníme o prvky $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ na basi $K(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ nad K. Kdyby bylo $[L : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)] \geqq \aleph_0$, potom

$$[L(\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] = [L : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)] \geqq \aleph_0$$

a tím spíše by bylo $[K(\mu_1, \ldots, \mu_r) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \geqq \aleph_0$. V konečně generovaném rozšíření $K(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ by tudíž existovala transcendentní base $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ taková, že $[K(\mu_1, \ldots, \mu_r) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)] \geqq \aleph_0$. Současně však, protože $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ je transcendentní base, jsou prvky $\mu_1, \ldots, \mu_r$ algebraické nad $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a proto stupeň $K(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ nad $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je konečný.

Z důkazu vyplývá, že každé rozšíření obsažené v konečně generovaném rozšíření je konečně generované.

Artur Ramer, Warszawa

Řešení úlohy č. 3 (autor *Jan Mařík*) z roč. *79* (1954), str. 163.

Úloha: Platí věta: Nechť $a_n \to 0$. Pak řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverguje pro každé x, pro něž platí $|x| \leqq 1$ a které je bodem regularity funkce f. Nelze dokázat podobnou větu pro sčítatelnost místo pro konvergenci? (Rozhodněte např. o správnosti této věty: Nechť platí $a_n/n \to 0$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sčítatelná podle aritmetického středu v každém bodě x ($|x| = 1$), který je jejím bodem regularity.)

Právě uvedená věta platí. Dokonce platí následující obecnější věta:

Nechť $r \geqq 0$ a nechť $a_n \,.\, n^{-r} \to 0$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sčítatelná metodou (C, r) (Cesàrovy průměry řádu r) v každém bodě x ($|x| = 1$), který je jejím bodem regularity.

Tuto větu dokázal M. Riesz v práci „Über einen Satz des Herrn Fatou", Journal für die reine und angew. Math., Band *140* (1911), 89–99. Položíme-li zde $r = 0$, dostaneme tvrzení, které Riesz nazývá Fatouovou větou a které je v úloze uvedeno jako známé; položíme-li $r = 1$, dostaneme zřejmě řešení úlohy. Ukážeme nyní, jak lze Rieszovo tvrzení pro $r = 1$ jednoduše odvodit z Fatouovy věty. Budeme postupovat v podstatě podle knihy P. Dienes, The Taylor Series, str. 469; opravíme zároveň několik nedopatření, která se na příslušných místech vyskytují.

Nechť $a_n/n \to 0$ a nechť 1 je bod regularity funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potom je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1)\ (C, 1)$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f(1) = f'(1) = 0$. Položme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/(n + 1)$ $(= x^{-1} \int_0^x f)$. Protože $a_n/(n + 1) \to 0$ a protože 1 je bod regularity funkce g, je podle Fatouovy věty $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(n + 1) = g(1)$. Položme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k/(k + 1)$. Snadno se spočte, že $\sum_{k=0}^{n} \sigma_k = (n + 2)\,\sigma_n - \sum_{k=0}^{n} a_k$; je tedy

$$\frac{s_n}{n + 1} = \frac{n + 2}{n + 1}\,\sigma_n - \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^{n} \sigma_k\,.$$

Protože $\sigma_n \to g(1)$, je též $\sigma_n \to g(1)\ (C, 1)$, takže $s_n/(n + 1) \to 0$. Položme nyní $s_n^{(1)} = (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} s_k$. Je

$$\left|s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}\right| = \left| - \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n(n + 1)} + \frac{s_n}{n + 1} \right| \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|s_k|}{k + 1} + \frac{|s_n|}{n + 1}\,.$$

Protože $s_n/(n+1) \to 0$, je $s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)} \to 0$. Buď konečně $h(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}) x^n$. Protože $h(x) = (1-x) x^{-1} \int_0^x (1-t)^{-2} f(t) \, dt$, je 1 bod regularity funkce h a podle Fatouovy věty je $\lim s_n^{(1)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n^{(1)} - s_{n-1}^{(1)}) = h(1) = 0 = f(1)$.

František Štěpánek, Praha

ZPRÁVY

OSMDESÁT LET PROFESORA PhDr KARLA RYCHLÍKA

Dne 16. srpna 1965 dožívá se osmdesáti let PhDr KAREL RYCHLÍK, profesor ČVUT na odpočinku.

Profesor Rychlík je prvním průkopníkem moderní abstraktní algebry u nás. Vedle algebry zabývá se prof. Rychlík též teorií čísel a v posledních letech historií matematiky.

Podrobný článek o životě a díle jubilantově a seznam jeho publikací do roku 1960 byl otištěn v Časopise pro pěstování matematiky *85* (1960), 492—498.

Do dalších let přejeme prof. Rychlíkovi mnoho zdraví a svěžesti.

Redakce

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Při *Matematickém ústavu ČSAV* v Praze obhájil dne 26. března 1965 disertační práci doktora fysikálně-matematických věd dr. JIŘÍ NEDOMA na téma: „Kapacita diskretních sdělovacích kanálů". Téhož dne obhájili disertační práce kandidátů fysikálně-matematických věd PETR HÁJEK na téma: „Modely teorie množin s individuy" a JAN KADLEC na téma: „Princip maxima pro řešení parabolické diferenciální rovnice druhého řádu".

Na *matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university* obhájili dne 4. března disertační práce doktorů fysikálně-matematických věd prof. dr. JÁN JAKUBÍK na téma: „K teorii čiastočne usporiadaných grûp" a doc. dr. MILAN KOLIBIÁR na téma: „Ternárna operacija a vztah „medzi" vo svázoch". Dne 18. března 1965 obhájili disertační práce kandidátů fysikálně-matematických věd E. STEHLÍK na téma: „Numerické řešení integrálních rovnic s užitím interpolačních polynomů a jeho aplikace v technické praxi", V. SKOKAN na téma: „Věty o ε-rozlišitelnosti vstupu sdělovacího kanálu při rozhodovací funkci Hammingova typu a lineárních kódech" a KLAUS LOMMATZSCH na téma: „Gradientní metody a metoda těžišť pro řešení úloh lineárního a nelineárního programování".

Redakce