Alois Švec

Styk systémů podgrup Lieovy grupy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 88 (1963), No. 2, 178--193

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108745

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 88 (1963), Praha

STYK SYSTÉMŮ PODGRUP LIEOVY GRUPY

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo 6. prosince 1961)

V práci je definován styk systémů podmnožin variety, na níž působí Lieova grupa transformací.

1. ÚVOD

Pojem styku dvou křivek je dobře znám: V afinním n-dimensionálním prostoru A_n mějme dány dvě n-krát diferencovatelné křivky

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \tag{1}$$

jež jsou v korespondenci dané společným parametrem; předpokládejme, že mají společný bod

$$x(t_0) = y(t_0), \quad t_1 < t_0 < t_2. \tag{2}$$

Říkáme, že tyto křivky mají v bodě $x(t_0)$ analytický styk řádu n-tého, jestliže vedle (2) platí

$$x'(t_0) = y'(t_0),\ x''(t_0) = y''(t_0),\ \ldots,\ x^{(n)}(t_0) = y^{(n)}(t_0), \quad x^{(n+1)}(t_0) \neq y^{(n+1)}(t_0). \tag{3}$$

Zcela obdobným způsobem je možno definovati styk křivek resp. vícedimensionálních variet v projektivních, eukleidovských a jiných prostorech. Jisté potíže nastávají např. při definici styku dvou soustav (o témž počtu parametrů) kružnic v eukleidovském n-dimensionálním prostoru E_n. Zde se postupuje tak, že každé kružnici se přiřadí soustava podprostorů prostoru E_n a čísel, jež ji jednoznačně určují v E_n; styk je potom definován pomocí styku zavedených podprostorů a funkcí. Ve volbě podprostorů a funkcí je ovšem značná libovůle a není ihned zřejmé, dochází-li se k ekvivalentním definicím. Tuto fundamentální obtíž chci odstraniti jednotnou definicí styku, v níž užiji pouze pojmu styku soustavy podprostorů vektorového prostoru.

Všimnu-li si opět případu styku křivek, mohu pozorovati následující: Afinity prostoru A_n na sebe tvoří grupu G, bod $x \in A_n$ určuje pak podgrupu $G_x \subset G$ afinit, zachovávajících bod x. Křivky (1) udávají tedy dvě jednodimensionální soustavy podgrup $G(t) \equiv G_{x(t)}$, $G'(t) \equiv G_{y(t)}$ grupy G, mající společnou podgrupu $G(t_0) = G'(t_0)$. Soustavám podgrup $G(t)$, $G'(t)$ odpovídají soustavy podprostorů $h(t)$, $h'(t)$ v Lieově algebře grupy G, takže stačí definovat styk těchto dvou posledních soustav a rozumět jím i styk obou soustav původních, a tedy i obou čar (1). Ukážeme, že taková definice styku souhlasí s klasickou definicí. Zobecnění této koncepce pro případ, že bod x je nahrazen obecnějším útvarem prostoru E_n, je na snadě.

Protože v české literatuře nebylo dosud nic napsáno z aplikací Lieových grup na diferenciální geometrii, pokládám za nezbytné uvésti alespoň základní definice a fakta.

2. LIEOVY GRUPY

1. Pojem analytické variety. Nechť P je topologický prostor, tj. množina, na níž je dán systém Σ podmnožin takových, že (1) sjednocení libovolného a (2) průnik konečného počtu množin z Σ náleží opět do Σ; okolí bodu x značme $\mathcal{O}(x)$. Buď $p \in P$. Buďtež dány funkce $f_i : \mathcal{O}_i(p) \to R (i = 0, 1, \ldots, k)$, kde $\mathcal{O}_i(p)$ jsou okolí bodu p; R je množina reálných čísel, R^n množina všech uspořádaných n-tic $[x_1, \ldots, x_n]$, $x \in R$. Říkáme, že f_0 *závisí v okolí bodu p analyticky na* $f_1, \ldots, f_k$, jestliže existuje funkce $F : R^k \to R$ a $\mathcal{O}(p)$ tak, že (1) $\mathcal{O}(p) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i(p)$; (2) F je definována na množině, obsahující množinu $\bigcup_{q \in \mathcal{O}(p)} [f_1(q), \ldots, f_k(q)]$; (3) $f_0(q) = F(f_1(q), \ldots, f_k(q))$ pro všechna $q \in \mathcal{O}(p)$; (4) F je analytická v bodě $[f_1(p), \ldots, f_k(p)]$.

Analytická varieta $\mathfrak{V}$ je nyní souvislý topologický prostor P, k jehož každému bodu p je přiřazena soustava reálných funkcí $\mathcal{A}(\mathfrak{V}, p) \equiv \mathcal{A}(p)$ (tzv. analytických) s těmito vlastnostmi:

(1) Každá funkce z $\mathcal{A}(p)$ je definována na nějakém $\mathcal{O}(p)$.

(2) Každá funkce, jež závisí analyticky v okolí bodu p na funkcích z $\mathcal{A}(p)$, náleží sama do $\mathcal{A}(p)$.

(3) Existují funkce $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}(p)$, okolí $\mathcal{O}(p)$ a číslo $a > 0$ tak, že (a) $f_1, \ldots, f_n$ jsou definovány na $\mathcal{O}(p)$; (b) zobrazení $\Phi : \mathcal{O}(p) \to R^n$ dané vztahem $\Phi(q) = [f_1(q), \ldots, f_n(q)]$ je homeomorfismus mezi $\mathcal{O}(p)$ a množinou bodů $[x_1, \ldots, x_n] \in R^n$, pro něž $|x_i - f_i(p)| < a$; (c) $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}(p)$ pro každé $q \in \mathcal{O}(p)$ a každá funkce z $\mathcal{A}(q)$ závisí analyticky na $f_1, \ldots, f_k$ v okolí bodu q.

Vyhovují-li jiné funkce $f_1^*, \ldots, f_{n^*}^*$ podmínce (3), je nutně $n = n^*$; číslo n nezávisí na bodu p a nazývá se dimensí variety $\mathfrak{V}$.

Buďtež $\mathfrak{V}$ a $\mathfrak{W}$ analytické variety a uvažujme zobrazení $\Phi : \mathcal{O}(p) \to \mathfrak{W}$, $p \in \mathfrak{V}$. Zobrazení Φ se nazývá *analytickým* v bodě p, jestliže pro každou funkci $g \in \mathcal{A}(\mathfrak{W}, \Phi(p))$ je $g \circ \Phi \in \mathcal{A}(\mathfrak{V}, p)$.

Definujme konečně *součin* $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$ dvou analytických variet $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Nechť P, Q jsou topologické prostory, z nichž vznikly variety $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Uvažujme topologický prostor $P \times Q$, bod $(p, q) \in P \times Q$ a $\mathcal{A}(\mathfrak{V}, p)$, $\mathcal{A}(\mathfrak{W}, q)$. Nechť $\omega_1 : P \times Q \to P$ resp. $\omega_2 : P \times Q \to Q$ jsou průměty $\omega_1(p, q) = p$, $\omega_2(p, q) = q$ a nechť $\mathcal{A}(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}, (p, q))$ je množina funkcí

$$f \circ \omega_1 , \quad f \in \mathcal{A}(\mathfrak{V}, p) ; \quad g \circ \omega_2 , \quad g \in \mathcal{A}(\mathfrak{W}, q)$$

a všech funkcí na nich analyticky závislých v okolí bodu (p, q). Prostor $P \times Q$ s takto vytvořenými třídami $\mathscr{A}(\mathfrak{V} \times \mathfrak{W},.)$ je analytickou varietu $\mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$.

2. Tečné vektory analytické variety. Nechť $\mathfrak{V}$ je analytická varieta, dim $\mathfrak{V} = n$. Tečný vektor L v bodě $p \in \mathfrak{V}$ jest zobrazení $L: \mathscr{A}(p) \to R$ s vlastnostmi

$$(4) \qquad L(af + bg) = a\,L(f) + b\,L(g)\,; \quad a, b \in R\,; \quad f, g \in \mathscr{A}(p)\,;$$
$$L(fg) = L(f)\,g(p) + f(p)\,L(g)\,; \quad f, g \in \mathscr{A}(p)\,.$$

Jestliže L_1 a L_2 jsou tečné vektory k $\mathfrak{V}$ v bodě p a $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, pak $L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$, pro nějž $L(f) = \lambda_1\,L_1(f) + \lambda_2\,L_2(f)$, je opět tečný vektor, takže tečné vektory tvoří vektorový tzv. *tečný prostor* $T(\mathfrak{V}, p)$ v bodě p. Je možno ukázati, že dim $T(\mathfrak{V}, p) =$ $=$ dim $\mathfrak{V}$.

Nechť $\mathfrak{V}$ a $\mathfrak{W}$ jsou variety a $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ je analytické zobrazení v bodě $p \in \mathfrak{V}$. Nechť $L \in T(\mathfrak{V}, p)$ a $g \in \mathscr{A}(\mathfrak{W}, \varphi(p))$. Zobrazení $M : \mathscr{A}(q) \to R$, definované relací $M(g) =$ $= L(g \circ \varphi)$, je tečným vektorem k $\mathfrak{W}$ v bodě $q = \varphi(p)$. Zobrazení $(\mathrm{d}\varphi)_p : T(\mathfrak{V}, p) \to$ $\to T(\mathfrak{W}, p)$, dané vztahem $(\mathrm{d}\varphi)_p\,L = M$, je lineární a nazývá se *diferenciálem* zobrazení φ v bodě p.

Nechť $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2$, $p = (p_1, p_2)$, $p \in \mathfrak{V}$, $p_i \in \mathfrak{V}_i$; pak $T(\mathfrak{V}, p) = T(\mathfrak{V}_1, p_1) \times$ $\times\, T(\mathfrak{V}_2, p_2)$.

Vektorové pole X na analytické varietě $\mathfrak{V}$ je zobrazení $X : \mathfrak{V} \to \bigcup_p T(\mathfrak{V}, p)$, $p \in \mathfrak{V}$, takové, že $X(p) \in T(\mathfrak{V}, p)$. Pole X je *analytické*, platí-li: je-li $p \in \mathfrak{V}$, $f \in \mathscr{A}(\mathfrak{V}, p)$ a f je definována v $\mathcal{O}(p)$, pak $q(p) = X(q)\,(f) \in \mathscr{A}(\mathfrak{V}, p)$, $q \in \mathcal{O}(p)$.

Jestliže X, Y jsou analytická vektorová pole na $\mathfrak{V}$, pak i $Z = YX - XY$ je analytické vektorové pole na $\mathfrak{V}$, které značíme $Z = [X, Y]$. Snadno se ukáže

$$(5) \qquad [X, X] = 0\,, \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0\,,$$
$$[a_1X_1 + a_2X_2, b_1Y_1 + b_2Y_2] = a_1b_1[X_1, Y_1] + a_1b_2[X_1, Y_2] +$$
$$+ a_2b_1[X_2, Y_1] + a_2b_2[X_2, Y_2]$$

pro vektorová pole X, Y, Z, X_i, Y_i a funkce a_i, b_i na $\mathfrak{V}$.

3. Subvarieta. Zobrazení $\varphi : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$ analytické variety $\mathfrak{W}$ do jiné variety $\mathfrak{V}$ se nazývá *regulární* v bodě $p \in \mathfrak{W}$, jestliže je v bodě p analytické a jestliže zobrazení $(\mathrm{d}\varphi)_p : T(\mathfrak{W}, p) \to T(\mathfrak{V}, \varphi(p))$ je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi $T(\mathfrak{W}, p)$ a $(\mathrm{d}\varphi)_p\,T(\mathfrak{W}, p) \subset T(\mathfrak{V}, \varphi(p))$.

Analytická varieta $\mathfrak{W}$ (na topologickém prostoru P) je *analytickou subvarietou* analytické variety $\mathfrak{V}$ (na topologickém prostoru R), jestliže $P \subset R$ a jestliže identické zobrazení $i : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$ (pro něž $i(p) = p$ pro $p \in \mathfrak{W}$) je regulární v každém bodě $p \in \mathfrak{W}$.

4. Analytická grupa. Analytická grupa je analytická varieta $\mathfrak{V}$, jež je současně grupou, tj. jsou dána zobrazení $\varphi : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$, $\psi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ a prvek $e \in \mathfrak{V}$ tak, že pro každé $x, y, z \in \mathfrak{V}$ platí

$$(6) \qquad \varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z))\,, \quad \varphi(x, e) = \varphi(e, x) = x\,, \quad \varphi(x, \psi(x)) = e\,;$$

$\varphi(x, y)$ se značí xy a nazývá součinem, $\psi(x) = x^{-1}$ inversním prvkem k x. Dále se předpokládá, že zobrazení $\Phi : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ dané vztahem $\Phi(x, y) = \varphi(x, \psi(y)) = xy^{-1}$, je analytické v každém bodě $p \in \mathfrak{B}$.

Analytická grupa $\mathfrak{W}$ je *analytickou podgrupou* analytické grupy $\mathfrak{B}$, jestliže $\mathfrak{W}$ je analytickou podvarietou variety $\mathfrak{B}$ a jestliže z $x, y \in \mathfrak{W}$ plyne $\Phi(x, y) = xy^{-1} \in \mathfrak{W}$.

Jestliže $\mathfrak{W}$ a $\mathfrak{B}$ jsou analytické grupy, pak zobrazení $H : \mathfrak{W} \to \mathfrak{B}$ se nazývá *analytickým homomorfismem*, jestliže H je analytickým zobrazením variety $\mathfrak{W}$ do variety $\mathfrak{B}$ a jestliže $H(xy^{-1}) = H(x) \, . \, [H(y)]^{-1}$.

5. Lieova algebra. Buď V vektorový prostor konečné dimense nad R. Buď dáno zobrazení $\chi : V \times V \to V$ (značme $\chi(X, Y) = [X, Y]$), splňující rovnice (5). Potom se V nazývá *Lieovou algebrou* $\mathfrak{v}$ nad R.

Nechť $\mathfrak{v}$ a $\mathfrak{w}$ jsou Lieovy algebry, V a W jejich vektorové prostory. Definuji-li na $V \times W$ komposici pravidlem

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'], [Y, Y']),$$

dostávám z $V \times W$ Lieovu algebru $\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}$, jež je *součinem* algeber $\mathfrak{v}$ a $\mathfrak{w}$. Vektorový podprostor W z V tvoří *Lieovu podalgebru* $\mathfrak{w}$ ve $\mathfrak{v}$, jestliže komposice v něm je indukována komposicí z V a jestliže z $X, Y \in W$ plyne $[X, Y] \in W$. Zobrazení $f : \mathfrak{w} \to \mathfrak{v}$ je homomorfismem, jestliže f je lineární a $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ pro $X, Y \in \mathfrak{w}$.

6. Vztah mezi analytickými grupami a Lieovými algebrami. Budiž $\mathfrak{G}$ analytická grupa a na ní buď dáno analytické vektorové pole X (jeho vektor v bodě p označme X_p). Mějme dva body $p, q \in \mathfrak{G}$ pak existuje jediný homomorfismus $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ tvaru $\varphi_r(x) = rx$ takový, že $\varphi_r(p) = q$, a sice $\varphi_{qp^{-1}}$; toto zobrazení je nutně analytické isomorfní zobrazení $\mathfrak{G}$ na sebe. Diferenciál $d\varphi_{qp^{-1}} : T_p \to T_q$ (T_x je tečný prostor k $\mathfrak{G}$ v bodě x) je tedy isomorfismus mezi T_p a T_q.

Libovolné vektorové pole X se nazývá *zleva invariantní*, jestliže $d\varphi_{qp^{-1}} X_p = X_q$ pro každou dvojici bodů $p, q \in \mathfrak{G}$; je možno ukázati, že každé zleva invariantní pole je analytické. Je-li $e \in \mathfrak{G}$ jednotkový prvek, pak pro každý vektor $L \in T_e$ existuje jediné zleva invariantní pole X na $\mathfrak{G}$, pro něž $X_e = L$. Množina zleva invariantních polí je tedy isomorfní s vektorovým prostorem T_e. Jestliže X, Y jsou zleva invariantní pole, je i $[X, Y]$ zleva invariantní; zobrazení $[X_e, Y_e] \to [X, Y]_e$ tvoří z T_e *Lieovu algebru analytické grupy* $\mathfrak{G}$.

Nyní platí důležité věty:

1. *Lieova algebra součinu dvou analytických grup je součinem Lieových algeber těchto grup.*

2. *Je-li $\mathfrak{G}'$ pod grupou grupy $\mathfrak{G}$, pak Lieova algebra $\mathfrak{g}'$ (příslušná grupě $\mathfrak{G}'$) je podalgebrou v $\mathfrak{g}$ a naopak každá podalgebra v $\mathfrak{g}$ je Lieovou algebrou právě jediné analytické podgrupy v $\mathfrak{G}$.*

7. Lieovy grupy. Topologickou grupou nazýváme topologický prostor G, na němž jsou dány funkce $\varphi : G \times G \to G$, $\psi : G \to G$ a prvek $e \in G$ tak, že platí (6) a funkce $\Phi(x, y) = \varphi(x, \psi(y))$ je spojitá. Grupu G nazýváme Lieovou grupou, jestliže prostor G

je lokálně souvislý a souvislá komponenta G^e prvku e může být vybavena strukturou analytické variety tak, že funkce $\Phi(x, y)$ je analytická; dvě analytické grupy, vytvořené z téže Lieovy grupy, splývají.

V našich úvahách se budeme zabývati převážně analytickými grupami.

3. LIEOVA ALGEBRA AFINNÍ GRUPY

1. Aditivní grupa R. Množina reálných čísel je topologickým prostorem při obvyklé topologii. V bodě $p \in R$ je $\mathscr{A}(p)$ tvořena všemi funkcemi tvaru $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x - p)^i$, kde napsaná řada konverguje v některém $\mathcal{O}(p)$. Za soustavu funkcí $f_1, \ldots, f_n$ z podmínky (3) v definici analytické variety je možno vzíti soustavu tvořenou jedinou funkcí $f_1 = x$; takže R je jednodimensionální analytická varieta. Zobrazení $(x, y) \to x - y$ je pak zřejmě analytické, takže R (chápána jako aditivní grupa) je analytická grupa. R je i Lieova grupa, protože R je lokálně souvislá a souvislá množina.

Tečný vektor L v bodě $p \in R$ jest zobrazení $L: \mathscr{A}(p) \to R$, definované takto:

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x - p)^i\right) = c_1 l\,, \quad \text{kde } l \in R \text{ je libovolné}.$$

Ověřme např. (2_2). Zřejmě

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x - p)^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} c'_i(x - p)^j = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(x - p)^i\,,$$

kde

$$d_0 = c_0 c'_0\,, \quad d_1 = c_0 c'_1 + c_1 c'_0\,,$$

takže

$$L(fg) = (c_0 c'_1 + c_1 c'_0)\, l\,, \quad L(f)\, g(p) + f(p)\, L(g) = c_1 l \,.\, c'_0 + c_0 \,.\, c'_1 l\,.$$

Tečný prostor T_0 v bodě $0 \in R$ k R je jednodimensionální vektorový prostor a příslušná Lieova algebra je nutně dána komposicí $[L, L'] = 0$ pro $L, L' \in T_0$.

2. Úplná afinní grupa. Buď A_n n-dimensionální prostor afinní, v němž je zaveden afinní souřadnicový systém, takže každému bodu $x \in A_n$ přiřazujeme souřadnice $[x_1, \ldots, x_n]$. Afinita $\mathscr{A} : A_n \to A_n$ prostoru A_n na sebe přiřazuje každému bodu $x \in A_n$ bod $x' \in A_n$ se souřadnicemi

$$\begin{aligned} x'_1 &= X_{11}x_1 + X_{12}x_2 + \ldots + X_{1n}x_n + \xi_1\,, \\ x'_2 &= X_{21}x_1 + X_{22}x_2 + \ldots + X_{2n}x_n + \xi_2\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= X_{n1}x_1 + X_{n2}x_2 + \ldots + X_{nn}x_n + \xi_n\,, \end{aligned} \tag{7}$$

kde X_{ij}, ξ_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ jsou pevná čísla. Označíme-li

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

pak rovnice (7) napišme zkráceně ve tvaru

$$(9) \qquad x' = Xx + \xi .$$

Provedeme-li další afinitu $\mathscr{A}' : A_n \to A_n$

$$(10) \qquad x'' = X'x' + \xi' ,$$

dostaneme složením afinit (9), (10) afinitu $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}' \circ \mathscr{A}$ ve tvaru

$$(11) \qquad x'' = X''x + \xi'' ,$$

kde

$$(12) \qquad X'' = X'X , \quad \xi'' = X'\xi + \xi' .$$

Zabývejme se pouze regulárními afinitami (9), pro něž

$$(13) \qquad \det X = 0 .$$

Množinu afinit $\mathfrak{A}$ prostoru A_n na sebe lze tedy ztotožnit s množinou všech dvojic $\{X, \xi\}$, kde X resp. ξ jsou matice typu $(n \times n)$ resp. $(n \times 1)$ a platí (13). V prostoru $\mathfrak{A}$ zaveďme pak násobení

$$(14) \qquad \{X', \xi'\} . \{X, \xi\} = \{X'X, X'\xi + \xi'\} .$$

Nechť $\Delta = (\delta_{ij})$ je matice typu $(n \times n)$, kde $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$; δ buď matice typu $(n \times 1)$, jejíž všechny prvky jsou nulové. Zavedeme-li označení

$$(15) \qquad \{X, \xi\}^{-1} = \{X^{-1}, -X^{-1}\xi\} ,$$

přesvědčíme se snadno o platnosti identit

$$(16) \qquad \{X'', \xi''\} . (\{X', \xi'\} . \{X, \xi\}) = (\{X'', \xi''\} . \{X', \xi'\}) . \{X, \xi\} ,$$
$$\{\Delta, \delta\} . \{X, \xi\} = \{X, \xi\} . \{\Delta, \delta\} = \{X, \xi\} , \quad \{X, \xi\} . \{X, \xi\}^{-1} = \{\Delta, \delta\} .$$

Množina $\mathfrak{A}$ je tedy grupou, definujeme-li násobení rovnicí (14), prohlásíme-li $\{\Delta, \delta\}$ za jednotkový prvek a zavedeme-li přechod k inversnímu prvku rovnicí (15). Podotkněme, že

$$(17) \qquad \{X, \xi\} . \{Y, \eta\}^{-1} = \{XY^{-1}, \xi - XY^{-1}\eta\} .$$

Jestliže afinita $\mathscr{A} : A_n \to A_n$ zachovává bod x_0, plyne z (9) $\xi = x_0 - Xx_0$. Označme $\mathfrak{A}(x_0)$ podmnožinu grupy $\mathfrak{A}$, tvořenou prvky tvaru $\{X, x_0 - Xx_0\}$, kde x_0 je pevná matice typu $(n \times 1)$ a X je libovolná matice. Vzhledem k tomu, že

$$(18) \qquad \{X, x_0 - Xx_0\} . \{Y, x_0 - Yx_0\}^{-1} = \{XY^{-1}, x_0 - XY^{-1}x_0\} ,$$

je $\mathfrak{A}(x_0)$ podgrupou grupy $\mathfrak{A}$.

Množina $\mathfrak{A}$ je topologický prostor. Za ε-okolí $(\varepsilon > 0)$ prvku $\{X_0, \xi_0\}$ prohlásíme množinu všech prvků $\{X, \xi\}$ takových, že $|X_{0,ij} - X_{ij}| < \varepsilon$, $|\xi_{0,i} - \xi_i| < \varepsilon$ pro všechna $i, j = 1, \ldots, n$. Otevřená množina v $\mathfrak{A}$ je pak množina, jež s každým svým prvkem obsahuje i jeho některé ε-okolí. Vzhledem k tvaru operace (17) plyne snadno, že $\mathfrak{A}$ je topologická grupa. Grupa $\mathfrak{A}$ je lokálně souvislá.

Buď $\mathfrak{A}^+$ množina všech prvků $\{X, \xi\} \in \mathfrak{A}$, pro něž $\det X > 0$; potom $\mathfrak{A}^+$ je opět topologická grupa. Můžeme ovšem vyšetřovati i topologické podgrupy $\mathfrak{A}^+(x_0) = \mathfrak{A}(x_0) \cap \mathfrak{A}^+$. Grupa $\mathfrak{A}^+$ je analytickou varietou, v níž máme souřadnice X_{ij}, ξ_i. Zvolíme-li matici x_0 a tedy čísla $x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}$, je množina $\mathfrak{A}^+(x_0)$ dána parametricky ve tvaru

$$(19) \qquad X_{ij} = t_{ij}\,, \quad \xi_i = x_{0,i} - \sum_{j=1}^{n} x_{0,j} t_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,,$$

kde t_{ij} jsou parametry, vázané jedinou podmínkou $\det \|t_{ij}\| > 0$.

Grupa $\mathfrak{A}^+$ je analytickou grupou, každá $\mathfrak{A}^+(x_0)$ je její analytickou podgrupou. Určíme Lieovu algebru grupy $\mathfrak{A}^+$. Pro jednoduchost označme $e = \{\Delta, \delta\}$ jednotkový prvek grupy $\mathfrak{A}^+$.

Každá analytická funkce z $\mathscr{A}(e)$ je tvaru

$$(20) \qquad f = a + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(X_{ij} - \delta_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i + (.)\,,$$

kde $(.)$ označuje součet členů tvaru

$$k \,.\, \prod_{i,j=1}^{n} (X_{ij} - \delta_{ij})^{r_{ij}} \,.\, \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{s_i}\,, \quad \text{kde} \quad \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} + \sum_{i=1}^{n} s_i \geqq 2\,.$$

V bodě $e \in \mathfrak{A}^+$ definujeme operátory $L_{ij}, L_i : \mathscr{A}(e) \to R$ vztahy

$$(21) \qquad L_{ij}(f) = b_{ij}\,, \quad L_i(f) = c_i\,,$$

je-li f tvaru (20).

Máme-li další analytické funkce

$$(22) \qquad \begin{aligned} g &= a' + \sum_{i,j=1}^{n} b'_{ij}(X_{ij} - \delta_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} c'_i \xi_i + (.)\,, \\ h &= a'' + \sum_{i,j=1}^{n} b''_{ij}(X_{ij} - \delta_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} c''_i \xi_i + (.)\,, \end{aligned}$$

je

$$(23) \qquad \begin{aligned} &a'' = \alpha a + \beta a'\,, \quad b''_{ij} = \alpha b_{ij} + \beta b'_{ij}\,, \quad c''_i = \alpha c_i + \beta c'_i \quad \text{pro} \quad h = \alpha f + \beta g\,, \\ &a'' = a a'\,, \qquad\quad b''_{ij} = a b'_{ij} + a' b_{ij}\,, \quad c''_i = a c'_i + a' c_i \quad \text{pro} \quad h = fg\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} L_{ij}(\alpha f + \beta g) &= \alpha b_{ij} + \beta b'_{ij} = \alpha\, L_{ij}(f) + \beta\, L_{ij}(g)\,, \\ L_i(\alpha f + \beta g) &= \alpha c_i + \beta c'_i = \alpha\, L_i(f) + \beta\, L_i(g)\,, \\ L_{ij}(fg) &= a b'_{ij} + a' b_{ij} = f(e)\, L_{ij}(g) + g(e)\, L_{ij}(f)\,, \\ L_i(fg) &= a c'_i + a' c_i = f(e)\, L_i(g) + g(e)\, L_i(f)\,, \end{aligned}$$

takže L_{ij}, L_i jsou vektory v bodě e. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme totiž

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} L_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0\,,$$

kde některé α_{ij} resp. α_i je různé od nuly. Pro funkci $f = X_{ij} - \delta_{ij}$ resp. $f = \xi_i$ je potom $L(f) = \alpha_{ij} = 0$ resp. $L(f) = \alpha_i = 0$, což není možné. Protože $\mathfrak{A}^+$ je analytická varieta dimense $n^2 + n$, tvoří vektory L_{ij}, L_i basi jejího tečného vektorového prostoru T_e v bodě e. Každý vektor z T_e je tedy tvaru

$$V = \sum_{i,j}^{n} l_{ij} L_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i \,, \tag{24}$$

takže T_e *je isomorfní s vektorovým prostorem* $\mathscr{L}$ *všech prvků tvaru* $\langle L, \lambda \rangle$, *kde* L *resp.* λ *je matice typu* $(n \times n)$ *resp.* $(n \times 1)$ *a sčítání je definováno relací*

$$\langle L, \lambda \rangle + \langle L', \lambda' \rangle = \langle L + L', \lambda + \lambda' \rangle \,. \tag{25}$$

Vyšetřujme analytickou grupu $\mathfrak{A}^+(x_0)$, tedy množinu všech prvků $\{X, x_0 - Xx_0\}$ s násobením (14). Buď $J(x_0) : \mathfrak{A}^+(x_0) \to \mathfrak{A}^+$ vnoření $\mathfrak{A}^+(x_0)$ do $\mathfrak{A}^+$. Označíme-li $T_e(x_0)$ tečný vektorový prostor grupy $\mathfrak{A}^+(x_0)$ v jednotkovém prvku, pak zkoumejme diferenciál $\mathrm{d}J_e : T_e(x_0) \to T_e$. Je-li $L \in T_e(x_0)$ a $M = \mathrm{d}J_e(x_0)\, L \in T_e$, je ovšem podle definice $M(f) = L(f \circ J(x_0))$ pro každou $f \in \mathscr{A}(e)$.

Označíme-li $\mathscr{A}_{x_0}(e)$ množinu všech funkcí na $\mathfrak{A}^+(x_0)$, analytických v bodě e, je $\varphi \in \mathscr{A}_{x_0}(e)$ tvaru

$$\varphi = \gamma + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij}(X_{ij} - \delta_{ij}) + (.) \,, \tag{26}$$

kde $(.)$ je součet členů tvaru

$$\kappa \,.\, \prod_{i,j=1}^{n} (X_{ij} - \delta_{ij})^{r_{ij}} \,, \quad \text{kde} \quad \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij} \geqq 2 \,.$$

Operátory $\Lambda_{ij} : \mathscr{A}_{x_0}(e) \to R$ tvaru

$$\Lambda_{ij}(\varphi) = \gamma_{ij} \tag{27}$$

jsou zřejmě lineárně nezávislé vektory, které tvoří basi prostoru $T_e(x_0)$.

Budiž nyní dána funkce f (20) na $\mathfrak{A}^+$, příslušná funkce $\varphi = f \circ J(x_0)$ na $\mathfrak{A}^+(x_0)$ se získá dosazením

$$\xi_i = x_{0,i} - \sum_{j=1}^{n} x_{0,j} X_{ij}$$

do (20); viz (19). Tak vychází

$$\varphi = a + \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} - c_i x_{0,j})(X_{ij} - \delta_{ij}) + (.) \tag{28}$$

a označíme-li $\Lambda'_{ij} = \mathrm{d}J_e(x_0)\, \Lambda_{ij}$, je $\Lambda'_{ij}(f) = \Lambda_{ij}(f \circ J(x_0))$ čili vzhledem k (21)

$$\Lambda'_{ij}(f) = \Lambda_{ij}(\varphi) = b_{ij} - c_i x_{0,j} = L_{ij}(f) - x_{0,j}\, L_i(f) \,. \tag{29}$$

Tím dostáváme: *Tečný prostor* $T_e(x_0)$ *grupy* $\mathfrak{A}^+(x_0)$ *je* n^2*-dimensionální podprostor tečného prostoru* T_e *grupy* $\mathfrak{A}^+$ *a jeho basi tvoří vektory* $L_{ij} - x_{0,j} L_i$.

Ve výše zavedeném isomorfismu $i : T_e \to L$ odpovídá prvku (24) z T_e prvek $\langle L, \lambda \rangle$, kde $L = (l_{ij})$, $\lambda = (\lambda_i)$. Každý vektor z $T_e(x_0)$ je tvaru

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}(L_{ij} - x_{0,j}L_i) = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij}L_{ij} - \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} l_{ij}x_{0,j})\, L_i \,, \tag{30}$$

takže

$$iV = \langle L, -Lx_0 \rangle \,. \tag{31}$$

Prostor $T_e(x_0) \subset T_e$ se při isomorfismu i zobrazí na vektorový podprostor $\mathscr{L}(x_0) \subset \subset \mathscr{L}$, tvořený všemi prvky tvaru $\langle L, -Lx_0 \rangle$, kde L je libovolná matice typu $(n \times n)$.

Určeme nyní komposici $[U, V]$ dvou vektorů $U, V \in T_e$; zřejmě stačí určiti $[L_{ij}, L_{kl}]$, $[L_{ij}, L_k]$, $[L_i, L_j]$.

Symbolem K označme na okamžik kterýkoliv z vektorů L_{ij}, L_i. Buď $K(\{P, \pi\})$ analytické pole zleva invariantních vektorů na $\mathfrak{A}^+$, pro něž $K(e) = K$. V některém okolí $\mathcal{O}(e) \subset \mathfrak{A}^+$ buď dána funkce (20); stanovme $K(\{P, \pi\})\,(f)$ pro všechna $\{P, \pi\} \in \mathcal{O}(e)$. Z definice pole $K(\{P, \pi\})$ plyne

$$\mathrm{d}\varphi_{\{S,\sigma\}\,.\,\{R,\varrho\}^{-1}}\, K(\{R, \varrho\}) = K(\{S, \sigma\}) \tag{32}$$

čili při $\{S, \sigma\} = \{P, \pi\}$, $\{R, \varrho\} = \{\Delta, \delta\}$ dostáváme

$$K(\{P, \pi\}) = \mathrm{d}\varphi_{\{P,\pi\}}\, K \,; \tag{33}$$

zde ovšem $\varphi_{\{P,\pi\}} : \mathfrak{A}^+ \to \mathfrak{A}^+$ je definováno vztahem $\varphi_{\{P,\pi\}}\{X, \xi\} = \{P, \pi\}\,.\,\{X, \xi\}$. Z (33) plyne $K(\{P, \pi\})\,(f) = K(f \circ \varphi_{\{P,\pi\}})$. Je však

$$\begin{aligned}\varphi(\{X, \xi\}) &= f(\{X, \xi\}) \circ \varphi_{\{P,\pi\}} = f(\varphi_{\{P,\pi\}}\{X, \xi\}) = \\ &= f(\{P, \pi\}\,.\,\{X, \xi\}) = f(\{PX, P\xi + \pi\})\,.\end{aligned}$$

Tedy definitivně

$$K(\{P, \pi\})\,(f) = K f(\{PX, P\xi + \pi\})\,. \tag{34}$$

Budiž $P = (P_{ij})$, $\pi = (\pi_i)$; potom

$$PX = (\sum_{k=1}^{n} P_{ik}X_{kj})\,, \quad P\xi + \pi = (\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\xi_k + \pi_i)\,.$$

Mějme funkce

$$f_{rs}(\{X, \xi\}) = X_{rs} - \delta_{rs}\,, \quad f_r(\{X, \xi\}) = \xi_r\,. \tag{35}$$

Potom

$$\begin{aligned} f_{rs}(\{PX, P\xi + \pi\}) &= \sum_{k=1}^{n} P_{rk}X_{ks} - \delta_{rs} = (P_{rs} - \delta_{rs}) + \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{sj}P_{ri}(X_{ij} - \delta_{ij})\,, \\ f_r(\{PX, P\xi + \pi\}) &= \sum_{i=1}^{n} P_{ri}\xi_i + \pi_r\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Vzhledem k (36) je

$$\begin{aligned} L_{ij}(\{P, \pi\})\,(f_{rs}) = \delta_{sj}P_{ri}\,, \quad L_i(\{P, \pi\})\,(f_{rs}) = 0\,, \\ L_{ij}(\{P, \pi\})\,(f_r) = 0\,, \quad L_i(\{P, \pi\})\,(f_r) = P_{ri}\,, \end{aligned}$$

takže

$$L_{ij}(\{X, \xi\})(f_{rs}) = \delta_{sj}\delta_{ir} + \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{sj}\delta_{kr}\delta_{li}(X_{kl} - \delta_{kl}), \tag{37}$$
$$L_{ij}(\{X, \xi\})(f_r) = 0, \quad L_i(\{X, \xi\})(f_{rs}) = 0,$$
$$L_i(\{X, \xi\})(f_r) = \delta_{ir} + \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{kr}\delta_{li}(X_{kl} - \delta_{kk})$$

a

$$L_{kl}L_{ij}(f_{rs}) = \delta_{sj}\delta_{kr}\delta_{li}, \quad L_{kl}L_{ij}(f_r) = 0, \quad L_{kl}L_i(f_{rs}) = 0, \quad L_{kl}L_i(f_r) = \delta_{kr}\delta_{li}, \tag{38}$$
$$L_iL_{kl}(f_{rs}) = 0, \quad L_iL_{kl}(f_r) = 0, \quad L_jL_i(f_{rs}) = 0, \quad L_jL_i(f_r) = 0,$$

$$[L_{kl}, L_{ij}](f_{rs}) = \delta_{sl}\delta_{ir}\delta_{jk} - \delta_{sj}\delta_{kr}\delta_{li}, \tag{39}$$
$$[L_i, L_{kl}](f_{rs}) = 0, \quad [L_i, L_j](f_{rs}) = 0,$$
$$[L_{kl}, L_{ij}](f_r) = 0, \quad [L_i, L_{kl}](f_r) = \delta_{kr}\delta_{li},$$
$$[L_i, L_j](f_r) = 0.$$

Každá funkce z $\mathscr{A}(e)$ je tvaru

$$f(\{X, \xi\}) = a + \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}f_{rs} + \sum_{r=1}^{n} c_rf_r + (.),$$

kde $(.)$ je součet členů tvaru

$$F = \alpha \,.\, \prod_{r,s=1}^{n} f_{rs}^{\alpha_{rs}} \,.\, \prod_{r=1}^{n} f_r^{\alpha_r}, \quad \text{kde} \quad \sum_{r,s=1}^{n} \alpha_{rs} + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \geqq 2\,.$$

Je-li $K \in T_e$ a $g_1, \ldots, g_t \in \mathscr{A}(e)$, dostáváme snadno (úplnou indukcí podle t)

$$K(\prod_{i=1}^{t} g_i) = \sum_{i=1}^{t} K(g_i) \prod_{j} g_j(e), \quad \text{kde} \quad j = 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, t\,.$$

Je tedy vzhledem k $f_{rs}(e) = 0, f_r(e) = 0$ nutně $K(F) = 0$ a tedy

$$K(f) = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}\, K(f_{rs}) + \sum_{r=1}^{n} c_r\, K(f_r),$$

čili

$$[L_{kl}, L_{ij}](f) = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}(\delta_{sl}\delta_{ir}\delta_{jk} - \delta_{sj}\delta_{kr}\delta_{li}) = \delta_{jk}b_{il} - \delta_{li}b_{kj}, \tag{40}$$
$$[L_i, L_{kl}](f) = \sum_{r=1}^{n} c_r\delta_{kr}\delta_{li} = \delta_{li}c_k, \quad [L_i, L_j](f) = 0\,.$$

Máme-li tedy vektory

$$U = \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij}L_{ij} + \sum_{i=1}^{n} u_iL_i, \quad V = \sum_{k,l=1}^{n} v_{kl}L_{kl} + \sum_{k=1}^{n} v_kL_k, \tag{41}$$

je

$$[U, V] = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} u_{ij}v_{kl}[L_{ij}, L_{kl}] + \sum_{i,k,l=1}^{n} (u_iv_{kl} - v_iu_{kl})[L_i, L_{kl}] + \sum_{i,j=1}^{n} u_iv_j[L_i, L_j]$$

a

$$[U, V](f) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} u_{ij}v_{kl}(\delta_{li}b_{kj} - \delta_{jk}b_{il}) + \sum_{i,k,l=1}^{n} (u_i v_{kl} - v_i u_{kl})\,\delta_{li}c_k =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{ij}v_{ki}b_{kj} - \sum_{i,j,k=1}^{n} u_{ik}v_{kj}b_{ij} + \sum_{i,k=1}^{n} u_i v_{ki}c_k - \sum_{i,k=1}^{n} v_i u_{ki}c_k\,.$$

Protože $L_{ij}(f) = b_{ij}$, $L_i(f) = c_i$, je konečně

$$(42)\quad [U, V](f) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} v_{ik}u_{kj} - \sum_{k=1}^{n} u_{ik}v_{kj}\Big) L_{ij}(f) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} v_{ik}u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{ik}v_k\Big) L_i(f)\,.$$

V isomorfismu $i : T_e \to \mathscr{L}$ je

$$(43)\qquad iU = \langle U, u \rangle\,, \quad iV = \langle V, v \rangle\,; \quad U = (u_{ij}) \text{ atd.}\,;$$

$$(44)\qquad i[U, V] = \langle VU - UV, Vu - Uv \rangle\,.$$

Lieova algebra grupy $\mathfrak{A}^+$ je tedy isomorfní s vektorovým prostorem $\mathscr{L}$ s komposicí

$$(45)\qquad [\langle L, \lambda \rangle, \langle L', \lambda' \rangle] = \langle L'L - LL', L'\lambda - L\lambda' \rangle\,.$$

3. STYK SYSTÉMŮ PODGRUP

1. Styk systémů podprostorů reálného vektorového prostoru. Buď dán reálný n-dimensionální vektorový prostor V_n s basí $J_1, \ldots, J_n$. Ve V_n buď dán m-dimensionální podprostor M_m, jehož basí jsou vektory $K_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ai} J_i$, $a = 1, \ldots, m$. Jestliže prostor M_m závisí na parametru t, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, pak položme $\alpha_{ai} = \alpha_{ai}(t)$. Jednoparametrický systém prostorů $M_m = M_m(t)$ nazýváme právě *z-krát diferencovatelným*, jestliže base prostorů $M_m(t)$ je možno voliti tak, že funkce $\alpha_{ai}(t)$ jsou z-krát diferencovatelné, ale není možno voliti je tak, aby všechny funkce $\alpha_{ai}(t)$ byly $(z + 1)$-krát diferencovatelné.

Mějme jednoparametrické systémy prostorů $M_m = M_m(t)$ a $M_m^* = M_m^*(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, jež jsou v korespondenci, dané rovností parametrů; předpokládejme, že oba jsou aspoň r-krát diferencovatelné. Řekneme, že oba systémy mají v prostoru $M_m(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, styk právě r-tého řádu, jestliže lze v nich zvolit base $K_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ai}(t)\, J_i$, $K_a^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ai}^*(t)\, J_i$ tak, že

$$(46)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}^s \alpha_{ai}}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^s \alpha_{ai}^*}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0}$$

$$\text{pro } a = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, r\,,$$

ale není možno voliti tyto base tak, že

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{r+1} \alpha_{ai}}{\mathrm{d}t^{r+1}}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{r+1} \alpha_{ai}^*}{\mathrm{d}t^{r+1}}\right)_{t=t_0} \quad \text{pro } a = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n\,.$$

Tato definice je invariantní vzhledem k volbě základní base $J_1, \ldots, J_n$ prostoru V_n. Zvolím-li totiž jinou basi $I_1, \ldots, I_n$ tak, že $J_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} I_j$, je

$$K_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ai}(t)\, I_i\,, \quad K_a^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ai}^*(t)\, I_i\,,$$

$$\beta_{ai}(t) = \sum_{y=1}^{n} a_{ji}\, \alpha_{aj}(t)\,, \quad \beta_{ai}^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, \alpha_{aj}^*(t)\,.$$

Podmínka (46) je pak nahrazena podmínkou

$$\left(\frac{\mathrm{d}^s \beta_{ai}}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^s \beta_{ai}^*}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0} \tag{47}$$

$$\text{pro } a = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, r\,.$$

Podmínky (46) a (47) jsou však ekvivalentní; důkaz implikace (46) $\Rightarrow$ (47) je triviální. Nechť naopak pro určité s $(0 \leqq s \leqq r)$ platí (47), tedy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left(\frac{\mathrm{d}^s \alpha_{aj}}{\mathrm{d}t^s} - \frac{\mathrm{d}^s \alpha_{aj}^*}{\mathrm{d}t^s}\right) = 0 \tag{48}$$

pro všechna $a = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$; protože det $|a_{ij}| \neq 0$, existuje k matici (a_{ij}) inversní matice $(\tilde{a}_{ij})$, takže platí $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \tilde{a}_{kj} = \delta_{ij}$ a z (48) plyne

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left(\frac{\mathrm{d}^s \alpha_{aj}}{\mathrm{d}t^s} - \frac{\mathrm{d}^s \alpha_{aj}^*}{\mathrm{d}t^s}\right) = \frac{\mathrm{d}^s \alpha_{ak}}{\mathrm{d}t^s} - \frac{\mathrm{d}^s \alpha_{ak}^*}{\mathrm{d}t^s} = 0\,,$$

čili (46). Že rovnice (46) jsou invariantní při změně parametru $t = t(\bar{t})$ je dobře známo.

2. Styk systémů podgrup analytické grupy. Buď dána analytická grupa $\mathfrak{G}$ a v ní systém analytických podgrup téže dimense, závislých na parametru $t : \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Budiž $\mathfrak{g}$ Lieova algebra grupy $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(t)$ systém jejích podalgeber, odpovídajících podgrupám $\mathfrak{H}(t)$. Řekneme, že systém $\mathfrak{H}(t)$ je právě *z-krát diferencovatelný*, jestliže systém vektorových podprostorů $\mathfrak{h}(t)$ v prostoru $\mathfrak{g}$ je právě z-krát diferencovatelný. Budiž dán jiný alespoň z-krát diferencovatelný systém podgrup $\mathfrak{K}(t)$, jenž je v korespondenci se systémem podgrup $\mathfrak{H}(t)$. Řekneme, že systémy množin $\mathfrak{H}(t)$ a $\mathfrak{K}(t)$ mají v podgrupě $\mathfrak{H}(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, *styk* právě (aspoň) *r-tého řádu* $(r \leqq z)$, jestliže systémy podprostorů $\mathfrak{h}(t)$ a $\mathfrak{k}(t)$ mají v prostoru $\mathfrak{h}(t_0)$ styk právě (aspoň) r-tého řádu.

Budiž nyní X analytická varieta, na níž působí analytická grupa $\mathfrak{G}$, tj. každému prvku $g \in \mathfrak{G}$ je přiřazeno vzájemně jednoznačné zobrazení $T_g : X \to X$ (příslušné inversní zobrazení označme T_g^{-1}) a dále platí, že množina všech T_g tvoří grupu isomorfní s $\mathfrak{G}$ při isomorfismu $\iota g = T_g$. V X buď dán jednoparametrický systém podmnožin $\mathscr{R} = \mathscr{R}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, takových, že množina všech $g \in \mathfrak{G}$ pro něž $T_g\, \mathscr{R}(t) =$

$= \mathscr{R}(t)$ tvoří analytickou podgrupu $\mathfrak{H}(t)$ grupy $\mathfrak{G}$ dimense $\tau \geqq 1$, při čemž τ nezávisí na t. Systém takovýchto množin $\mathscr{R}(t)$ nazvěme potom přípustným systémem řádu τ.

Buďtež $\mathscr{R}(t)$ resp. $\mathscr{S}(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, množiny, tvořící přípustné systémy podmnožin stejného řádu τ v prostoru X; označme $\mathfrak{R}(t)$ resp. $\mathfrak{S}(t)$ podgrupu v $\mathfrak{G}$, tvořenou všemi $g \in \mathfrak{G}$, pro něž $T_g \mathscr{R}(t) = \mathscr{R}(t)$ resp. $T_g \mathscr{S}(t) = \mathscr{S}(t)$. Potom říkáme, že systém $\mathscr{R}(t)$ je *z-krát diferencovatelný*, jestliže systém $\mathfrak{R}(t)$ je z-krát diferencovatelný. Dva aspoň r-krát diferencovatelné systémy podmnožin $\mathscr{R}(t)$ resp. $\mathscr{S}(t)$ mají v množině $\mathscr{R}(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, *styk řádu* právě (alespoň) *r-tého*, jestliže systémy podgrup $\mathfrak{R}(t)$ resp. $\mathfrak{S}(t)$ mají v $\mathfrak{R}(t_0)$ styk právě (alespoň) r-tého řádu.

3. Styk křivek v afinním prostoru. Abychom ukázali oprávněnost naší definice, ukážeme následující větu:

V afinním prostoru A_n buďtež dány dvě aspoň r-krát diferencovatelné křivky $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, jež mají v bodě $x(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, styk právě r-tého řádu. Buď $\mathfrak{A}$ Lieova grupa všech regulárních afinit prostoru A_n na sebe, $\mathfrak{A}^+$ souvislá komponenta jejího jednotkového prvku. Buď $\mathfrak{A}^0(t) \equiv \mathfrak{A}^0(x(t))$ resp. $\mathfrak{A}^{0*}(t) \equiv \mathfrak{A}^0(y(t))$ podgrupa všech těch afinit grupy $\mathfrak{A}$, které zachovávají bod $x(t)$ resp. $y(t)$. Pak systémy $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}^0(t) \cap \mathfrak{A}^+$, $\mathfrak{A}^*(t) = \mathfrak{A}^{0*}(t) \cap \mathfrak{A}^+$ jsou aspoň r-krát diferencovatelné a mají v grupě $\mathfrak{A}(t_0)$ styk právě r-tého řádu. Tuto větu je možno obrátiti.

Důkaz. V prostoru A_n zvolme afinní systém souřadnicový, bod $x(t)$ nechť má souřadnice $[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$. Předpokládám tedy, že funkce $x_i(t)$, $y_i(t)$ jsou aspoň r-krát diferencovatelné a

$$\left(\frac{\mathrm{d}^s x_i}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^s y_i}{\mathrm{d}t^s}\right)_{t=t_0} \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n;\, s = 0, 1, \ldots, r\,, \tag{49}$$

ale není

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{r+1} x_i}{\mathrm{d}t^{r+1}}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}^{r+1} y_i}{\mathrm{d}t^{r+1}}\right)_{t=t_0} \quad \text{pro všechna } i\,. \tag{50}$$

Lieova algebra grupy $\mathfrak{A}^+$ je isomorfní s vektorovým prostorem $\mathscr{L}$, za jehož basi můžeme zvoliti vektory L_{ij}, L_i výše zavedené. Lieova podalgebra, odpovídající podgrupě $\mathfrak{A}(t)$ resp. $\mathfrak{A}^*(t)$, je pak vektorový podprostor $\mathscr{L}(t)$ resp. $\mathscr{L}^*(t)$, tvořený vektory

$$K_{ij}(t) = L_{ij} - x_j(t)\, L_i \quad \text{resp.} \quad K^*_{ij}(t) = L_{ij} - y_j(t)\, L_i\,,\; i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Souřadnice vektorů K_{ij}, K^*_{ij} jsou jednak konstanty, jednak tvaru $x_i(t)$, $y_i(t)$, takže závěr prvé části důkazu je již jasný.

Ukažme správnost věty obrácené. V prostoru $\mathscr{L}^*(t)$ zvolme basi

$$K^0_{ij}(t) = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{ij,kl}\, K^*_{kl}(t) = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{ij,kl}\, L_{kl} - \sum_{k,l=1}^{n} \alpha_{ij,kl}\, y_l(t)\, L_k\,.$$

Nechť nyní systémy $\mathscr{L}(t)$ a $\mathscr{L}^*(t)$ mají styk nultého řádu a nechť $K_{ij}(t_0) = K^0_{ij}(t)$. Protože mohu psáti

$$K_{ij}(t) = \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{ij,kl} L_{kl} - \sum_{k=1}^{u} \delta_{ki}\, x_j(t)\, L_k\,,$$

kde $\delta_{ij,kl} = 1$ resp. 0 pro stejné resp. různé dvojice ij, mn, je zřejmě $\alpha_{ij,kl} = \delta_{ij,kl}$, takže $K^0_{ij}(t_0) = K^*_{ij}(t_0)$. Zbytek důkazu je již jasný.

Резюме

КАСАНИЕ СИСТЕМ ПОДГРУПП ГРУППЫ ЛИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть V — аналитическое многообразие, $\mathfrak{G}$ — группа Ли взаимно однозначных преобразований многообразия V на себя; $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$; $\mathscr{R} = \mathscr{R}(t)$, $t_1 < t < t_2$ — однопараметрическая система подмножеств многообразия V; $\mathfrak{H}(t)$ — максимальная группа элементов из $\mathfrak{G}$, для которых соответствующие преобразования сохраняют $\mathscr{R}(t)$; $\dim \mathfrak{h}(t) \geqq 1$ не зависит от t; $\mathscr{S}(t)$ — система с подобными же свойствами, как и $\mathscr{R}(t)$ (с группами $\mathfrak{K}(t)$ и алгебрами $\mathfrak{k}(t)$); $\dim \mathfrak{h}(t) = \dim \mathfrak{k}(t)$.

Определение 1. Пусть V_n — векторное пространство; $I_1, \ldots, I_n$ — его базис; $V'_m(t)$ и $V''_m(t)$ — две системы его подпространств. Система $V'_m(t)$ является z раз дифференцируемой, если в каждом $V'_m(t)$ существует базис

$$I'_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_{ai}(t)\, I_i\,, \quad a = 1, \ldots, m$$

так, что α'_{ai} — z раз дифференцируемые функции. z раз дифференцируемые системы $V''_m(t)$, $V'_m(t)$ имеют касание порядка s ($s \leqq z$) в пространстве $V'_m(t_0)$, $t_1 < t < t_2$, если в каждом $V'_m(t)$, соотв. $V''_m(t)$ существует базис $I'_a(t)$, соотв. $I''_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha''_{ai}(t)\, I_i$ так, что

$$\alpha'_{ai}(t_0) = \alpha''^{(p)}_{ai}(t_0) \quad \text{для} \quad a = 1, \ldots, m\,; \quad i = 1, \ldots, n\,; \quad p = 0, 1, \ldots, s\,;$$
$$\alpha'^{(s+1)}_{ai}(t_0) \neq \alpha''^{(s+1)}_{ai}(t_0) \quad \text{для некоторых} \quad a, i\,.$$

Определение 2. Система $\mathscr{R}(t)$ является z раз дифференцируемой, если система $\mathfrak{h}(t)$ подпространств пространства $\mathfrak{g}$ z раз дифференцируема. z раз дифференцируемые системы $\mathscr{R}(t)$ и $\mathscr{S}(t)$ имеют касание порядка s ($s \leqq z$) в множестве $\mathscr{R}(t_0)$, если системы $\mathfrak{h}(t)$ и $\mathfrak{k}(t)$ имеют касание порядка s в пространстве $\mathfrak{h}(t_0)$.

Определение 3. Пусть A_n — аффинное пространство; $P, I_1, \ldots, I_n$ — его базис; пусть даны две кривые

$$X(t) = P + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\, I_i\,, \quad Y(t) = P + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, I_i\,.$$

Кривая $X(t)$ будет z раз дифференцируемой, если функции $x_i(t)$ являются z раз

дифференцируемыми. Кривые имеют касание порядка s ($s \leqq z$) в точке $X(t_0)$, если

$$x_i^{(p)}(t_0) = y_i^{(p)}(t_0) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n\,; \quad p = 0, 1, \ldots, s\,;$$

$$x_i^{(s+1)}(t_0) \neq y_i^{(s+1)}(t_0) \quad \text{для некоторого значения } i.$$

Теорема. *Пусть* $V = A_n$; $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ — *группа Ли регулярных аффинных отображений пространства* A_n *на себя;* $\mathscr{R}(t) = X(t)$ *и* $\mathscr{S}(t) = Y(t)$ — *две кривые в* A_n. *Тогда определения* 2 *и* 3 *касания кривых совпадают. Если кривая* $X(t)$ z *раз дифференцируема по определению* 3 (соотв. 3), *то она* z' *раз дифференцируема по определению* 3 (соотв. 2), *причем* $z' \geqq z$.

Résumé

CONTACT DES SYSTÈMES DES SOUSGROUPES D'UN GROUPE DE LIE

ALOIS ŠVEC, Praha

Soit: V une variété analytique, $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie des transformations biunivoques de V en elle-même; $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe $\mathfrak{G}$; $\mathscr{R} = \mathscr{R}(t)$, $t_1 < t < t_2$, un système 1-paramètrique des sousensembles de la variété V; $\mathfrak{H}(t)$ la groupe maximale des éléments de $\mathfrak{G}$ pour lesquels les transformations correspondantes laissent fixe $\mathscr{R}(t)$; dim $\mathfrak{h}(t) \geqq 1$ ne dépend pas de t; $\mathscr{S}(t)$ un système aux propriétés analogues aux celles de $\mathscr{R}(t)$ (avec les groupes $\mathfrak{K}(t)$ et les algèbres $\mathfrak{k}(t)$; dim $\mathfrak{h}(t) =$ dim $\mathfrak{k}(t)$.

Définition 1. Soient: V_n un espace vectoriel; $I_1, \ldots, I_n$ sa base; $V'_m(t)$ et $V''_m(t)$ deux systèmes de ses sousespaces. Le système $V'_m(t)$ est z-fois différentiable si dans chaque $V'_m(t)$ il existe la base

$$I'_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_{ai}(t)\, I_i\,, \quad a = 1, \ldots, m\,,$$

de sorte que $\alpha'_{ai}(t)$ soient z-fois différentiables. Les systèmes $V'_m(t) V''_m(t)$ z-fois différentiables ont un contact d'ordre $s\,(s \leqq z)$ à l'espace $V'_m(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, si dans chaque $V'_m(t)$ ou $V''_m(t)$ resp. il existe la base $I'_a(t)$ ou $I''_a(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha''_a(t)\, I_i$ resp. de sorte que

$$\alpha'^{(p)}_{ai}(t_0) = \alpha''^{(p)}_{ai}(t_0) \text{ pour } a = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n;\ p = 0, 1, \ldots, s\,;$$

$$\alpha'^{(s+1)}_{ai}(t_0) \neq \alpha''^{(s+1)}_{ai}(t_0) \text{ pour certaines valeurs d'} a,\ i.$$

Définition 2. Le système $\mathscr{R}(t)$ est z-fois différentiable si le système $\mathfrak{h}(t)$ de sousespaces de l'espace $\mathfrak{g}$ est z-fois différentiable. Les systèmes $\mathscr{R}(t)$ et $\mathscr{S}(t)$ z-fois différentiables ont un contact d'ordre s ($s \leqq z$) à l'ensemble $\mathscr{R}(t_0)$ si les systèmes $\mathfrak{h}(t)$ et $\mathfrak{k}(t)$ ont un contact d'ordre s à l'espace $\mathfrak{h}(t_0)$.

Définition 3. Soit A_n un espace affin; $P, I_1, \ldots, I_n$ sa base; soient données deux courbes

$$X(t) = P + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\, I_i\,, \quad Y(t) = P + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\, I_i\,.$$

La courbe $X(t)$ est z-fois différentiable si les fonctions $x_i(t)$ sont z-fois différentiables. Les courbes ont un contact d'ordre s ($s \leqq z$) au point $X(t_0)$ si

$$x_i^{(p)}(t_0) = y_i^{(p)}(t_0) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n;\ p = 0, 1, \ldots, s\,;$$

$$x_i^{(s+1)}(t_0) \neq y_i^{(s+1)}(t_0) \quad \text{pour certaine valeur d'}i\,.$$

Théorème. *Soient*: $V = A_n$; $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ *le groupe de Lie des affinités régulières d'espace* A_n *en soi-même*; $\mathscr{R}(t) = X(t)$ *et* $\mathscr{S}(t) = Y(t)$ *deux courbes dans* A_n. *Alors les définitions 2 et 3 du contact des deux courbes coïncident. Si la courbe* $X(t)$ *est* z*-fois différentiable d'après la définition 2 (ou 3 resp.), alors elle est* z'*-fois différentiable d'après la définition 3 (ou 2 resp.) où* $z' \geqq z$.