Josef Král

Jeden příklad harmonického svazku

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 1, 98--99

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108688

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

JEDEN PŘÍKLAD HARMONICKÉHO SVAZKU

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 24. února 1975)

Buď X lokálně kompaktní (Hausdorffův) topologický prostor. V teorii harmonických prostorů (viz [3]) se harmonickým svazkem na X rozumí zobrazení $\mathscr{H}$, přiřazující každé neprázdné otevřené množině $U \subset X$ vektorový prostor $\mathscr{H}(U)$ spojitých reálných funkcí na U takovým způsobem, že jsou splněny následující požadavky:

a) Jsou-li množiny $\emptyset \neq U \subset V \subset X$ otevřené, pak pro každou funkci $h \in \mathscr{H}(V)$ patří její restrikce na množinu U do prostoru $\mathscr{H}(U)$.

b) Je-li množina U sjednocením neprázdného systému $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ otevřených množin $U_\iota \neq \emptyset$ a je-li h taková funkce na U, že její restrikce na množinu U_ι patří do $\mathscr{H}(U_\iota)$ pro každé $\iota \in I$, pak $h \in \mathscr{H}(U)$.

Připomeňme ještě, že relativně kompaktní otevřená množina $V \subset X$ s hranicí $\partial V \neq \emptyset$ se nazývá $\mathscr{H}$-regulární, jestliže ke každé spojité reálné funkci f na ∂V existuje právě jedna funkce $H_f^V \in \mathscr{H}(V)$ taková, že

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in V}} H_f^V(x) = f(y)$$

pro každé $y \in \partial V$, a jestliže navíc $H_f^V \geqq 0$ na V v případě, že $f \geqq 0$ na ∂V. V Bauerově i Brelotově axiomatice harmonických prostorů se žádá, aby $\mathscr{H}$-regulární množiny tvořily bázi topologie prostoru X a tento tzv. axiom báze se doplňuje výše formulovaným axiomem svazku (sestávajícím z požadavků a), b)) a vhodným konvergenčním axiomem. N. Boboc, C. Constantinescu a A. Cornea dokázali v [1] (viz též kap. 1 v [3]), že prostor X je nutně lokálně souvislý, je-li opatřen harmonickým svazkem $\mathscr{H}$, jenž je nedegenerovaný v každém bodě $x \in X$ (v tom smyslu, že existuje otevřené okolí U bodu x a funkce $h \in \mathscr{H}(U)$ tak, že $h > 0$ na U) a splňuje následující Bauerův konvergenční axiom:

Pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset X$ a každou lokálně omezenou neklesající posloupnost funkcí $h_n \in \mathscr{H}(U)$ je $\lim\limits_n h_n \in \mathscr{H}(U)$.

V definici Brelotova harmonického prostoru se postuluje axiom svazku, axiom báze a následující Brelotův konvergenční axiom (srv. [2]):

Je-li D otevřená souvislá podmnožina v X a $\{h_n\}$ neklesající posloupnost funkcí z $\mathscr{H}(D)$ taková, že posloupnost $\{h_n(x)\}$ konverguje aspoň pro jeden bod $x \in D$, pak tato posloupnost konverguje pro všechna $x \in D$ a $\lim\limits_n h_n \in \mathscr{H}(D)$.

Tyto axiomy se zpravidla doplňují požadavkem lokální souvislosti prostoru X. S ohledem na výše citovaný výsledek N. Boboca, C. Constantinesca a A. Cornea přirozeně vzniká otázka (kterou na semináři z matematické analýzy formuloval J. Lukeš), zda souvislý prostor X opatřený nedegenerovaným harmonickým svazkem splňujícím axiom báze a Brelotův konvergenční axiom je již nutně lokálně souvislý. Poznamenejme při této příležitosti, že v knize [4] je požadavek lokální souvislosti prostoru X při definici Brelotova harmonického prostoru opominut, i když se v dalším výkladu jeho lokální souvislosti využívá; tato okolnost vzbuzuje dojem, že odpověď na právě zmíněnou otázku by mohla být kladná. Následující jednoduchý příklad však ukazuje, že tomu tak není a že v definici Brelotova prostoru je třeba lokální souvislost zvlášť požadovat.

Příklad. Položme $S = \{[x, y];\ x > 0,\ y = \sin(1/x)\}$ a definujme na S funkci

$$s : [x, y] \mapsto \int_{1/\pi}^{x} \sqrt{(1 + x^{-4} \cos^2 x^{-1})}\, dx\,,$$

jejíž hodnotou v bodě $[x, y]$ je orientovaná délka grafu funkce $y = \sin(1/x)$ mezi úsečkou $1/\pi$ a úsečkou x (tuto délku měříme záporně v případě $x < 1/\pi$). Položme $X_0 = \{0\} \times (-1, 1)$ a nechť $X = X_0 \cup S$; na prostoru X uvažujme topologii indukonou z roviny. Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ označme symbolem $\mathscr{H}(U)$ třídu všech spojitých reálných funkcí h na U s následující vlastností:

Ke každé komponentě D množiny $U \cap S$ existují reálné konstanty k_1, k_2 tak, že $h = k_1 + k_2 s$ na D.

Není obtížné nahlédnout, že $\mathscr{H} : U \mapsto \mathscr{H}(U)$ je harmonický svazek na X, jenž je nedegenerovaný v každém bodě prostoru X (poznamenejme, že konstantní funkce na X patří do $\mathscr{H}(X)$). Snadno se též zjistí, že $\mathscr{H}$-regulární množiny tvoří bázi topologie X. Je-li D libovolná otevřená souvislá množina v prostoru X, pak v případě $D \cap X_0 \neq \emptyset$ sestává $\mathscr{H}(D)$ jedině z konstantních funkcí a Brelotův konvergenční axiom je pro D splněn; v případě $D \subset S$ je tento konvergenční axiom rovněž splněn, neboť funkce z $\mathscr{H}(D)$ jsou pak lineární v s. Prostor X je přitom souvislý, ale nikoli lokálně souvislý.

Literatura

[1] *N. Boboc, C. Constantinescu, A Cornea:* Axiomatic theory of harmonic functions. Nonnegative superharmonic functions. Annales de l'Institut Fourier Grenoble *XV* (1965), 283—312.

[2] *M. Brelot:* Extension axiomatique des fonctions sous-harmoniques I. C.R. Acad. Sci. Paris *246* (1958), 2709—2712.

[3] *C. Constantinescu, A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1972.

[4] *N. du Plessis:* An introduction to potential theory. Oliver & Boyd, Edinburgh 1970.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).