Pavel Kostyrko

O postupnostiach prirodzených čísel s ohraničeným počtom prvočíselných deliteľov

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 3, 332--333

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108678`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

RŮZNÉ

O POSTUPNOSTIACH PRIRODZENÝCH ČÍSEL S OHRANIČENÝM POČTOM PRVOČÍSELNÝCH DELITEĽOV

PAVEL KOSTYRKO, Bratislava

(Došlo dňa 8. marca 1971)

V monografii [1], str. 332, príkl. 9 sa dokazuje nasledujúce tvrdenie: *Najväčší počet po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré majú nanajvýš dva rôzne prvočíselné delitele je 29. Jedinou 29-člennou postupnosťou s touto vlastnosťou je postupnosť* 1, 2, ..., 29. V tomto článku dokážeme nasledujúce obecnejšie tvrdenie.

Veta. *Nech q je prirodzené číslo a nech $m(q)$ je najväčšie číslo s touto vlastnosťou: existuje $m(q)$ po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré majú nanajvýš q rôznych prvočíselných deliteľov. Potom platí:*

1) $m(q) = \prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1$, *kde* $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je rastúca postupnosť všetkých prvočísel,*

2) *pre každé prirodzené q existuje práve jedna $m(q)$-členná postupnosť s uvedenou vlastnosťou a je ňou postupnosť* $1, 2, \ldots, m(q)$.

Dôkaz. Ľahko sa možno presvedčiť, že každý člen postupnosti $1, 2, \ldots, \prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1$ má nanajvýš q rôznych prvočíselných deliteľov. V opačnom prípade by totiž existovala rastúca postupnosť $j_1, \ldots, j_r$ $(r > q)$ prirodzených čísel a prirodzené čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tak, že

$$p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \cdots p_{j_r}^{\alpha_r} \leqq \prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1$$

čo vedie, vzhľadom na nerovnosti

$$\prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1 < \prod_{i=1}^{q+1} p_i \leqq p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \cdots p_{j_r}^{\alpha_r}$$

ku sporu. Teda $m(q) \geqq \prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1$. V poslednej nerovnosti však nemôže nastať ostrá nerovnosť, pretože v každej postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel majúcej aspoň $\prod_{i=1}^{q+1} p_i$ členov sa nachádza člen deliteľný $\prod_{i=1}^{q+1} p_i$, ktorý má aspoň $q + 1$ rôznych prvočíselných deliteľov. Teda $m(q) = \prod_{i=1}^{q+1} p_i - 1$.

Ak

$$(1) \qquad s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ s + m(q)$$

je postupnosť, ktorej každý člen má nanajvýš q rôznych prvočíselných deliteľov, potom nutne $s = t \prod_{i=1}^{q+1} p_i$ (t – celé nezáporné číslo). V opačnom prípade by totiž postupnosť (1) obsahovala člen, ktorý by mal prvočíselné delitele $p_1, \ldots, p_{q+1}$. Ukážeme, že za predpokladu $t > 0$ má niektorý z členov postupnosti (1) viac než q rôznych prvočíselných deliteľov. Uvažujme o týchto $p_{q+1} - 1$ členoch postupnosti (1)

$$(2) \qquad s + j \prod_{i=1}^{q} p_i = \prod_{i=1}^{q} p_i (t p_{q+1} + j) \quad j = 1, 2, \ldots, p_{q+1} - 1$$

V ďalšom budeme používať nasledujúce známe tvrdenie: Ak $n > k$, tak v postupnosti prirodzených čísel $n, n + 1, \ldots, n + k - 1$ existuje aspoň jedno číslo, ktoré má prvočíselného deliteľa p, $p > k$ (pozri [1], str. 401). Ak položíme $n = t p_{q+1} + 1$ a $k = p_{q+1} - 1$ do hore uvedeného tvrdenia, tak podmienka $n > k$ bude splnená pretože $t > 0$. Z citovaného tvrdenia plynie, že existuje j_0, $1 \leqq j_0 \leqq p_{q+1} - 1$ tak, že $t p_{q+1} + j_0$ obsahuje prvočíselného deliteľa $p > p_q$, teda v dôsledku (2) $s + j_0 \prod_{i=1}^{q} p_i$ má viac než q rôznych prvočíselných deliteľov.

Literatúra

[1] *Sierpiński W.:* Teoria liczb II, Warszawa 1959.

Author's address: Bratislava, Mlynská dolina (Prírodovedecká fakulta UK).