Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Hustý
Asymptotické vlastnosti integrálů homogenních lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 4, 487--490

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108646`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

REFERÁTY

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI INTEGRÁLŮ HOMOGENNÍCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 2. ŘÁDU

(Vlastní referát Z. HUSTÉHO o přednášce proslovené na Kurzweilově semináři matematického ústavu ČSAV v Praze ve dnech 11., 18. a 25. března 1965.)

Nechť existuje řešení $z(x)$ rovnice (a) $z''(x) + 2a_1(x)\,z'(x) + a_2(x)\,z(x) = 0$, $a_i \in C_0(I_1)$, $i = 1, 2$, $I_1 \equiv \langle x_1, \infty)$ s vlastností:

(1) existuje číslo $x_0 \geqq x_1$ takové, že $z(x) > 0$ pro $x \geqq x_0$.

Utvořme funkci $G[z, x] = \int_{x_0}^{x} \exp\{-2\int_{x_0}^{s} a_1\,d\sigma\}\, z^{-2}(s)\,ds$. Existuje $\lim\limits_{x\to\infty} G[z, x] = C > 0$. Jestliže $C = \infty$, pak funkci $z(x)$ nazýváme *hlavním řešením* rovnice (a). Jestliže $C < \infty$, utvoříme funkci $g[z, x] = \int_x^\infty \exp\{-2\int_{x_0}^{s} a_1\,d\sigma\}\, z^{-2}\,ds$. Pak $\lim\limits_{x\to\infty} G\{zg[z, x], x\} = \infty$, a funkce $z(x)\,g[z, x]$ je hlavním řešením rovnice (a) s vlastností (1). Rovnice (a) je neoscilatorická, když a jen když má hlavní řešení. Každá dvě hlavní řešení jsou lineárně závislá. Uspořádanou dvojici integrálů z_1, z_2 rovnice (a) nazveme *hlavní básí* rovnice (a) v intervalu $\langle x_0, \infty)$, jestliže z_1 má vlastnost (1), $\lim\limits_{x\to\infty} G[z_1, x] < \infty$ a $z_2(x) = cz_1g[z_1, x]$, $0 < c \in E_1$ je hlavní řešení s vlastností (1). Hlavní bási z_1, z_2 rovnice (a) v intervalu $\langle x_0, \infty)$ nazveme *pravidelnou* resp. *polopravidelnou* v interv alu$\langle \xi_0, \infty)$, $\xi_0 \geqq x_0$, jestliže $z_2' \neq 0$ pro $x \geqq \xi_0$, $0 < m \leqq |z_1'z_2/z_1z_2'| \leqq M$, $m, M \in E_1$ resp. $z_2 = \text{konst.} > 0$, $z_1'/z_1 = O(1)$. V práci [1; 21] je zaveden pojem pravidelné rovnice. Pravidelná rovnice má vždy v jistém intervalu (zprava neohraničeném) pravidelnou bási.

1. ASYMPTOTICKÉ VZORCE

1.1. Nechť z_1, z_2 je báse rovnice (a). Jestliže platí

$$(2)\quad \int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} a_1\,ds\right\} |p_1 z_j' z_k|\,dx < \infty\,, \quad \int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} a_1\,ds\right\} |p_2 z_j z_k|\,dx < \infty\,,$$

$$j, k = 1, 2\,,$$

pak rovnice

$$(3) \qquad Z''(x) + 2[a_1(x) + p_1(x)]\, Z'(x) + [a_2(x) + p_2(x)]\, Z(x) = 0\,,$$
$$a_i,\, p_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 1, 2\,,$$

má bási

$$Z_j = z_j[1 + o(1)] + z_k o(1), \quad Z'_j = z'_j[1 + o(1)] + z'_k o(1)\,, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k\,.$$

1.2. Nechť z_1, z_2 je pravidelná resp. polopravidelná báse rovnice (a) v intervalu I_1. Jestliže platí (2) pro $j, k = 1, 2, j \neq k$, pak rovnice (3) má hlavní bási

$$Z_i = z_i[1 + o(1)]\,, \quad i = 1, 2\,, \quad Z'_1 = z'_1[1 + o(1)]\,,$$

kde hlavní řešení Z_2 má derivaci $Z'_2 = z'_2[1 + o(1)]$ resp. $Z'_2 = o(1)$.

1.3. Nechť jsou dány rovnice

$$(\mathrm{Q}) \qquad \ddot{Y}(t) + 2Q_1(t)\, \dot{Y}(t) + Q_2(t)\, Y(t) = 0\,, \quad Q_i \in C_0(I_2)\,, \quad I_2 \equiv \langle t_1, \infty)\,,$$

$$(\mathrm{q}) \qquad y''(x) + 2q_1(x)\, y'(x) + q_2(x)\, y(x) = 0\,, \quad q_i \in C_0(I_1).$$

Hlavní věta. *Nechť existují kladné funkce f, H, φ, ψ, Φ, Ψ v vlastnostmi:*

$$(4) \qquad H, f \in C_2(I_1)\,, \quad H' > 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} H(x) = \infty\,, \quad H(I_1) = I_2\,, \quad \varphi^2 = \Phi\,, \quad \varphi\psi = \Psi\,.$$

Nechť dále je splněna jedna z následujících podmínek: (i) $Y(t) = O[\varphi(t)]$, $\dot{Y}(t) = O[\psi(t)]$, *kde* $Y(t)$ *je obecné řešení rovnice* (Q), (ii) $Y_j Y_k = O[\Phi(t)]$, $\dot{Y}_j Y_k = O[\Psi(t)]$, $j, k = 1, 2, j \neq k$, *kde* $Y_i(t)$, $i = 1, 2$ *je pravidelná resp. polopravidelná báse rovnice* (Q) *v intervalu* I_2 (v případě polopravidelné báse požadujeme navíc $H' = O(1)$). *Jestliže platí* $\int_{x_1}^{\infty} \exp\{2 \int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1\, \mathrm{d}s\}\, \Psi(H)\, |q_1|\, \mathrm{d}x < \infty$,

$$(5) \qquad \int_{x_0}^{\infty} \exp\left\{2 \int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1\, \mathrm{d}s\right\} \Psi(H) \left|\mathrm{d} \log\left(f^2 H' \exp\left\{-2 \int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1\, \mathrm{d}s\right\}\right)\right| < \infty\,,$$

$$(6) \qquad \int_{x_1}^{\infty} |f''f + 2q_1 f f' + q_2 f^2 - f^2 H'^2 Q_2(H)|\, \Phi(H)\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

pak platí

$$\lim_{x\to\infty} f^2 H' \exp\left\{-2 \int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1\, \mathrm{d}s\right\} = c\,, \quad 0 < c \in E_1$$

a rovnice (q) *má v případě* (i) *bási* $y_j = f\{Y_j(H)\,[1 + o(1)] + Y_k(H)\, o(1)\}$, $y'_j = f'\{Y_j(H)\,[1 + o(1)] + Y_k o(1)\} + fH'\{\dot{Y}_j(H)\,[1 + o(1)] + \dot{Y}_k(H)\, o(1)\}, j, k = 1, 2$, $j \neq k$, *v případě* (ii) *má hlavní bási* $y_i = fY_i(H)\,[1 + o(1)]$, $i = 1, 2$, $y'_1 = f'Y_1(H)\,.$ $.\,[1 + o(1)] + fH'\dot{Y}_1(H)\,[1 + o(1)]$. *Jestliže* Y_i, $i = 1, 2$ *je pravidelná resp. polopravidelná báse, pak hlavní řešení má derivaci* $y'_2 = f'Y_2(H)\,[1 + o(1)] + fH'\dot{Y}_2(H)\,[1 + o(1)]$ *resp.* $y'_2 = f'[1 + o(1)] + fo(1)$.

V dalších odstavcích předpokládáme, že funkce f, H mají vlastnosti (4) a že je splněna aspoň jedna z podmínek (i), (ii).

1.4. Jestliže platí $\int_{x_1}^{\infty} H^{-2a} \Psi(H) |q_1| \, dx < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{-2a} \Psi(H) |d \log (f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} |f''f + 2q_1 ff' + q_2 f^2 - f^2 H'^2 [Q(H) + a(a+1)/H^2]| \Phi(H) \, dx < \infty$, $a \in E_1$, pak $\lim_{x \to \infty} f^2 H^{2a} H' = c$, $0 < c \in E_1$ a rovnice (q) má fundamentální systém, který je uveden v hlavní větě, jestliže položíme

$$Q_1 = -\frac{a}{t}, \quad Q_2 = Q(t) + \frac{a(a+1)}{t^2}.$$

Poznámka. Jestliže položíme $f = e^H$, $Q(t) = -1$, obdržíme následující tvrzení: *Jestliže platí* $\int_{x_1}^{\infty} |q_1| \, dx < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} |d \log (e^{2H} H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a} e^{2H} |H'' + 2H'^2 + 2H' q_1 + q_2| \, dx < \infty$, *pak rovnice* (q) *má hlavní bási* $y_1 = e^{2H} H^a [1 + o(1)]$, $y_2 = H^a [1 + o(1)]$, $y_1' = 2e^{2H} H' H^a [1 + o(1)]$, $y_2' = o(H' H^a)$. Zvolíme-li dále $H = \frac{1}{2} \log x$, $a = 0$, obdržíme známý výsledek: *Jestliže* $\int_{x_1}^{\infty} |q_1| \, dx < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} x |q_2| \, dx < \infty$, pak rovnice (q) má hlavní bási $y_1 = x[1 + o(1)]$, $y_2 = 1 + o(1)$, $y_1' = 1 + o(1)$, $y_2' = o(1/x)$.

1.5. Jestliže platí $\int_{x_1}^{\infty} e^{-2aH} \Psi(H) |q_1| \, dx < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} e^{-2aH} \Psi(H) |d \log (f^2 H' e^{2aH})| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} |f''f + 2q_1 ff' + q_2 f^2 - f^2 H'^2 [Q(H) + a^2]| \Phi(H) \, dx < \infty$, $a \in E_1$, pak $\lim f^2 H' e^{2aH} = c$, $0 < c \in E_1$ a rovnice (q) má fundamentální systém, který je uveden v hlavní větě, jestliže položíme $Q_1 = -a$, $Q_2 = Q(t) + a^2$.

2. NĚKTERÉ APLIKACE ODST. 1.4.

Aplikace provedeme pro binomickou rovnici (q) $y'' + qy = 0$ a obdržíme je vhodnou volbou funkce $Q(t)$. Uvedeme pouze podmínky (5), (6) a tvar báse binomické rovnice (q) bez derivací.

2.1. $\int_{x_1}^{\infty} |d \log (f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a} |f''f + qf^2 + \varepsilon f^2 H'^2| \, dx < \infty$, $\varepsilon = \pm 1$. Rovnice (q) má v případě $\varepsilon = 1$ hlavní bási $y_1 = f H^a e^H [1 + o(1)]$, $y_2 = f H^a e^{-H} . [1 + o(1)]$, v případě $\varepsilon = -1$ bási $y_1 = f H^a [\sin H + o(1)]$, $y_2 = f H^a [\cos H + o(1)]$. Pro $a = 0$ viz [1; 33, 34].

2.2. $\int_{x_1}^{\infty} |d \log f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a+1} |f''f + qf^2 - f^2 H'^2 H^{-2} [\alpha + a(a+1)] . dx < \infty$, $\frac{1}{4} \neq \alpha \in E_1$. Rovnice (q) má v případě $\alpha > \frac{1}{4}$ bási $y_1 = f H^{a+1/2} [\sin . (\beta \log H) + o(1)]$, $y_2 = f H^{a+1/2} [\cos (\beta \log H) + o(1)]$, $\beta = \sqrt{(\alpha - \frac{1}{4})}$, v případě $\alpha < \frac{1}{4}$ má hlavní bási $y_1 = f H^{a+\beta+1/2} [1 + o(1)]$, $y_2 = f H^{a-\beta+1/2} [1 + o(1)]$, $\beta = \sqrt{(\frac{1}{4} - \alpha)}$. Položíme-li $\alpha = -n(n+1)$ resp. $\alpha = -n(n-1)$, pak $\beta = n + \frac{1}{2}$ resp. $\beta = n - \frac{1}{2}$. V obdržených vzorcích můžeme ještě položit $n = a \neq -\frac{1}{2}$ resp. $n = a \neq \frac{1}{2}$. Pro $n = a = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -n(n+1)$ platí následující tvrzení:

Jestliže $\int_{x_1}^{\infty} |\mathrm{d} \log (f^2 H^{-1} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} \log H |f''f + qf^2| \,\mathrm{d}x < \infty$, pak rovnice (Q) má hlavní bási $y_1 = f \log H[1 + o(1)]$, $y_2 = f[1 + o(1)]$. Případ $n = a = \frac{1}{2}$, $\alpha = -n(n-1)$ plyne z 2.3.

2.3. $\int_{x_1}^{\infty} \log H |\mathrm{d} \log (f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a+1} \log H |f''f + qf^2 - f^2 H'^2 H^{-2} \,.$ $. [\frac{1}{4} + a(a+1)]| \,\mathrm{d}x < \infty$, $a \neq -\frac{1}{2}$. Rovnice (q) má hlavní bási $y_1 = f H^{a+1/2} \,.$ $. \log H[1 + o(1)]$, $y_2 = f H^{a+1/2}[1 + o(1)]$.

2.4. $\int_{x_1}^{\infty} |\mathrm{d} \log (f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a+1} |f''f + qf^2 - a(a+1) f^2 H'^2 H^{-2}| \,\mathrm{d}x <$ $< \infty$. Rovnice (q) má hlavní bási $y_1 = f H^{a+1} \cos H^{-1} [1 + o(1)]$, $y_2 = f H^{a+1} \,.$ $. \sin H^{-1}[1 + o(1)]$.

2.5. $\int_{x_1}^{\infty} |\mathrm{d} \log (f^2 H^{2a} H')| < \infty$, $\int_{x_1}^{\infty} H^{2a-1} |f''f + qf^2 + f^2 H'^2 H^2| \,\mathrm{d}x < \infty$. Rovnice (q) má hlavní bási $y_1 = f H^{a-1/2} e^{H^2/2}[1 + o(1)]$, $y_2 = f H^{a-1/2} e^{-H^2/2} \,.$ $. [1 + o(1)]$.

Podobným způsobem můžeme provést aplikaci odst. 1.5. Dostaneme výsledky, které většinou obdržíme z odst. 2.1.—2.5., jestliže místo H^a budeme psát e^{aH}. Některé vzorce se dají zobecnit pro rovnice n-tého řádu, viz [2].

Literatura

[1] *M. Ráb:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + qy = 0$, Czech. Math. J. *14* (*89*), 1964, 203—221.

[2] *Z. Hustý:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Mathematische Nachrichten. Im Druck.

Zdeněk Hustý, Brno

REFORMNÍ HNUTÍ VE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE VE SVĚTĚ A ÚČAST ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD NA REFORMĚ TOHOTO VYUČOVÁNÍ U NÁS

VLADIMÍR KOŘÍNEK, Praha

Na 20. valném zasedání ČSAV, které se konalo ve dnech 22. a 23. dubna 1965, přednesl akademik Vladimír Kořínek diskusní příspěvek o reformním hnutí ve vyučování matematice. Protože reforma a modernisace vyučování matematice je jedním z nejnaléhavějších úkolů ve školství u nás i na celém světě, přinášíme projev akademika Kořínka v plném znění.

Vědecké kolegium matematiky mně uložilo, abych informoval valné shromáždění Československé akademie věd o současném světovém hnutí pro reformu vyučování matematice a upozornil na význam a důležitost této věci. Zároveň bude mým úkolem vylíčit stručně, co již bylo v rámci Akademie v této věci vykonáno a podat několik námětů pro další práci.