Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

О ПРОИЗВЕДЕНИИ РЯДОВ ЛЕЙБНИЦА

ВАСИЛИЙ ДЕМИДОВИЧ, Москва

(Поступило в редакцию 12/X 1964 г.)

В работе дается достаточное условие сходимости произведения рядов Лейбница.

Определение. Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ будем называть рядом Лейбница, если для него выполнены условия теоремы Лейбница: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Очевидно, $a_n \geqq 0$. Для краткости эти условия будем записывать как $a_n \searrow 0\,(n \to \infty)$.

Теорема 1. *Если*

(1) $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$,

(2) $a_{n+1} - a_n \leqq \alpha_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

где $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n| < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $\varrho_n = \sum_{\nu=n}^{\infty}|\alpha_\nu|$; очевидно $\varrho_n \searrow 0$. Из условия (2) получаем $a_{n+1} - a_n \leqq |\alpha_n| = \varrho_n - \varrho_{n+1}$; отсюда, учитывая (1), выводими, что $a_n + \varrho_n \searrow 0$. Имеем $a_n = (a_n + \varrho_n) - \varrho_n$, причем $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(a_n + \varrho_n)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \varrho_n$ — ряды Лейбница. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

Теорема 2. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ *ряды Лейбница и пусть сходится ряд, составленный из диагональных элементов таблицы произведений* $(-1)^{i+j} a_i b_j$, *т.е.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < \infty\,. \tag{3}$$

Тогда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, *где*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0\,.$$

Замечание. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$ является произведением по правилу Коши рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$.

Доказателвство. Сначала покажем, что $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, при $n = 2k + 1$ имеем

$$c_{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{2k+1-i} + \sum_{i=0}^{k} b_i a_{2k+1-i}. \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. На основании сходимости ряда (3) можно выбрать натуральное число m столь большим, чтобы при любом целом $k > m$ имело место неравенство

$$4 \sum_{i=m+1}^{k} a_i b_i < \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть теперь $k > m$. Принимая во внимание, что $b_{2k+1-i} \leqq b_{k+1} \leqq b$ и $a_{2k+1-i} \leqq a_{k+1} \leqq a_i$ при $i \leqq k$, получим

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &\leqq b_{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_i + a_{k+1} \sum_{i=0}^{k} b_i \leqq b_{k+1} \sum_{i=0}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{k} a_i b_i + \\ &+ a_{k+1} \sum_{i=0}^{m} b_i + \sum_{i=m+1}^{k} a_i b_i = b_{k+1} A_m + a_{k+1} B_m + 2 \sum_{i=m+1}^{m} a_i b_i, \end{aligned} \tag{6}$$

где $A_m = \sum_{i=0}^{m} a_i$, $B_m = \sum_{i=0}^{m} b_i$. Так как $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$, то существует число $n_0 > m$ такое, что при всех $n > n_0$ выполнено неравенство $2(a_n B_m + b_n A_m) < \varepsilon$. Тогда на основании (5) и (6) для $k > n_0$ будем иметь $c_{2k+1} < \varepsilon$, т. е $c_{2k+1} \to 0$ ири $k \to \infty$. Так как

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{2k-i} + a_k b_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i a_{2k-i} \leqq \\ &\leqq \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{2k-i-1} + a_k b_k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i a_{2k-i-1} = c_{2k-1} + a_k b_k, \end{aligned} \tag{7}$$

то $c_n \to 0$ ири $n \to \infty$.

Из формул (4) и (7) следует, что $c_{2k+1} \leqq \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{2k-i} + a_k b_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} b_i a_{2k-i} + a_{k+1} b_k \leqq c_{2k} + a_k b_k$ и $c_{2k} \leqq c_{2k-1} + a_k b_k$. Таким образом, на основании теоремы 1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$ сходится.

Výtah

O SOUČINU LEIBNIZOVÝCH ŘAD

VASILIJ DĚMIDOVIČ, Moskva

Mějme řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$, kde $a_n \searrow 0$ a $b_n \searrow 0$. Součin těchto řad $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{j+k=n} a_j b_k$ konverguje, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, složená z diagonálních prvků tabulky součinů $(-1)^{j+k} a_j b_k$.

Résumé

SUR LE PRODUIT DES SÉRIES DE LEIBNIZ

VASILIJ B. DÉMIDOVITCH, MOSCOU

Soient données les séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$, où $a_n \searrow 0$, $b_n \searrow 0$. Le produit de ces séries $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{j+k=n} a_j b_k$ est une série convergente, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, composée des éléments diagonales de la table des produits $(-1)^{j+k} a_j b_k$, est une série convergente.