Časopis pro pěstování matematiky

Jindřich Nečas

Řešení biharmonického problému pro nekonečný klín. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 4, 399--424

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108641`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU PRO NEKONEČNÝ KLÍN, II

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Došlo dne 12. června 1957) DT:517.516

Tato druhá část práce navazuje přímo na část předchozí.*) Hlavním thematem této části jsou vlastnosti řešení biharmonického problému na nekonečném konvexním klínu. Zvláště jsou zde studovány vlastnosti řešení v blízkosti hranice.

4. Vlastnosti řešení

V tomto oddílu se budeme zabývat vlastnostmi řešení biharmonického problému v blízkosti hranice. Bude nás v prvé řadě zajímat chování řešení v blízkosti hranice, příslušné obecným okrajovým podmínkám, jakož i jeho chování v tom případě, když okrajové hodnoty budou mít speciální vlastnosti (spojitost atp.). Zvláštní pozornosti podrobíme chování řešení ve vrcholu klínu a v nekonečnu.

Pomocným aparátem při řešení výše nastíněných otázek bude řešení speciálního biharmonického problému pro polorovinu. Vzhledem k zásadní odlišnosti našeho pojímání biharmonického problému pro polorovinu od jeho definice v [5] podáme v tomto oddílu jeho krátký rozbor.

Definice 7. *Buď reálná funkce $f(x)$ různá od nuly nejvýše pro $0 < \varepsilon \leqq r \leqq \frac{1}{\varepsilon}$, absolutně spojitá. Nechť $\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} [f'(r)]^2 \, \mathrm{d}r < \infty$. Buď dále $g(r)$ reálná funkce různá od nuly nejvýše pro $0 < \varepsilon \leqq r \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ a taková, že $\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} [g(r)]^2 \, \mathrm{d}r < \infty$.*

Speciálním biharmonickým problémem pro polorovinu budeme nazývat úlohu stanovit takovou reálnou funkci, že pro ni platí:

1. *$u(r, \Theta)$ pro $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\pi}{2}$, má čtyři spojité derivace,*

2. *$u(r, \Theta)$ je biharmonická funkce,*

*) Viz str. 257—286 tohoto ročníku Časopisu.

3. $\lim\limits_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty [f(r) - u(r, \Theta)]^2 r^{-2} \, \mathrm{d}r = 0 \,, \quad \lim\limits_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty [u(r, \Theta)]^2 r^{-2} \, \mathrm{d}r = 0 \,;$ (a)

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[f'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,, \quad \lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,; \quad \text{(b)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Theta \to +\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[g(r) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,, \\ &\lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,; \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

4. *ke každému* $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$ *existuje konstanta* $M(\varphi)$ *tak, že pro* $0 < r < \infty$ *platí*

$$|\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi) \,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi) \,.$$

Věta 14. *Existuje řešení speciálního biharmonického problému pro polorovinu, definovaného v definici 7.*

Důkaz věty 14 je založen na stejné myšlence jako důkaz věty 10. Předně je zřejmé, že $f(r)$, $f'(r)$, $g(r) \in h_{\mu\nu}$, kde $\mu < \nu$ jsou libovolná, konečná, reálná čísla. Odtud plyne, že

$$F(n) \in H_{\mu\nu} \,, \quad n\,F(n) \in H_{\mu\nu} \,, \quad G(n + 1) \in H_{\mu\nu} \,.$$

Položme nyní v (26) $\omega = \pi$, $F_{11}(n) = F(n)$, $F_{21}(n) = 0$, $G_{11}(n + 1) = G(n + 1)$, $G_{21}(n + 1) = 0$.

Dostaneme:

$$U(n, \Theta) = -\frac{(n + 2)\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right)\right] + n\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) + 2\Theta\right]}{2\sin(n + 1)\pi} F(n) - \\ - \frac{\cos n\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) + \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) + 2\Theta\right]}{2\sin(n + 1)\pi} G(n + 1) \,. \quad (48)$$

Z (48) plyne, že zvolíme-li $-2 < \mu < \nu < 0$, potom

$$U(n, \Theta) \,, \quad -n\,U(n, \Theta) \,, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Theta}(n, \Theta) \in H_{\mu\nu} \,.$$

Nyní zcela stejným způsobem jako jsme to učinili při důkaze věty 10, ukážeme, že platí bod 1 a 2 definice 7. Aby byla zaručena platnost bodu 3 definice 7, buďte μ a ν zvoleny takto: $-2 < \mu < -1 < -\frac{1}{2} < \nu < 0$. Dostáváme tak

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty [f(r) - u(r, \Theta)]^2 \, r^{2x-1} \, dr = 0 ,$$

když

$$x \in \langle \mu, \nu \rangle , \quad \lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty [u(r, \Theta)]^2 \, r^{2x-1} \, dr = 0 .$$

Zvolíme-li nyní $x = -\frac{1}{2}$, dostaneme bod (a) definice 7. Podobně je

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[f'(r) - \frac{\partial u}{\partial r} (r, \Theta) \right]^2 r^{2x+1} \, dr = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r} (r, \Theta) \right]^2 r^{2x+1} \, dr = 0 .$$

Zvolíme-li opět $x = -\frac{1}{2}$, dostáváme bod (b) definice 7. Stejně dostaneme bod (c). Důkaz bodu 4 definice 7 probíhá stejně jako důkaz bodu 5 definice 5 při důkazu věty 10; stačí zvolit za $x = -1$.

O řešení speciálního problému pro polorovinu dokážeme nyní

Větu 15. *Nechť $u(r, \Theta) = u(x, y)$ je řešení speciálního problému pro polorovinu* $(x = r \cos \Theta,\ y = r \sin \Theta)$. *Potom platí:*

1. $$\lim_{x \to 0} \int_a^b [u(x, y) - f(y)]^2 \, dy = 0 , \quad \lim_{x \to 0} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y} (x, y) - f'(y) \right]^2 dy = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x, y) + g(y) \right]^2 dy = 0 ,$$

je-li $0 < a \leqq b < \infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0 > 0}} u(x, y) = f(y_0)$; pro skoro všecka $y_0 \in (0, \infty)$ *taková, v nichž* $f(s)$ *a* $h(s) = \int_{-\infty}^{s} g(t) \, dt$ *mají konečnou derivaci, je*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial y} (x, y) = f'(y_0) , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial x} (x, y) = -g(y_0),$$ [1]

pokud $\left| \frac{y}{x} \right| \leqq k$, *kde k je libovolná ale pevná konstanta (dostáváme tzv. úhlové prodloužení).*

[1]) Funkci $g(s)$ změňme po případě na množině míry nula tak, aby $h'(s) = g(s)$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f'(y_0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -g(y_0)$,

je-li bod $y_0 > 0$ bodem spojitosti $f'(y)$ a $g(y)$.

Důkaz. Mellinův obraz našeho řešení je dán výrazem (48). Originál výrazu (48) vyjádříme vzorcem (42) poněkud upraveným: Klademe

$$G(r, \Theta) = \tfrac{1}{2}[G_1(r, \Theta, \pi) + G_2(r, \Theta, \pi)]\,,$$
$$H(r, \Theta) = \tfrac{1}{2}[G_3(r, \Theta, \pi) + G_4(r, \Theta, \pi)]\,.$$

Dostaneme tak

$$G(r, \Theta) = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2)\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + n\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)+2\Theta\right]}{2\sin(n+1)\pi}\, r^{-n}\, dn\,,$$

$$H(r, \Theta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)+2\Theta\right]}{2\sin(n+1)\pi}\, r^{-n}\, dn\,, \tag{49}$$

kde $-2 < x < 0$. Tyto integrály vypočítáme podle residuové věty. Uvažme nejdříve $r < 1$. Označme C_k kladně orientované obvody obdélníků D_k definovaných takto:

$$n \in D_k \Leftrightarrow -k - \tfrac{1}{2} < \operatorname{Re} n < -1\,, \quad -k < \operatorname{Im} n < k\,.$$

Protože je $r < 1$ a platí odhady typu (28), dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}$$

pro oba integrály (49). Jednoduché póly integrandů jsou v bodech $-2, -3, \ldots$ Např. pro druhý integrál z (49) tak dostáváme

$$H(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k r^k \left[\cos k\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) - 2\Theta\right)\right],$$
$$0 < r < 1,\ |\Theta| < \frac{\pi}{2}\,.$$

Po sečtení těchto řad a po převodu na kartézské souřadnice $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ dostáváme

$$G\left(\frac{r}{s}, \Theta\right)\frac{1}{s} = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2}\,,$$
$$H\left(\frac{r}{s}, \Theta\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{x^2+(y-s)^2}\,.$$

Vzorec (42) bude mít tento jednoduchý tvar:

$$u(r, \Theta) = u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f(s) \, ds - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + (y - s)^2} g(s) \, ds \,, \tag{52}$$

kde $f(s) = g(s) = 0$ pro $s \leqq 0$.

Vypočítáme nyní Fourier-Plancherelův obraz funkce $u(x, y)$ vzhledem k proměnné y. Budeme se opírat o tuto známou větu z teorie Fourier-Plancherelovy transformace:

Lemma 3. *Nechť* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *a* $F_1(y)\, F_2(y) \in L^2(-\infty, \infty)$. *Potom také*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi) \,.\, f_2(\xi) \, a\xi \in L^2(-\infty, \infty) \quad \text{a} \quad F(y) = F_1(y)\, F_2(y) \,.$$

(Viz [6], str. 439 an.)

Např. pomocí residuové věty snadno dostaneme

$$\frac{2}{\pi} x^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iny}}{(x^2 + y^2)^2} \, dy = \begin{cases} e^{-nx}[1 + nx] & \text{pro} \quad n > 0 \,, \\ e^{nx}[1 - nx] & \text{pro} \quad n < 0 \,, \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\pi} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iny}}{(x^2 + y^2)} \, dy = \begin{cases} -xe^{-nx} & \text{pro} \quad n > 0 \,, \\ -xe^{nx} & \text{pro} \quad n < 0 \,. \end{cases}$$

Označme v tomto případě

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \, e^{-ins} \, ds = F(n) \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \, e^{-ins} \, ds = G(n) \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \, e^{-iny} \, dy = U(x, n) \,.$$

Dostaneme tak podle lemmatu 3

$$U(x, n) = e^{-|n|x}[1 + |n| \, x] \, F(n) - xe^{-|n|x} \, G(n) \quad \text{pro} \quad x > 0 \,.$$

V prostoru $L^2(-\infty, \infty)$ je $\lim\limits_{x \to 0} U(x, n) = F(n)$. To podle věty 3 dokazuje, že $\lim\limits_{x \to 0} \int_a^b [u(x, y) - f(y)]^2 \, dy = 0$. Podobně lze dokázat i ostatní vztahy 1 z věty 15.

Dokažme nyní bod 3 věty 15. Posuňme počátek soustavy souřadnic do bodu spojitosti $[0, y_0]$ (tak to uděláme i v dalším). Jednoduchými výpočty dostaneme z (52)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f'(s) \, ds + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(s) \, ds \,, \tag{53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f'(s) \, ds -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(y - s)^2}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(s) \, ds \,. \tag{54}$$

Buď nyní ε kladné, libovolně malé číslo. K tomutu číslu ε existuje číslo $\delta > 0$ tak, že

$$|s| < \delta \Rightarrow |f'(s) - f'(0)| < \varepsilon\,, \quad |g(s) - g(0)| < \varepsilon\,.$$

Zkoumejme nejdříve rovnici (53). Je

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(f'(s) - f'(0))\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,f'(0)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(f'(s) - f'(0))\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(f'(s) -$$

$$- f'(0))\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(g(s) - g(0))\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(g(s) -$$

$$- g(0))\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,g(0)\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(g(s) - g(0))\,\mathrm{d}s\,. \tag{55}$$

Nechť nyní $x \to 0$ a $y \to 0$. První, druhý, pátý a šestý integrál z (55) konvergují k nule. Protože

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,\mathrm{d}s = 1\,, \quad \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,g(0)\,\mathrm{d}s = 0\,,$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(f'(s) - f'(0))\,\mathrm{d}s\right| < \varepsilon\,\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,\mathrm{d}s = \varepsilon\,,$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\,(g(s) - g(0))\,\mathrm{d}s\right| < \varepsilon\,\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 s}{(x^2 + s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \varepsilon\,\frac{2}{\pi}\,,$$

dostáváme: Pro dosti malá x a y je

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f'(0)\right| < \left(\frac{2}{\pi} + 1\right)\varepsilon\,.$$

Úplně stejně dokážeme, že pro dosti malá x a y je

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + g(0)\right| < \left(\frac{2}{\pi} + 1\right)\varepsilon ,$$

když využijeme toho, že platí

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^2}\, ds = 1 .$$

Tím je důkaz bodu 3 dokončen.

Abychom dokázali bod 2, vraťme se k formuli (52). Úplně stejně, jako jsme dokázali bod 3, se ukáže, že

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2} f(s)\, ds = f(0) .$$

Dále je zřejmě $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2\, g(s)}{x^2+(y-s)^2}\, ds = 0$, protože $\dfrac{x^2}{x^2+(y-s)^2} \leqq 1$.

Buď nyní $h(s) = \int_{-\infty}^{s} g(t)\, dt$. Rovnici (52) můžeme dát tento tvar:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2} f(s)\, ds + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^2} h(s)\, ds . \tag{56}$$

Derivujeme-li (56), dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3} f(s)\, ds + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3} h(s)\, ds , \tag{57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x^4 + 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3} f(s)\, ds +$$

$$+ \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(y-s)^3 - x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3} h(s)\, ds . \tag{58}$$

Nechť v bodě nula má $f(s)$ a $h(s)$ konečnou derivaci. Zvolme ε kladné, libovolně malé číslo. Existuje potom číslo δ kladné takové, že

$$|s| < \delta \Rightarrow f(s) = f(0) + f'(0)\, s + \varepsilon(s)\, .\, s ,$$
$$h(s) = h(0) + g(0)\, s + \tilde{\varepsilon}(s)\, s ,$$

při čemž $|\varepsilon(s)| < \varepsilon$, $|\tilde{\varepsilon}(s)| < \varepsilon$. Přepišme (57) do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}(f(s) - f(0) - f'(0)\,s)\,ds -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{\delta}^{\infty} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}(f(s) - f(0) - f'(0)\,s)\,ds -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}(f(0) + f'(0)\,s)\,ds -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\varepsilon(s)\,s\,ds + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}(h(s) - h(0) -$$

$$-g(0)\,s)\,ds + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\infty} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}(h(s) - h(0) - g(0)\,s)\,ds +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}(h(0) + g(0)\,s)\,ds +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\tilde{\varepsilon}(s)\,ds\,. \tag{59}$$

Nechť nyní $x \to 0$, $y \to 0$. První, druhý, pátý a šestý integrál z (59) konvergují k nule. Dále je

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,ds = 0\,, \quad -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,ds = 1\,,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^2}\,s^i\,ds = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Protože platí

$$\left|-\frac{8}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\varepsilon(s)\,ds\right| < \varepsilon\,\frac{16}{\pi}\left[\int_0^{\infty} \frac{x^3s^2}{(x^2+s^2)^3}\,ds +\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty} \frac{x^3|y|s}{(x^2+s^2)^3}\,ds\right] \leqq \varepsilon\left[1 + \frac{4}{\pi}K\right],$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\, s\, \tilde{\varepsilon}(s)\, ds\right| < \varepsilon\,\frac{4}{\pi}\left[\int\limits_0^\infty \frac{x^4 s}{(x^2+s^2)^3}\, ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \frac{x^4|y|}{(x^2+s^2)^3}\, ds + 3\int\limits_0^\infty \frac{x^2 s^3}{(x^2+s^2)^3}\, ds + 3\int\limits_0^\infty \frac{x^2|y|s^2}{(x^2+s^2)^3}\, ds\right] \leqq \varepsilon\left[\frac{4}{\pi} + K\right],$$

dostáváme

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f'(0)\right| < \varepsilon\left(1 + \frac{4}{\pi}\right)(1 + K)$$

pro dostatečně malá x a y.

Úplně stejně dokážeme, že $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -g(0)$, pokud je $\left|\frac{y}{x}\right| \leqq k$. Tím je věta 15 dokázána.

Zkoumejme nyní vlastnosti řešení biharmonického problému pro klín, jestliže $f_1(r) = g_1(r) = 0$.

Věta 16. *Nechť $u(r, \Theta) \in B$ a nechť $f_1(r) = g_1(r) = 0$, $0 < r < \infty$. Potom existuje číslo ε kladné a funkce $u^*(r, \Theta)$ definovaná pro $0 < r < \infty$, $-\frac{\omega}{2} < \Theta < < \frac{\omega}{2} + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, taková, že je $u^*(r, \Theta) = u(r, \Theta)$ pro $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\omega}{2}$, a dále $u^*\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial u^*}{\partial r}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = 0$ a $u^*\left(r, \vartheta + \frac{\varepsilon}{2}\right) = v(r, \vartheta) \in B$. Při tom je $0 < r < \infty$, $|\vartheta| < \frac{\omega}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ a $v(r, \Theta)$ přísluší stejné konstanty γ, δ.*

Důkaz. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $f_2(r) = g_2(r) = 0$ pro $r \geqq 2$. Okrajové podmínky pro $\Theta = -\frac{\omega}{2}$ můžeme totiž rozdělit tak, jako jsme to učinili ve větě 10, tj. psát

$$f_2(r) = f_{21}(r) + f_{22}(r)\,, \quad g_2(r) = g_{21}(r) + g_{22}(r)\,.$$

Vzhledem k unicitě pak platí: $u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta)$. (Označení viz v důkaze věty 10.) Ve vzorci (26) položme

$$F_{11}(n) = 0\,, \quad G_{11}(n+1) = 0\,, \quad F_{21}(n) = F_2(n)\,,$$
$$G_{21}(n+1) = G_2(n+1)\,.$$

Po úpravě pak z (26) dostaneme

$$U(n, \Theta) = Z_1(n, \Theta)\, F_2(n) + Z_2(n, \Theta)\, G_2(n+1)\,.$$

Výpočtem analogickým jako při důkazu bodu (b) věty 10 dostaneme pro $|y| \geqq 1$

$$|n\, Z_i(n, \Theta)| \leqq M(x)|y|^3\, e^{-|y|\left(\omega - \left|\frac{\omega}{2} - \Theta\right|\right)},$$
$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} Z_i(n, \Theta)\right| \leqq M(x)|y|^3\, e^{-|y|\left(\omega - \left|\frac{\omega}{2} - \Theta\right|\right)},$$
$$\Theta \in \left\langle 0, \frac{\omega}{2} + \varepsilon \right\rangle, \quad i = 1, 2\,,$$

při čemž za ε můžeme zvolit každé číslo menší než ω a $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$. Nyní můžeme již k dokončení důkazu věty 16 užít mechanismu z důkazu věty 10. Podotkněme jen, že odhady 5 definice 5 platí v tomto případě pro $-\frac{\omega}{2} < -\varphi \leqq \Theta \leqq \leqq \frac{\omega}{2} + \varepsilon$.

Podobného obsahu jako věta 16 je

Věta 17. *Buď $u(r, \Theta) \in B$ a nechť $f_2(r) = g_2(r) = 0$ pro $0 < r < \infty$ a $f_1(r) = g_1(r) = 0$ pro $0 < a \leqq r \leqq b < \infty$. Potom*

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} u(r, \Theta) = \lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = \lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = 0\,,$$

je-li $r_0 \in (a, b)$.

Důkaz. Biharmonickou funkci $u(r, \Theta)$ napišme ve tvaru (42). Proveďme nyní bližší zkoumání vlastností funkcí $\frac{\partial^k}{\partial \Theta^k} G_i(r, \Theta, \omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 0, 1$, pro $r \neq 1$ a $\Theta \to \pm \frac{\omega}{2}$. Zkoumejme např. nejdříve funkci $G_1(r, \Theta, \omega)$, když $\Theta \to \frac{\omega}{2}$. V integrálu (38) proveďme substituci $n + 1 = m$. Protože integrand $I(n, \Theta)$ má tu vlastnost, že je $I(\bar{n}, \Theta) = \overline{I(n, \Theta)}$, dostáváme

$$G_1(r, \Theta, \omega) = \operatorname{Re} \frac{r}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{A}}{m \sin \omega + \sin m\omega}\, r^{-m}\, \mathrm{d}y\,,$$

$$\mathrm{A} = (m + 1) \sin (m + 1) \frac{\omega}{2} \cos (m - 1)\, \Theta - (m - 1) \sin (m - 1) \frac{\omega}{2} \cos (m + 1)\, \Theta,$$

kde $x' + iy = m$, $x + 1 = x'$. Položme nyní

$$A_1(m, \Theta) = (m + 1) \frac{i}{4}\, \mathrm{e}^{-i\left[(m+1)\frac{\omega}{2} + (m-1)\Theta\right]} - (m - 1) \frac{i}{4}\, \mathrm{e}^{-i\left[(m-1)\frac{\omega}{2} + (m+1)\Theta\right]},$$

$$B_1(m, \Theta) = (m + 1) \sin (m + 1) \frac{\omega}{2} \cos (m - 1)\, \Theta - (m - 1) \sin (m - 1) \frac{\omega}{2} \,.$$
$$. \cos (m + 1)\, \Theta\,.$$

Pro $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$, $0 < r < \infty$ buď

$$S_1(r, \Theta, x') = \operatorname{Re} \frac{2r^{1-x'}}{\pi i} e^{ix'\frac{\omega}{2}} \int_0^\infty A_1(m, \Theta)\, e^{-y\omega} r^{-iy}\, dy\,,$$

$$R_1(r, \Theta, x') = \operatorname{Re} \frac{r^{1-x'}}{\pi} \int_0^\infty \frac{B_1(m, \Theta) - A_1(m, \Theta)}{m \sin \omega + \sin m\omega}\, r^{-iy}\, dy +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{r^{1-x'}}{\pi} \int_0^\infty A_1(m, \Theta) \left[\frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right] r^{-iy}\, dy\,.$$

Zřejmě je $G_1(r, \Theta, \omega) = S_1(r, \Theta, x') + R_1(r, \Theta, x')$. Dále platí pro $k = 0, 1$

$$\left| \frac{d^k}{d\Theta^k} \frac{B_1(m, \Theta) - A_1(m, \Theta)}{m \sin \omega + \sin m\omega} \right| \leqq M(x')\, y^{k+1} e^{-\frac{\omega}{2} y}\,,$$

kde $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$, $y \geqq 1$ a $m(x')$ je konstanta závislá pouze na x'. Vzhledem k tomu, že platí

$$\left| \frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right| \leqq \overline{M}(x')\, y e^{-2y\omega}$$

pro $y \geqq 1$ ($\overline{m}(x')$ je opět konstanta závislá pouze na x'), je pro $k = 0, 1$

$$\left| \frac{d^k}{d\Theta^k} A_1(m, \Theta) \left[\frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right] \right| \leqq \overline{\overline{M}}(x')\, y^{k+1} e^{-y\omega}\,.$$

Dále platí

$$B_1\left(m, \frac{\omega}{2}\right) = m \sin \omega + \sin m\omega\,, \quad A_1\left(m, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{-i\omega m}$$

a odtud plyne $\lim\limits_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} R_1(r, \Theta, x') = 0$. Zrovna tak vypočteme, že

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial \Theta} R_1(r, \Theta, x') = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial r} R_1(r, \Theta, x') = 0\,.$$

Výraz $S_1(r, \Theta, x')$ můžeme bez obtíží vyčíslit. Přesvědčíme se tak, že pro $r \neq 1$ je

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} S_1(r, \Theta, x) = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial \Theta} S_1(r, \Theta, x) = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial r} S_1(r, \Theta, x) = 0\,.$$

Bez obtíží dostaneme také tyto odhady:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\Theta^k} R_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-\varkappa}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} R_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-\varkappa-1},$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\Theta^k} S_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x', \varepsilon)\, r^{-\varkappa}, \quad k = 0, 1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} S_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-\varkappa-1}, \tag{59a}$$

pokud r non ϵ $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ a $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$. Buď tedy nyní $r_0 \epsilon (a, b)$. Pak platí

$$\int_0^\infty G_1\left(\frac{r}{s}\, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^a \ldots + \int_b^\infty \ldots \,. \tag{60}$$

Uvažme například první integrál z (60). Buď $r \epsilon (a', b')$, kde $a < a' < b' < b$. Je $\frac{r}{s} > \frac{a'}{a} = 1 + \varepsilon'$, kde $\varepsilon' > 0$. Z odhadů (59) pro $0 < \tau < \lambda_1(\omega) - 1$ dostáváme

$$\left|G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1},$$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial\Theta}\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1},$$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial r}\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau-1}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1}.$$

Odtud dostáváme již snadno

$$\lim_{\substack{\Theta \to \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \int_0^a G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s = 0$$

a podobně pro první derivaci podle r a Θ.

Úplně stejně lze ukázat, že tytéž vlastnosti má také integrál

$$\int_b^\infty G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s,$$

a naprosto analogicky můžeme postupovat i při posuzování ostatních integrálů z (42). Tím je důkaz věty 17 proveden.

Z vět 14, 15, 16, 17 plyne snadno

Věta 18. *Nechť je $u(r, \Theta) \epsilon B$ a nechť přísluší funkcím $f_i(r)$, $g_i(r)$, $i = 1, 2$. Je-li $0 < a \leqq b < \infty$, potom platí:*

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b [u(x, y) - f_1(y)]^2\, \mathrm{d}y = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f_1'(y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + g_1(y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0\,,$$

kde kartézské souřadnice x, y jsou zavedeny tak, že osa $y > 0$ je totožná s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. Je-li totožná s ramenem $\Theta = -\frac{\omega}{2}$, pak platí

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b [u(x, y) - f_2(y)]^2 \,\mathrm{d}y = 0\,, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f_2'(y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - g_2(y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0\,.$$

2. *Dále platí:* $\lim\limits_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0 > 0}} u(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}(r_0)$ *a pro skoro všechna* $r_0 \in (0, \infty)$ *taková, že* $f_{\substack{1\\2}}(r)$ *a* $\int_1^r g_{\substack{1\\2}}(s)\,\mathrm{d}s$ *mají konečnou derivaci, a je*

$$\lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}'(r_0)\,, \quad \lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm\, g_{\substack{1\\2}}(r_0)\,.$$

Při tom body $[r, \Theta]$ leží v libovolném, ale pevném trojúhelníku Δ tak, že $\Delta \subset K$ a $\bar{\Delta}\bar{K} = \left[r_0, \pm \frac{\omega}{2}\right]$. Funkce $g_{\substack{1\\2}}(r)$ jsou případně změněné na množině míry nula tak, aby $[\int_1^r g_{\substack{1\\2}}(s)\,\mathrm{d}s]' = g_{\substack{1\\2}}(r)$ platilo tam, kde derivace je konečná.

3. *Je-li bod $r_0 > 0$ bodem spojitosti funkcí $f_{\substack{1\\2}}'(r)$ a $g_{\substack{1\\2}}(r)$, potom*

$$\lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}'(r_0)\,, \quad \lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm\, g_{\substack{1\\2}}(r_0)\,.$$

Důkaz. Buď $\langle a, b\rangle$ uvažovaný interval. Stačí, když dokážeme vlastnosti 2 a 3 pro $r_0 \in (a, b)$ vzhledem k tomu, že za a, b jsme mohli zvolit libovolná čísla $0 < a \leq b < \infty$. Zřejmě bez újmy obecnosti stačí, když budeme zkoumat případ $\Theta \to \frac{\omega}{2}$.

Buďte nyní funkce $f_{11}(r)$, $f_{12}(r)$ absolutně spojité a $g_{11}(r)$, $g_{12}(r)$ takové, že

$$f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)\,, \quad g_1(r) = g_{11}(r) + g_{12}(r)\,;$$

pak existují konstanty $0 < a' < a \leqq b < b' < \infty$ takové, že

$$f_{12}(r) = 0\,, \quad r \operatorname{non} \in (a', b')\,, \quad g_{12}(r) = 0\,, \quad r \operatorname{non} \in (a', b')\,,$$

$$\int_{a'}^{b'} [f_{12}'(r)]^2 \,\mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_{a'}^{b'} [g_{12}(r)]^2 \,\mathrm{d}r < \infty\,.$$

Podle (42) platí

$$u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) .$$

Zde funkce $u_1(r, \Theta)$ je definována formulí (42), dosadíme-li za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ nulu, funkce $u_2(r, \Theta)$ formulí (42), když dosadíme za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ funkci $f_{11}(r)$ resp. $g_{11}(r)$; posléze funkce $u_3(r, \Theta)$ je definována formulí (42), když za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ funkci $f_{12}(r)$ resp. $g_{12}(r)$. Podle věty 16 je funkce $u_1(r, \Theta)$ (a její derivace) spojitě prodlužitelná na rameno klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$ a platí

$$u_1\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = 0$$

pro $r > 0$ a podle věty 17 je $u_2(r, \Theta)$ (a její prvé derivace) spojitě prodlužitelná k nule pro $r_0 \in (a', b')$.

Zaveďme nyní kartézské souřadnice, tak aby osa $y > 0$ byla totožná s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. Dosaďme do (52) za $f(s)$ funkci $f_{12}(s)$ a za $g(s)$ funkci $g_{12}(s)$. Takto získanou funkci nazveme $u_4(r, \Theta)$. Dále od funkce $u_4(r, \Theta)$ odečteme funkci $u_5(r, \Theta)$, kterou získáme, když v (42) za $f_1(s)$ i za $g_1(s)$ dosadíme nulu, za $f_2(s)$ položíme $u_4\left(s, -\frac{\omega}{2}\right)$ a za $g_2(s)$ položíme $-\frac{1}{r}\frac{\partial u_4}{\partial \Theta}\left(s, -\frac{\omega}{2}\right)$. Vzhledem k unicitě a k tomu, že $u_4(r, \Theta) \in B$, platí

$$u_3(r, \Theta) = u_4(r, \Theta) - u_5(r, \Theta) .$$

Opět podle věty 16 má funkce $u_5(r, \Theta)$ na horním rameni klínu tytéž vlastnosti jako funkce $u_1(r, \Theta)$. Funkce $u_4(r, \Theta)$ má však vlastnosti dané větou 15. To jsou však právě vlastnosti požadované větou 18. Tím je důkaz proveden.

Nyní se budeme poněkud blížeji zabývat chováním řešení ve vrcholu nekonečného klínu. V prvé řadě provedeme bližší analysu vztahu mezi konstantami μ, ν a γ, δ a pak vyslovíme některé postačující podmínky pro to, aby první derivace řešení byly spojitě prodlužitelné i ve vrcholu klínu.

Věta 19. *Nechť $\mu < 0$.* (Viz definice 5.) *Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby $\mu = \gamma$, je: Funkce $f_i(s)$ jsou absolutně spojité v intervalu $\langle 0, \infty)$ a je $f_1(0) = f_2(0) = 0$.*

Podobně platí: Nechť $\nu > 0$. Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby $\nu = \delta$, je: Funkce $f_i(s)$ jsou absolutně spojité v intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ a je $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$ (to znamená, že $\lim_{r\to\infty} f_1(r) = \lim_{r\to\infty} f_2(r) = 0$).

Důkaz. Zabývejme se např. první částí věty 19. Shodně s důkazem věty 10 pišme $f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)$ atd. Zkoumejme nyní formuli (26), což je obraz funkce $u_1(r, \Theta)$. Místo $F_{i1}(n)$ pišme podle (25) $-\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty r^n f'_{i1}(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}\,.$ $.\,H_i(n+1)$. Nyní platí, že je $\mu = \gamma$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $U(n, \Theta)$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}\,U(n, \Theta)$ nemají póly v bodě $n = 0$. Jestliže je totiž tato podmínka splněna, potom na základě odhadů z důkazu věty (10) je $U(n, \Theta)$, $n\,U(n, \Theta)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}\,.$ $.\,U(n, \Theta) \in H_{\mu,\nu'}$ a odtud již plyne podobně jako při důkazu věty 10, že $\mu = \gamma$. (Viz označení v důkaze věty 10.) Z formule (26) vyplývá, že to nastává právě tehdy, když $\int\limits_0^\infty f'_{i1}(r)\,\mathrm{d}r = 0$, $i = 1, 2$, což je ekvivalentní s podmínkou, že funkce $f_i(s)$ jsou spojité v počátku zprava a že je $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Druhá část věty 19 se dokáže stejně a tím se důkaz věty 19 dokončí.

Chování biharmonické funkce v rohu popisuje

Věta 20. *Buď $u(r, \Theta) \in B$. Nechť platí, že $f_i(r)$ a $\int\limits_1^r g_i(s)\,\mathrm{d}s$ mají v bodě nula konečnou derivaci zprava $f'_i(0)$ a $g_i(0)$. Nechť dále platí, že $f_1(0) = f_2(0)$,*

$$f'_1(0)\cos\frac{\omega}{2} - g_1(0)\sin\frac{\omega}{2} = f'_2(0)\cos\frac{\omega}{2} - g_2(0)\sin\frac{\omega}{2}\,,$$

$$f'_1(0)\sin\frac{\omega}{2} + g_1(0)\cos\frac{\omega}{2} = -f'_2(0)\sin\frac{\omega}{2} - g_2(0)\cos\frac{\omega}{2}\,. \tag{61}$$

Předpokládejme dále, že

$$\int\limits_0^1 [f'_i(r) - f'_i(0)]^2\,r^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int\limits_0^1 [g_i(r) - g_i(0)]^2\,.\,r^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}r < \infty\,,$$

kde $\alpha < -1$. Potom platí

$$\lim_{r\to 0} u(r, \Theta) = f_1(0)\,, \quad |\Theta| < \frac{\omega}{2}\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f'_1(0)\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -g_1(0)\,.$$

Předpokládáme při tom, že je $[\int\limits_1^r g_i(s)\,\mathrm{d}s]' = g_i(0)$ pro $r = 0$ a $i = 1, 2$. Body $[x, y]$ leží v nějakém klínu K_1, libovolném ale pevně zvoleném, obsaženém v našem klínu K, s vrcholovým úhlem $0 < \varphi < \omega$ a vrcholem ve vrcholu klínu K; osa y kartézských souřadnic splývá s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. $\left(\text{Analogické výsledky dostaneme pro rameno } \Theta = -\frac{\omega}{2}\right)$.

Jestliže jsou $f_i'(r)$ a $g_i(r)$, $i = 1, 2$, spojité v bodě 0 a platí-li podmínky (61), *potom*

$$\lim_{\substack{\Theta\to\pm\frac{\omega}{2}\\ r\to 0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f'_{\frac{1}{2}}(0)\,, \quad \lim_{\substack{\Theta\to\pm\frac{\omega}{2}\\ r\to 0}} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm\, g_{\frac{1}{2}}(0)\,.$$

Důkaz. Najdeme nejdříve konstanty a, b, c tak, aby funkce $u_1(r, \Theta) = a + br\cos\Theta + cr\sin\Theta$ splňovala tyto podmínky:

$$u_1(0, 0) = f_1(0)\,, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r}\left(0, \pm\frac{\omega}{2}\right) = f'_{\frac{1}{2}}(0)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \Theta}\left(0, \pm\frac{\omega}{2}\right) = \pm\, g_{\frac{1}{2}}(0)\,.$$

Pak dostaneme pro konstanty a, b, c tyto podmínky:

$$\begin{gathered} a = f_1(0)\,, \quad b\cos\frac{\omega}{2} + c\sin\frac{\omega}{2} = f_1'(0)\,, \quad b\cos\frac{\omega}{2} - c\sin\frac{\omega}{2} = f_2'(0)\,, \\ -\,b\sin\frac{\omega}{2} + c\cos\frac{\omega}{2} = g_1(0)\,, \quad b\sin\frac{\omega}{2} + c\cos\frac{\omega}{2} = -\,g_2(0)\,. \end{gathered} \tag{62}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro systém (62) vzhledem k platnosti (61) je splněna Frobeniova podmínka. Zřejmě je $u_1(r, \Theta) \in B$ a funkci $u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta)$ přísluší konstanta $\gamma = \alpha$. Postačí, dokážeme-li tvrzení věty 20 pouze pro $\Theta \to \frac{\omega}{2}$ a $0 \leqq \Theta$.

Funkci $u(r, \Theta) - u_1(r_0, \Theta)$ rozdělme opět, podobně jako v důkaze věty 18, na několik sčítanců. Podle (42) je

$$u(r, \Theta) - u_1(r, \Theta) = u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) + u_4(r, \Theta)\,,$$

kde $u_2(r, \Theta)$ dostaneme z 42, když za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ dosadíme nulu, za $f_2(r)$ resp. $g_2(r)$ dosadíme $f_2(r) - f_2(0) - f_2'(0)\,r$ resp. $g_2(r) - g_2(0)$. Funkci $u_3(r, \Theta)$ dostaneme tak, že za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ dosadíme $f_{12}(r)$ resp. $g_{12}(r)$ (viz označení v důkaze věty 10). Funkci $u_4(r, \Theta)$ dostaneme posléze tak, že za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ dosadíme $f_{11}(r)$ resp. $g_{11}(r)$. Nyní podle věty 19 a 16 je

$$|u_2(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\alpha}\,, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r}u_2(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,,$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\Theta}u_2(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,,$$

pokud $0 < r \leqq 1$ a $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega}{2}$, a podle odhadů (59b) platných pro $\alpha < \tau < -1$

$$|u_3(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\tau}\,, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r}u_3(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\tau-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u_3}{\partial\Theta}(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\tau-1}\,,$$

pokud $0 < r \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega}{2}$. Dosaďme nyní $F_{11}(n)$ resp. $G_{11}(n+1)$ do (48) za $F(n)$ resp. $G(n+1)$. Z věty 19 plyne, že $F_{11}(n)$ a $G_{11}(n+1) \in H_{\alpha\nu}$, kde ν ($\alpha < \nu < 0$) je libovolné číslo. Formule (48) dává obraz funkce $u_5(r, \vartheta)$, $U_5(n, \vartheta)$, pro nějž platí

$$U_5(n, \vartheta)\,, \quad -n\, U_5(n, \vartheta)\,, \quad \frac{dU_5}{d\Theta}(n, \vartheta) \in H_{\alpha\nu}$$

(bez újmy obecnosti předpokládáme, že $-2 < \alpha$).

Funkce

$$u_5(r, \vartheta) = u_5\left(r, \Theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \tilde{u}_5(r, \Theta) \in B$$

má tyto vlastnosti

$$\left|\tilde{u}_5\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha}\,, \quad \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,, \quad 0 < r \leqq 1\,,$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,,$$

což plyne z (48). Jestliže nyní označíme $u_6(r, \Theta)$ funkci, kterou dostaneme z (42), když za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ dosadíme nulu a za $f_2(r)$ resp. $g_2(r)$ dosadíme $\tilde{u}_5\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)$ resp. $-\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_5}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)$, pak pro $u_6(r, \Theta)$ dostaneme podobně jako pro funkci $u_2(r, \Theta)$

$$|u_6(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\alpha^*}\,, \quad \left|\frac{\partial u_6}{\partial r}(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha^*-1}\,,$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial u_6}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha^*-1}\,, \quad 0 < r \leqq 1\,, \quad 0 < \Theta \leqq \frac{\omega}{2}\,.$$

Zde je $\alpha < \alpha^* < -1$. Vzhledem k unicitě platí $u_4(r, \Theta) = \tilde{u}_5(r, \Theta) - u_6(r, \Theta)$.

Dále napišme funkci $u_5(r, \vartheta)$ ve tvaru (52). Protože funkce $f_1(r) - f_1(0) - r f_1'(0)$ a $\int_1^r (g(s) - g(0))\, ds$ mají v bodě nula derivaci rovnou nule, jsou splněny podmínky věty 15 pro funkce $f(s)$ a $g(s)$ z vzorce (52). Protože je

$$u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) + \tilde{u}_5(r, \Theta) - u_6(r, \Theta)\,,$$

dostáváme odtud již tvrzení věty 20.

Závěrečné poznámky

Poznamenejme na závěr, že s biharmonickým problémem pro nekonečný klín je svázáno ještě mnoho zajímavých otázek. Tak v práci [8] jsou funkce $f_i'(r)$ a $g_i(r)$ po částech spojité, o bodech nespojitosti je předpokládáno, že jsou prvého druhu a že jejich hromadným bodem může být pouze nekonečno. Kromě toho se předpokládá, že v počátku funkce $f_i'(r)$ a $g_i(r)$ jsou $O(r^{-\alpha-1})$, kde $\alpha < \lambda_1(\omega) - 1$, a že v nekonečnu jsou $O(r^{-\beta-1})$, kde $\beta > -\lambda_1(\omega) - 1$. Definice biharmonického problému podaná v [8] je klasická. Požaduje mimo jiné, aby první derivace řešení $u(r, \Theta)$ byly stejnoměrné vzhledem $\Theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$ v okolí počátku $O(r^{-\gamma-1})$, kde $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma < \lambda_1(\omega) - 1$, a v okolí nekonečna $O(r^{-\delta-1})$, kde $-\lambda_1(\omega) - 1 < \delta < \lambda_1(\omega) + 1$. Je dokázána existence a unicita takto definovaného problému.

Zajímavá je role Papkovičových čísel a Papkovičových funkcí. Třída řešení vyšetřovaná v tomto pojednání obsahuje prvky, které mají buď omezený Dirichletův integrál, nebo jsou rozumnou limitou takových prvků. Kdybychom kladli konstanty γ resp. δ např. do intervalu $\lambda_1(\omega) - 1$, $\lambda_2(\omega) - 1$, kde $\lambda_2(\omega) = \operatorname{Re} p_2$ (p_2 je další Papkovičovo číslo s větší reálnou částí, než $\operatorname{Re} p_1$), nebyla by výše uvedená podmínka s Dirichletovým integrálem splněna. Papkovičovy funkce (viz poznámku uvedenou po důkaze unicity) nepatří do žádné definované třídy B. V práci [8] jsou tyto otázky probírány podrobněji a důkazové metody jsou do velké míry založeny právě na vlastnostech Papkovičových funkcí.

Je známo, že na biharmonický problém vedou úlohy rovinné elasticity. Okrajové funkce $f_i'(r)$, $g_i(r)$ udávají vnější zatížení (při tzv. prvním problému rovinné elasticity). Naše definice biharmonického problému zahrnuje v sobě většinu prakticky důležitých případů, jako např. vnějšího zatížení osamělým břemenem na ramenech klínu nebo i ve vrcholu klínu, dále pak osamělými břemeny velikosti 1, které působí v bodech $r_k = a + bk$, kde $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ apod.

Pro biharmonickou funkci jistého typu definovanou na nekonečném klínu se dá dokázat v jistém smyslu věta o maximu. Její znění je toto:

Věta 21. *Buď funkce $u(r, \Theta) \in B$ a μ, ν jí příslušející čísla taková, že platí:*

1. $-\lambda_1(\omega) - 1 < \mu < \nu < \lambda_1(\omega) - 1$,

2. *je-li* $\nu > 0$, *potom nechť* $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$, *je-li* $\mu < 0$, *potom nechť* $f_1(0) = f_2(0) = 0$,

3. $\mu \neq 0 \neq \nu$.

Potom existuje konstanta $M(\mu, \nu)$ (závislá pouze na μ, ν a nikoli na funkci $u(r, \Theta)$) taková, že platí

$$\max\left\{\int_0^\infty [u(r, \Theta)]^2 \, r^{2\varkappa-1} \, \mathrm{d}r \, , \quad \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\varkappa+1} \, \mathrm{d}r \, ,\right.$$

$$\left.\int_0^\infty \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right]^2 r^{2\varkappa+1} \, \mathrm{d}r\right\} \leqq M(\mu, \nu) \left\{\int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}\left(r, \frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2\varkappa+1} \, \mathrm{d}r + \right.$$

$$+\int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r + \int_0^\infty \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r +$$

$$+\int_0^\infty \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r\Bigg\},$$

kde x je buď rovno μ nebo ν.

Důkaz. Stejně jako jsme to učinili v důkaze věty 10, pišme

$$f_i(r) = f_{i1}(r) + f_{i2}(r)\,, \quad g_i(r) = g_{i1}(r) + g_{i2}(r)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Předpokládejme např., že $\mu < 0$, $\nu < 0$. Rovnost

$$\int_0^\infty f_{i1}(r)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}\int_0^\infty f_{i1}(r)\, r^n\,\mathrm{d}r \tag{63}$$

platí pro Re $n > 0$. Protože $f_{i1}(0) = 0$, $i = 1, 2$, platí, že funkce $-\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_{i1}(r)\,.$ $.\, r^n\,\mathrm{d}r \in H_{\mu\beta}$, kde β je libovolné číslo větší než ν. Odtud plyne, že $f_{i1} \in h_{\mu\beta}$. Rovnost (63) tedy platí pro $\mu <$ Re $n < \beta$. Rovnost

$$\int_0^\infty f_{i2}(r)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_{i2}(r)\, r^n\,\mathrm{d}r \tag{64}$$

platí pro $\mu <$ Re $n < \nu < 0$. Sečtením (63) a (64) dostaneme pro $\mu <$ Re $n <$ $< \nu < 0$

$$\int_0^\infty f_i(r)\, r^{n-1}\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_i(r)\, r^n\,\mathrm{d}r\,. \tag{65}$$

Dosadíme-li (65) do (26) a užijeme-li odhadů zlomků a jejich derivací podle Θ z důkazu věty 10 a posléze Parceválovy rovnosti 3 z věty 5, dostaneme tvrzení věty 21. Ostatní případy bychom dokázali úplně stejně.

Závěrem uveďme hlavní myšlenku, na níž je založeno řešení biharmonického problému konvexního mnohoúhelníka v [9]. Pro jednoduchost to ukážeme pro rovnostranný trojúhelník.

Rozdělme strany tohoto trojúhelníka body A_1, B_1, C_1 postupně na dvě stejné části. Hledejme biharmonickou funkci $u(x, y)$, která (zatím v blíže nedefinovaném smyslu) nabývá na hranici trojúhelníka hodnotu $f(s)$ (s je délka oblouku hranice) a její derivace podle normály hodnotu $g(s)$. Pokusme se funkci $u(x, y)$ vyjádřit jako součet $u_{A_0}(x, y) + u_{B_0}(x, y) + u_{C_0}(x, y)$, kde $u_{A_0}(x, y)$ je biharmonická funkce na klínu s vrcholem v A_0, s vrcholovým úhlem $\frac{\pi}{3}$, který obsahuje náš trojúhelník. Podobný význam nechť mají funkce $u_{B_0}(x, y)$, $u_{C_0}(x, y)$. Funkci $u_{A_0}(x, y)$ (a podobně ostatní) vyjádřeme pomocí vzorce (42), kde však v horní mezi integrálu místo nekonečna pišme $\overline{A_0A_1}$. To znamená, že funkce $f_{iA}(r)$, $g_{iA}(r)$, $i = 1, 2$, v tomto vzorci považujeme za neznámé pro $0 < r < \overline{A_0A_1}$ a že jsou rovny nule pro $r \geqq \overline{A_0A_1}$. Vyjádříme-li okrajové podmínky pro funkci $u(x, y)$ za tohoto předpokladu, dostaneme pro neznámé funkce f_{iA}, g_{iA}, f_{iB}, g_{iB}, f_{iC}, g_{iC}, $i = 1, 2$, systém integrálních rovnic. Po běžné úpravě převedeme tento systém na jednu integrální rovnici

$$F(s) - \int_a^b F(\sigma)\, K(s, \sigma)\, a\sigma = G(s)\,. \tag{66}$$

Operátor $\int_a^b F(\sigma)\, K(s, \sigma)$ je totálně spojitý v prostoru $L_q(a, b)$, kde q je jisté číslo > 2. Vzhledem k této vlastnosti platí pro rovnici (66) Fredholmova alternativa. Řešením rovnice (66) dostaneme funkce f_{iA}, g_{iA}, a tím řešení našeho problému.

LITERATURA

[1] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[2] *Н. И. Мусхелишвили:* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва 1949.

[3] *C. J. Tranter*: The Use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite Wedge. The Quarterly Journal of Mechanics and applied Mathematics, June 1948, *1*, 125—130.

[4] *J. Majer*: Das reine Randwertproblem des ebenen elastischen Keiles. Öster. Ing. Arch. 1950, *4*, č. 3—4, 290—303.

[5] *I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo*: Matematická theorie rovinné pružnosti. Praha 1955.

[6] *G. Doetsch*: Handbuch der Laplace-transformation. Basel 1950.

[7] *А. И. Маркушевич:* Теория аналитических функций. Москва 1950.

[8] *J. Nečas*: Řešení napjatosti nekonečného klínu, Kapitola VII, Výzkumné zprávy VÚTMS, B, 105, M, 1956.

[9] *J. Nečas*: Řešení biharmonického problému pro konvexní mnohoúhelníky (kandidátská práce).

Резюме

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 12/VI 1957 г.)

В предлагаемой работе преследуются две главные цели: во-первых, доказать существование и единственность решения бигармонической задачи для бесконечного выпуклого клина и, во-вторых, показать, как этот результат может быть использован при решении бигармонической задачи на областях, являющихся пересечением таких клиньев, т. е. на выпуклых многоугольниках.

Второстепенной целью этой работы можно считать разработку преобразования Меллина в том смысле, чтобы оно было не только формальным, но и самобытным простым инструментом для решения дифференциальных уравнений с частичными производными, и далее краткое замечание по поводу численного решения задачи.

После введения общего характера в части 2, названной ,,Введение сходимости в пространстве меллиновых образов", дается определение линейного пространства меллиновых образов $H_{\mu\nu}$, оригиналы $h(r)$ которых характеризуются следующим свойством:

$$\sup_{x \in \langle \mu, \nu \rangle} \int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, \mathrm{d}r < \infty .$$

В пространстве $H_{\mu\nu}$ вводится норма при помощи соотношения:

$$|H| = \sup_{x \in (\mu, \nu)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Далее показано, что $H_{\mu\nu}$ является пространством Банаха. Аналитические функции H из $H_{\mu\nu}$ обладают некоторыми интересными свойствами, которые используются в дальнейшем: $\lim_{|y| \to \infty} H(x + iy) = 0$ равномерно, если только $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu - \varepsilon \rangle$, причем $\varepsilon > 0$ достаточно мало, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y$$

равномерно сходятся для $x \in \langle \mu, \nu \rangle$.

В части 3, названной ,,Определение бигармонической задачи для бесконечного клина, существование решения и его единственность", дается прежде всего определение бигармонической задачи. В клиновидной области вводятся полярные координаты r, Θ, причем полярная ось совпадает с биссектрисой угла ω клина. На стороне $\Theta = \frac{\omega}{2}$ заданы действительные граничные условия

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r)\,,$$

а на стороне $\Theta = -\frac{\omega}{2}$ условия

$$u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -g_2(r)\,.$$

Функции $f_i(r)$ предполагаются абсолютно непрерывными, и вместе с функциями $g_i(r)$ должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,,$$

$$\int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, \mathrm{d}r < \infty\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Притом числа μ и ν лежат в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$ где $\lambda_1(\omega)$ является действительной частью т. наз. числа Папковича $p_1(\omega)$. Так как $\lambda_1(\omega) > 1$, то, напр., функция $f_1'(r)$ не должна быть интегрируемой с квадратом на интервале $\langle 0, 1 \rangle$. Это приводит к неожиданному на первый взгляд заключению, что наличие угловой точки расширяет множество граничных значений. Решением бигармонической задачи, соответствующей функциям $f_i(r)$, $g_i(r)$, мы называем такую действительную функцию $u(r, \Theta)$, которая является бигармонической внутри клинообразной области и принимает граничные значения в следующем смысле:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\gamma-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\delta-1}\, \mathrm{d}r = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) - g_1(r)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, \mathrm{d}r = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Ктоме того, мы предполагаем, что локально равномерно, т. е. для $|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$ и $0 < r \leqq 1$, имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}$$

и что для $1 \leqq r$ имеют место те же оценки, если только постоянную γ заменить δ. Притом мы требуем, чтобы постоянные γ и δ входили в интервал $(-\lambda_1(\omega)-1, \lambda_1(\omega)-1)$. Доказывается, что существует одно и только одно решение определенной таким образом задачи. При расширении интервала $(-\lambda_1(\omega)-1, \lambda_1(\omega)-1)$, в котором содержатся числа μ, ν, γ, δ, единственность решения уже не имела бы места, как это следует из существования т. наз. функций Папковича. Для численных расчетов и для доказательства единственности были введены четыре функции Грина для данной проблемы, полученные путем формального использования теоремы о свертке (конволюции). Интересно, что при доказательстве единственности используются свойства решения, тесно связанные с зависимостью решения от области.

В части 4, озаглавленной „Свойства решения", прежде всего доказывается существование решения специальной бигармонической задачи для полуплоскости. На основании свойств этой задачи доказываются свойства решения бигармонической задачи для бесконечного клина, как напр.: возможность непрерывного продолжения на границе решения к функции $f_i(r)$ (за исключением, самое большее, вершины), возможность углового продолжения первых производных для почти всех точек на сторонах клина соответственно к функциям $f_i'(r)$ и $g_i(r)$, а также возможность непрерывного продолжения первых производных в тех точках, в которых функции $f_i'(r)$, $g_i(r)$ непрерывны. При некоторых добавочных условиях, между прочим обеспечивающих выполнение условий согласования (которые у прямоугольного клина сводятся к соотношениям

$$f_1(0) = f_2(0)\,, \quad f_i'(0) = -g_i(0)\,, \quad i = 1, 2)\,,$$

доказана возможность непрерывного продолжения решения в вершине, а затем и первых производных; в последнем случае речь идет, конечно, об угловом продолжении. В этой части доказываются еще и дальнейшие свойства решения, как, напр., возможность аналитического продолжения бигармонической функции через сторону клина, если функция и ее первые производные по углу равны нулю. (Выражени „функция принимает граничные значения" нужно понимать в нашем интегральном смысле.) Это продолжение определено на клине с большим углом при вершине и является решением бигармонической задачи.

В „Заключительных замечаниях" доказывается неравенство, выражающее правильность решения в явном виде. Работа заканчивается кратким упоминанием о других аспектах рассматриваемых задач, равно как и о решении бигармонической задачи для выпуклых многоугольников — эти вопросы разбирались в иной работе автора.

Résumé

SOLUTION DU PROBLÈME BIHARMONIQUE POUR LE COIN INFINI

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 12 juin 1957)

Le présent travail a pour son but principal de démontrer d'un côté l'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique pour le coin infini convexe et de montrer de l'autre côté comment on peut résoudre, en s'appuyant sur ces résultats, le problème biharmonique dans les polygones.

Le but secondaire de ce travail est de développer la théorie de la transformation de Mellin d'une telle manière qu'elle ne soit pas seulement un appareil formal mais au contraire autonome pour la solution des problèmes en question. Il y a aussi dans ce travail une courte note sur la résolution numérique de ces problèmes.

Après l'introduction, on définit dans la seconde partie portant le titre „L'introduction de la convergence dans l'ensemble des transformées de Mellin", l'espace linéaire $H_{\mu\nu}$ des transformées de Mellin dont les originaux $h(r)$ sont caractérisés par la propriété

$$\sup_{x \in \langle \mu, \nu \rangle} \int_0^\infty |h(r)|^2 \, r^{2x-1} \, dr < \infty \, .$$

L'espace $H_{\mu\nu}$ est normé au moyen de la norme

$$|H| = \sup_{x \in (\mu, \nu)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, dy \right]^{\frac{1}{2}} .$$

On montre ensuite que c'est un espace de Banach. Les fonctions analytiques H de $H_{\mu\nu}$ jouissent de quelques propriétés intéressantes que l'on utilise dans la suite, par exemple: $\lim_{|y| \to \infty} H(x + iy) = 0$ uniformément pour $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu - \varepsilon \rangle$ $\varepsilon > 0$ étant suffisamment petit, les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, dy$ convergent uniformément pour $x \in \langle \mu, \nu \rangle$.

La troisième partie intitulée „Définition du problème biharmonique pour le coin infini, existence et unicité de sa solution" apporte tout d'abord la définition de notre problème. On introduit dans le coin en question les coordonnées polaires r, Θ dont l'axe polaire coïncide avec la bisectrice de l'angle ω du coin. Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r) \, , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r)$$

et

$$u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -\,g_2(r)\,.$$

Les fonctions $f_i(r)$ sont supposées absolumet continues et les fonctions $f_i(r)$, $g_i(r)$, $i = 1, 2$, sont soumises à ces conditions-ci:

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,,$$

$$\int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,.$$

Les nombres μ et ν sont contenus dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ où $\lambda_1(\omega)$ est la partie réelle du nombre de Papkovič. Comme $\lambda_1(\omega) > 1$, l'intégrale $\int_0^1 [f_1'(r)]^2\, dr$ peut diverger. C'est un fait un peu surprenant: le point angulaire fait élargir l'ensemble des conditions aux limites.

La solution du problème biharmonique correspondant aux fonctions $f_i(r)$, $g_i(r)$ est une fonction réelle, biharmonique à l'intérieur du coin et les conditions aux limites sont remplies au sens suivant:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\gamma-1}\, dr = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\delta-1}\, dr = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) - g_1(r)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, dr = 0\,, \quad \text{etc.}$$

En dehors de cela on suppose que pour $|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$, $0 < r \leqq 1$, les estimations suivantes soient valables

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,,$$

tandis que pour $r \geqq 1$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,.$$

On exige que les nombres γ, δ soient dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$. On démontre qu'il existe une et une seule solution du problème ainsi défini.

On perdrait cette unicité en élargissant l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ contenant les constantes μ, ν, γ, δ.

Pour la résolution numérique et pour la démonstration de l'unicité on a introduit les quatre fonctions de Green qu'on obtient par l'emploi formal du théorème sur la convolution. Leurs valeurs numériques ainsi que leurs graphiques sont joints.

La quatrième partie portant le titre ,,Les propriétés de la solution" commence par la résolution d'un problème biharmonique spécial pour un demi-plan. On se sert alors des propriétés de la solution de ce problème pour en déduire les propriétés de la solution du problème biharmonique dans le coin, par exemple: la possibilité de prolonger d'une manière continue la solution au bord en les fonctions $f_i(r)$ (à l'exception peut-être du sommet), la possibilité d'un prolongement angulaire des dérivées pour presque tous les points du bord en les fonctions $f_i'(r)$, $g_i(r)$ etc. Dans cette partie on démontre encore d'autres propriétés de la solution comme: la possibilité d'un prolongement analytique de la function biharmonique, les conditions aux limites étant par exemple pour $\Theta = \frac{\omega}{2}$:

$$f_1(r) = g_1(r) = 0 .$$

Ce prolongement est défini dans un coin plus grand et qui contient le coin original, il représente aussi la solution du problème biharmonique défini auparavant.

Dans les notes finales on démontre une inégalité qui exprime la justesse de la solution.

Le travail finit par une note sur d'autres questions, voisines à celles qui ont été traitées dans le présent travail, et sur la solution du problème biharmonique pour les polygones convexes. Ces questions-là forment l'objet d'un autre travail du même auteur.