Zbyněk Nádeník

Les courbes de largeur constante dans l'espace à quatre dimensions

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 134--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108583

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

LES COURBES DE LARGEUR CONSTANTE DANS L'ESPACE À QUATRE DIMENSIONS

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 22 décembre 1966)

Nous approfondirons notre étude [5] des courbes gauches de largeur constante, en nous limitant à l'espace euclidien à quatre dimensions E_4.

Les x_1, x_2, x_3, x_4 étant les coordonnées orthogonales dans cet espace, la courbe

$$(1) \qquad x_1 = r_1 \sin l_1\beta\,, \quad x_2 = r_1 \cos l_1\beta\,, \quad x_3 = r_2 \sin l_2\beta\,, \quad x_4 = r \cos l_2\beta$$

est une hypercirconférence Γ (à savoir, elle possède toutes les courbures constantes; voir [1], p. 6–8 ou [6], p. 10–14). Les constantes

$$(2) \qquad r_1 > 0\,, \quad r_2 > 0\,; \quad l_1 > 0\,, \quad l_2 > 0\,, \quad l_1 \neq l_2$$

étant soumises aux conditions

$$(3) \qquad r_1^2 + r_2^2 = 1\,, \quad r_1^2 l_1^2 + r_2^2 l_2^2 = 1\,,$$

la courbe en question se trouve située sur la sphère unitaire et β désigne son arc. Si le rapport $l_1 : l_2$ est rationnel, elle est fermée.

En vertu de (2) et (3), on a

$$(4) \qquad r_1^2 = (l_2^2 - 1) : (l_2^2 - l_1^2)\,, \quad r_2^2 = (1 - l_1^2) : (l_2^2 - l_1^2)\,;$$

prenant $l_2 > l_1$, il est donc

$$(5) \qquad 0 < l_1 < 1 < l_2\,.$$

Nous désignons par $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ les vecteurs unitaires du repère de Frenet de la courbe (1) et par $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ ses courbures. Un calcul assez long, mais élémentaire, au cours duquel nous utilisons (4) et (5), nous donne succesivement (cf. [1], les relations (13) pour $a_i = \varkappa_i$ et $p = l_1$, $q = l_2$; aussi [6], p. 11)

$$(6) \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (l_1x_2, -l_1x_1, l_2x_4, -l_2x_3)\,,\\ \varkappa_1\mathbf{v}_2 &= (-l_1^2x_1, -l_1^2x_2, -l_2^2x_3, -l_2^2x_4)\,,\\ \mathbf{v}_3 &= \left(\frac{r_2l_2}{r_1}\,x_2,\ -\frac{r_2l_2}{r_1}\,x_1,\ -\frac{r_1l_1}{r_2}\,x_4,\ \frac{r_1l_1}{r_2}\,x_3\right), \end{aligned}$$

$$\varkappa_1 \mathbf{v}_4 = \left(-\frac{r_2 l_2^2}{r_1} x_1, \ -\frac{r_2 l_2^2}{r_1} x_2, \ \frac{r_1 l_1^2}{r_2} x_3, \ \frac{r_1 l_1^2}{r_2} x_4 \right)$$

et

(7) $$\varkappa_1 = [l_1^2 + l_2^2 - l_1^2 l_2^2]^{1/2}, \quad \varkappa_2 = \frac{l_1 l_2}{\varkappa_1} [(1 - l_1^2)(l_2^2 - 1)]^{1/2}, \quad \varkappa_3 = \frac{l_1 l_2}{\varkappa_1}.$$

L'objet de nos considérations [3], [4], [5] – que nous allons poursuivre dans le cas d'un E_4 – a été une courbe C fermée au paramétrage $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\beta)$ pour laquelle l'indicatrice sphérique des opposés de ses vecteurs unitaires $\mathbf{n}(\beta)$ de la dernière nomale est une hypercirconférence. Maintenant, dans E_4, nous désignons encore par $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ les vecteurs unitaires de la tangente, de la première et de la deuxième normale de C et par k_1, k_2, k_3 les courbures de C. De nouveau, par un calcul plus long, mais mécanique, basé sur les formules de Frenet, nous obtenons que (cf. [7], p. 185)

(8) $$\mathbf{t}_1 = \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{-k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_4}{(k_2^2 + k_3^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{k_3 \mathbf{v}_2 + k_2 \mathbf{v}_4}{(k_2^2 + k_3^2)^{1/2}}$$

et

(9) $$k_1 : k_2 : k_3 = l_1 l_2 : [(1 - l_1^2)(l_2^2 - 1)]^{1/2} : 1 .$$

Soit b la longueur de l'indicatrice Γ aux équations (1) (laquelle est fermée parce que C est fermée). Dans ce qui suit, nous ne considérons que le cas quand les nombres naturels

(10) $$\lambda_1 = b l_1 / 2\pi, \quad \lambda_2 = b l_2 / 2\pi$$

sont impairs (cf. [3], p. 363). Cela rend possible (voir [4], p. 449) de définir sur la courbe C les points opposés $\mathbf{x}(\beta)$ et $\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b)$ – remarquons que les vecteurs du repère de Frenet du point $\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b)$ sont les opposés de ceux du point $\mathbf{x}(\beta)$ – et le diamètre $p(\beta)$, à savoir la droite qui les joint. De plus, sous la largeur $B(\beta)$ de C en direction du vecteur $\mathbf{n}(\beta)$, nous comprenons la distance des espaces osculateurs parallèles aux points opposés, laquelle largeur – à l'aide de la fonction d'appui $h(\beta) = -\mathbf{x}(\beta) \,.\, \mathbf{n}(\beta)$ – s'exprime par la formule

(11) $$B(\beta) = h(\beta) + h(\beta + \tfrac{1}{2}b) .$$

La fonction $B(\beta)$ a, naturellement, la période $\frac{1}{2}b$.

I. *Puis, la position mutuelle des points opposés sur la courbe C est déterminée par la relation* (voir le n° 1)

(12) $$\mathbf{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - \mathbf{x}(\beta) = -B'(\beta)\, \mathbf{v}_1(\beta) - \frac{1}{\varkappa_1} B''(\beta)\, \mathbf{v}_2(\beta) - $$
$$- \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2} [B'''(\beta) + \varkappa_1^2 B'(\beta)]\, \mathbf{v}_3(\beta) + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1 \varkappa_2} [B''(\beta) + \varkappa_1^2 B(\beta)]\, \mathbf{v}_4(\beta) .$$

Voici les propriétés qui caractérisent, dans un E_4, parmi les courbes C en question, celles de largeur constante:

II. *La courbe C est de largeur constante si, en chaque couple des points opposés,*

a) le diamètre est orthogonal à la deuxième normale $\mathbf{t}_3$, ou

b) le diamètre est orthogonal au vecteur $-k_2\mathbf{t}_2 + k_3\mathbf{n}$, ou

c) le produit scalaire des vecteurs $\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b) - \mathbf{x}(\beta)$ et $\mathbf{t}_2(\beta)$ est égal à $Bk_3 : k_2$, ou

d) le diamètre est parallèle au vecteur $k_3\mathbf{t}_2 + k_2\mathbf{n}$, ou

e) les espaces de la tangente $\mathbf{t}_1$, de la première normale $\mathbf{t}_2$ et de la troisième normale $\mathbf{n}$ coïncident, ou

f) les espaces de la tangente $\mathbf{t}_1$, de la deuxième normale $\mathbf{t}_3$ et du vecteur $k_3\mathbf{t}_2 + k_2\mathbf{n}$ sont identiques.

III. *Dès lors que la première courbure $\varkappa_1$ et la longueur b de l'hypercirconférence Γ satisfont aux inégalités*

$$b\varkappa_1 \neq 4\pi\lambda\,, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \tag{13}$$

la courbe C est de largeur constante si, en chaque couple des points opposés,

g) le diamètre est orthogonal à la tangente $\mathbf{t}_1$, ou

h) les espaces des trois normales $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$, $\mathbf{n}$ coïncident, ou

i) la distance des points opposés est constante.

Voici un exemple pour une hypercirconférence Γ qui ne jouit pas de la propriété (13):

Posons que $l_1 = (2/3)^{1/2}$, $l_2 = 6^{1/2}$; les inégalités (5) sont valables et, d'après (7), $\varkappa_1 = (8/3)^{1/2}$. Le plus petit nombre positif qui, multiplié par les nombres l_1 et l_2 en question, donne des nombres naturels, est évidemment $(3/2)^{1/2}$. Donc $b = 2\pi(3/2)^{1/2}$ et, d'après (10), $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ conformément à notre restriction concernant ces nombres (voir ci-dessus). La courbe C qui, premièrement, a l'hypercirconférence Γ, ainsi construite, pour l'indicatrice sphérique des vecteurs $-\mathbf{n}(\beta)$ et qui, deuxièmement, a la largeur $B(\beta) = \text{const.} + \text{const.} \sin (8/3)^{1/2}\,\beta + \text{const.} \cos (8/3)^{1/2}\,\beta$ en direction du vecteur $\mathbf{n}(\beta)$, n'est pas, en général, de largeur constante, mais elle possède toutes les trois propriétés g)–i) du théorème III. Cela résulte facilement du théorème I; cf. aussi le n° 3.

IV. *A condition que*

$$b\varkappa_1 \neq 4\pi\lambda \neq b\,, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

la courbe C est de largeur constante si, en chaque couple des points opposés,

j) la distance des tangents est constante.

V. *Supposons que*

$$(15)\qquad b\varkappa_1 \neq 4\pi\lambda \neq b(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)^{1/2}\,, \quad \lambda = 1, 2, \ldots$$

Voici encore une condition pour que la courbe C soit de largeur constante:

k) En chaque couple des points opposés, la distance des supports des vecteurs $(k_3 : k_2)\,\mathbf{t}_2(\beta) + \boldsymbol{n}(\beta)$ *et* $(k_3 : k_2)\,\mathbf{t}_2(\beta + \frac{1}{2}b) + \boldsymbol{n}(\beta + \frac{1}{2}b)$ *est constante* (elle est en plus égale à zéro).

Pour les démonstrations des théorèmes I – V, voir les n$^{\text{os}}$ 1 – 5. La position mutuelle des points opposés sur une courbe C de largeur constante B étant, d'après (12), déterminée par la relation

$$(16)\qquad \boldsymbol{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta) = \varkappa_1\varkappa_2^{-1}\varkappa_3 B\mathbf{v}_4(\beta)\,,$$

it est facile de s'assurer qu'une courbe C de largeur constante jouit des propriétés a) – k) mentionnées ci-dessus. Remarquons encore que, d'après (7) – (9), la droite de l'équation (16) est – conformément à la relation (8) dans [5] pour $2n = 4$ – de la forme $[(k_3 : k_2)\,\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{n}]\,B$. Cela veut dire que la courbe C de largeur constante est – au sens défini par E. Čech (voir [2], p. 57 – 58) – la courbe de Bertrand par rapport à elle même (cf. [2], II, théorème 2,2).

1. Dans [3], le n° 2, nous avons calculé les dérivées des coordonnées $x_1(\beta), \ldots$ $\ldots, x_4(\beta)$ d'un point $\boldsymbol{x}(\beta)$ de la courbe C munie de la fonction d'appui $h(\beta)$; d'après (2,6) et (2,7) dans [3], p. 369 et 370[1]), nous avons

$$(1,1)\qquad x_1'(\beta) = \frac{\cos l_1\beta}{r_1 l_1(l_2^2 - l_1^2)}\{h^{\mathrm{IV}}(\beta) + (l_1^2 + l_2^2)\,h''(\beta) + l_1^2 l_2^2 h(\beta)\}\,,$$

$$x_2'(\beta) = \frac{-\sin l_1\beta}{r_1 l_1(l_2^2 - l_1^2)}\{.\}\,, \quad x_3'(\beta) = \frac{\cos l_2\beta}{r_2 l_2(l_1^2 - l_2^2)}\{.\}\,,$$

$$x_4'(\beta) = \frac{-\sin l_2\beta}{r_2 l_2(l_1^2 - l_2^2)}\{.\}\,;$$

les expressions entre paranthèses $\{.\}$ étant les mêmes dans tous les quatre cas.

En tenant compte de (11), nous obtenons par les intégrations par parties élémentaires deux fois répétées que

$$(1,2)\qquad \int_\beta^{\beta + \frac{1}{2}b} h^{(u)}(\beta)\cos l_i\beta\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= -B^{(u-1)}(\beta)\cos l_i\beta - l_i B^{(u-2)}(\beta)\sin l_i\beta - l_i^2\int_\beta^{\beta + \frac{1}{2}b} h^{(u-2)}(\beta)\cos l_i\beta\,\mathrm{d}\beta\,,$$

---

[1]) Dans (2,7), il y a une erreur et une faute d'impression; exactement $x_{2i}(\beta) = \ldots; \ldots n$.

$$\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(u)}(\beta)\sin l_i\beta\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= -B^{(u-1)}(\beta)\sin l_i\beta + l_i B^{(u-2)}(\beta)\cos l_i\beta - l_i^2\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{2}b} h^{(u-2)}(\beta)\sin l_i\beta\,\mathrm{d}\beta\,;$$

$$u = 2, 4;\quad i = 1, 2\,;\quad [\cdot]^{(0)} = [\cdot]\,.$$

Donc, d'après (1,1) et (1,2),

$$\begin{aligned}(1,3)\qquad & r_i l_i(l_j^2 - l_i^2)\,[x_{2i-1}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i-1}(\beta)] = \\ &= -B'''(\beta)\cos l_i\beta - l_i B''(\beta)\sin l_i\beta - l_j^2 B'(\beta)\cos l_i\beta - l_i l_j^2\,B(\beta)\sin l_i\beta\,, \\ & r_i l_i(l_j^2 - l_i^2)\,[x_{2i}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - x_{2i}(\beta)] = \\ &= B'''(\beta)\sin l_i\beta - l_i\,B''(\beta)\cos l_i\beta + l_j^2\,B'(\beta)\sin l_i\beta - l_i l_j^2\,B(\beta)\cos l_i\beta\,;\end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2\,;\quad i \neq j\,.$$

Les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{x}(\beta + \frac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta)$ étant ainsi calculées, nous pouvons exprimer ce vecteur – à l'aide de (6), (1), (4) et (7) – comme la combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ sous la forme (12).

2. La démonstration des assertions II découle du théorème I. Remarquons, avant tout, que, d'après (7) et (9),

$$(2,1)\qquad k_2 : k_3 = \varkappa_2 : \varkappa_3\,,\quad \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 = \varkappa_1^2\varkappa_3^2\,.$$

a)–c) Il résulte de (12) et (8) avec (2,1) que

$$\begin{aligned}(2,2)\qquad & [\boldsymbol{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta)]\,.\,\mathbf{t}_3(\beta) = -B'(\beta)\,, \\ & [\boldsymbol{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta)]\,.\,[-\varkappa_2\mathbf{t}_2(\beta) + \varkappa_3\boldsymbol{n}(\beta)] = -\varkappa_3\,B''(\beta)\,, \\ & [\boldsymbol{x}(\beta + \tfrac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta)]\,.\,\mathbf{t}_2(\beta) = \frac{\varkappa_3}{\varkappa_2}\{B''(\beta) + B(\beta)\}\,.\end{aligned}$$

En exprimant, à l'aide de (2,1) et (2,2), les propositions a)–c) du théorème II, nous obtenons $B'(\beta) = 0$ ou $B''(\beta) = 0$. Donc, en vertu de la périodicité de la fonction $B(\beta)$, dans tous les trois cas $B(\beta) = \text{const.}$

d) Le vecteur $k_3(\beta)\,\mathbf{t}_2(\beta) + k_2(\beta)\,\boldsymbol{n}(\beta)$ étant, d'après (8), parallèle au vecteur $\boldsymbol{v}_4(\beta)$, la proposition en question entraîne, en vertu de (12), $B'(\beta) = 0$.

e)–f) Le vecteur $\boldsymbol{x}(\beta + \frac{1}{2}b) - \boldsymbol{x}(\beta)$ étant, d'après les propositions considérées, la combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{t}_1(\beta)$, $\mathbf{t}_2(\beta)$ et $\boldsymbol{n}(\beta)$ ou $\mathbf{t}_1(\beta)$, $\mathbf{t}_3(\beta)$, $k_3(\beta)\,\mathbf{t}_2(\beta) + k_2(\beta)\,\boldsymbol{n}(\beta)$ – c'est-à-dire, selon (8), des vecteurs $\boldsymbol{v}_3(\beta)$, $\boldsymbol{v}_2(\beta)$, $\boldsymbol{v}_4(\beta)$ ou $\boldsymbol{v}_3(\beta)$, $\boldsymbol{v}_1(\beta)$, $\boldsymbol{v}_4(\beta)$ – il résulte de (12) que $B'(\beta) = 0$ ou $B''(\beta) = 0$.

3. Aussi la démonstration des assertions III est basée sur le théorème I.

g) Si $[\mathbf{x}(\beta + \frac{1}{2}b) - \mathbf{x}(\beta)] \, . \, \mathbf{t}_1(\beta) = 0$, il s'ensuit, d'après (12) et (8), que

$$B'''(\beta) + \varkappa_1^2 \, B'(\beta) = 0 \, . \tag{3,1}$$

Mais les solutions particulières $\sin \varkappa_1 \beta$ et $\cos \varkappa_1 \beta$ de (3,1) n'ayant pas, compte tenu de (13), la période $\frac{1}{2}b$, il nous reste une seule solution de (3,1), à savoir $B(\beta) = \text{const.}$

h) La proposition en question est évidemment équivalente à g).

i) D'après (12), la distance des points opposés est

$$\varkappa_1^2\varkappa_2^2B'^2 + \varkappa_2^2B''^2 + (B''' + \varkappa_1^2B')^2 + \varkappa_3^2(B'' + \varkappa_1^2B)^2 = \text{const.}$$

En dérivant cette identité et en se servant de (7), nous obtenons que

$$(B''' + \varkappa_1^2B')\,[B^{\mathrm{IV}} + (l_1^2 + l_2^2)\,B'' + l_1^2l_2^2B] = 0 \, . \tag{3,2}$$

Le deuxième facteur étant — à un multiplicateur, constant non nul, près — le rayon de la troisième courbure de la courbe C en question (cf. [3], p. 364), il résulte de (3,2) de nouveau (3,1).

4. Pour démontrer le théorème IV, nous expliquons, à l'aide de (12), la proposition j) sous la forme suivante:

$$\varkappa_1^2\varkappa_2^2B'^2 + \varkappa_2^2B''^2 + \varkappa_3^2(B'' + \varkappa_1^2B)^2 = \text{const.}$$

En dérivant cette identité, nous obtenons, eu égard à (7),

$$(B''' + \varkappa_1^2B')\,(B'' + B) = 0 \, . \tag{4,1}$$

En vertu de (14), il y a une seule intégrale de (4,1) qui possède la période $\frac{1}{2}b$; c'est la solution $B = \text{const.}$

5. Voici la démonstration du dernier théorème V. Vu que les vecteurs qui figurent dans la proposition k) sont, d'après (8), parallèles au vecteur $\mathbf{v}_4(\beta)$, la proposition en question s'exprime sous la forme

$$\varkappa_1^2\varkappa_2^2B'^2 + \varkappa_2^2B''^2 + (B''' + \varkappa_1^2B')^2 = \text{const.}$$

La dérivée de cette identité nous donne

$$(B''' + \varkappa_1^2B')\,[B^{\mathrm{IV}} + (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)\,B''] = 0 \, . \tag{5,1}$$

Vu les inégalités (15), il y a de nouveau une seule solution de (5,1) — à savoir $B = \text{const.}$ — qui a la période $\frac{1}{2}b$.

Bibliographie

[1] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Publ. de la Fac. des Sci. de l'Univ. Masaryk, n° 146, Brno 1931.

[2] *Z. Nádeník:* Кривые Бертрана в пятимерном пространстве. Czech. Math. J. *2* (*77*) (1952), 57—87.

[3] *Z. Nádeník:* Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 363—376.

[4] *Z. Nádeník:* Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée. Czech. Math. J. *17* (*92*), (1967), 447—459.

[5] *Z. Nádeník:* Les courbes gauches de largeur constante. Czech. Math. J. *17* (*92*), (1967), 540—549.

[6] *M. Sypták:* Nadkružnice a nadšroubovice (Hypercirconférences et hyperhélices). Publ. de la Fac. des Sci. de l'Univ. Masaryk, n° 312, Brno 1949.

[7] *M. Sypták:* Obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice. Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae, Math., T. I. Fasc. IV—VI (1956), 179—199.

Adresse de l'auteur: Trojanova 13, Praha 2 (České vysoké učení technické).