Časopis pro pěstování matematiky

Antonín Sochor

Der Π-Prozess

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 145--147

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108581`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

DER Π-PROZESS

ANTONÍN SOCHOR, Praha

(Eingegangen am 23. Januar 1967)

In der Arbeit wird der Begriff des in [2] eingeführten Π-Prozesses, wo der Π-Prozess nur aus einer Menge ausgeht, verallgemeinert. In der vorliegenden Arbeit wird der Π-Prozess auch für eigene Klassen (Nicht-Mengen) definiert und betrachtet. Es wird in der Gödel-Bernaysschen axiomatischen Mengenlehre gearbeitet und es werden die Axiomgruppen A, B, C benützt.

Definition 1. $p_x^0 = x$; $\alpha > 0 \to p_x^\alpha = \mathfrak{P}(\bigcup_{\beta \in \alpha} p_x^\beta)$.

Definition 2. $z \in \Pi(Q) \equiv (\exists x)(\exists \alpha)(x \subseteq Q \mathbin{\&} z \in p_x^\alpha)$ d. h. $\Pi(Q) = \bigcup_{x \subseteq Q} \bigcup_{\alpha \in On} p_x^\alpha$.

Nachdem On We E gilt, kann für $u \in \bigcup_{\alpha \in On} p_x^\alpha$ die folgende Definition eingeführt werden.

Definition 3. $\tau_x(u) \in On \mathbin{\&} u \in p_x^{\tau_x(u)} \mathbin{\&} (\beta)(\beta \in \tau_x(u) \to \neg u \in p_x^\beta)$ ($\tau_x(u)$ ist der Typus von u in bezug auf x).

Lemma 1. $x \subseteq y \to p_x^\alpha \subseteq p_y^\alpha$.

Beweis. Wir beweisen das Lemma mittels transfiniter Induktion. Für $\alpha = 0$ siehe die Voraussetzung. Es sei $\alpha \neq 0$, dann $\beta \in \alpha \to p_x^\beta \subseteq p_y^\beta$; daher $\bigcup_{\beta \in \alpha} p_x^\beta \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} p_y^\beta$ und deshalb ist $p_x^\alpha = \mathfrak{P}(\bigcup_{\beta \in \alpha} p_x^\beta) \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup_{\beta \in \alpha} p_y^\beta) = p_y^\alpha$.

Aus diesem Lemma ergibt sich, dass $\Pi(x) = \bigcup_{\alpha \in On} p_x^\alpha$ ist. Daher stimmt der neueingeführte Π-Prozess für Mengen mit dem in der Arbeit [2] überein.

Lemma 2. $(x \in p_y^\alpha \mathbin{\&} z \in x \mathbin{\&} \alpha \neq 0) \to (\exists \beta)(\beta \in \alpha \mathbin{\&} z \in p_y^\beta)$.

Beweis. Offenbar $x \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} p_y^\beta$ und deshalb $z \in \bigcup_{\beta \in \alpha} p_y^\beta$. Dann ist $(\exists \beta)(z \in p_y^\beta \mathbin{\&} \beta < \alpha)$.

Lemma 3. Comp $(Q) \to$ Comp $(\Pi(Q))$.

Beweis. Es sei $x \in y \in p_z^0 \,\&\, z \subseteq Q$. Dann ist $y \in Q$, daher $x \in Q$ und daher $\{x\} \subseteq$ $\subseteq Q$. Daraus ergibt sich $x \in p_{\{x\}}^0$. In den übrigen Fällen siehe Lemma 2.

Definition 4. $\mathrm{R}(y) \equiv (\exists\alpha)(\alpha \leqq \omega_0 \,\&\, y \operatorname{Fn} \alpha \,\&\, (i)(i + 1 < \alpha \rightarrow y'(i + 1) \in y'i))$ (y ist eine Kette); $z \in Unv\, x \equiv (\exists y)(\mathrm{R}(y, x) \,\&\, z \in \mathfrak{W}(y) \,\&\, y'0 = x)$. (Universum von x (GANDY); $Unv\, x = \{x\} \cup x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \ldots$).

Lemma 4. a) $y \in Unv\, x \rightarrow y \subseteq Unv\, y \subseteq Unv\, x$; b) $\mathrm{M}(Unv\, x)$.

Beweis. Wir definieren $G'\bar{x} = \bigcup \bar{x}$. Nach 8.45 [1] existiert ein z, so dass $z \operatorname{Fn} \omega_0 \,\&$ $\&\, z'0 = \{x\} \,\&\, (i)(i > 0 \rightarrow z'i = \bigcup(z'(i - 1)))$ gilt. Daraus $Unv\, x = \bigcup \mathfrak{W}(z)$ und daher $\mathrm{M}(Unv\, x)$ den Axiomen C_4, C_1, C_2 nach. Die übrigen Behauptungen sind trivial.

Lemma 5. $x \subseteq \Pi(Q) \rightarrow x \in \Pi(Q)$.

Beweis. Für $\mathrm{M}(Q)$ ist die Folgerung klar, da $(\exists\alpha)(z)(z \in x \rightarrow \tau_Q(z) < \alpha)$ gilt. Für $\Pr(Q)$ definieren wir $u = Unv\, x \cap Q$. Es sei $z \in x$, dann $z \in p_y^\alpha$ für ein $\alpha \in On$ und $y \subseteq Q$. Ist $\alpha = 0$, so ist $z \in Q$ und daher $z \in u$, woraus sich $z \in \Pi(u)$ ergibt. Es sei also $\alpha \neq 0$; nach dem Lemma 1 ist $z \in p_{y \cup u}^\alpha$. Wir definieren $v \in Z \equiv v \in Unv\, z \,\&$ $\&\, v \in \Pi(y \cup u) \cap (-\Pi(u))$. Es sei $Z \neq 0$. Wir wählen $v \in Z$ so, dass $\tau_{y \cup u}(v)$ am kleinsten ist. $\tau_{y \cup u}(v) \neq 0$, denn sonst wäre $v \in p_{y \cup u}^0 = y \cup u \subseteq Q$, $v \in Unv\, z \subseteq Unv\, x$, daher $v \in u$ und also $v \in \Pi(u)$. Es sei $v_1 \in v$. Dann ist $v_1 \in Unv\, z$, $\tau_{y \cup u}(v_1) \leqq \tau_{y \cup u}(v)$ nach den Lemma 4,2 und daher $v_1 \in \Pi(u)$. Es ist also $v \subseteq \Pi(u)$ und daher $v \in \Pi(u)$. Damit ist $Z = 0$ bewiesen. Es ist also $z \in \Pi(u)$, woraus sich $x \subseteq \Pi(u)$ ergibt und daher ist $x \in \Pi(u) \subseteq \Pi(Q)$.

Satz 1. *Es sei* $\mathrm{Comp}(\Pi(Q))$. *Definieren wir* $\mathrm{Cls}^*(X) \equiv X \subseteq \Pi(Q)$, $\mathrm{M}^*(X) \equiv$ $\equiv X \in \Pi(Q)$, $X \in^* Y \equiv \mathrm{M}^*(X) \,\&\, \mathrm{Cls}^*(Y) \,\&\, X \in Y$, *so entsteht ein Modell*[1]), *in dem die Axiome* $\mathrm{A}_1^* - \mathrm{A}_4^*$, $\mathrm{B}_1^* - \mathrm{B}_8^*$, $\mathrm{C}_1^* - \mathrm{C}_4^*$ *beweisbar sind.*

Beweis. Es genügt Lemma 5, $\mathrm{Comp}(\Pi(Q))$, $\Pi(0) \subseteq \Pi(Q)$ und den Satz 1 [3] zu benützen.

Lemma 6.[2]) $(U)(X)(X \neq 0 \rightarrow (\exists u)(u \in X \,\&\, u \cap X \subseteq U)) \equiv (U)(x)(x \neq 0 \rightarrow$ $\rightarrow (\exists u)(u \in x \,\&\, u \cap x \subseteq U)$.

Beweis. Es sei $X \neq 0$ so, dass $(u)(u \in X \rightarrow u \cap X \cap (-U) \neq 0)$ gilt. Wir wählen $z \in X$ und definieren $x = X \cap Unv\, z$. Es gilt $\mathrm{M}(x)$, $x \neq 0$. Da $u \in Unv\, z \rightarrow$ $\rightarrow u \subseteq Unv\, z$ ist, so ist $(u)(u \in x \rightarrow u \cap x \cap (-U) = u \cap X \cap Unv\, z \cap (-U) =$ $= u \cap X \cap (-U) \neq 0)$. Die zweite Folgerung ist auf Grund von Axiom A_1 klar.

---

[1]) In der Terminologie von [4] ist dies das Modell $(E \cap (\Pi(Q) \times \Pi(Q)), \bar{\Psi}_0)$.

[2]) Für $U = 0$ siehe 1.4 [5].

Satz 2. $V = \Pi(Q) \equiv (x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists u)(u \in x \,\&\, u \cap x \subseteq Q))$.[3])

Beweis. a) Es sei $V - \Pi(Q) \neq 0$, wir nehmen an, dass die rechte Seite der Äquivalenz gilt. Dem Lemma 6 nach wählen wir $u \in V - \Pi(Q) \,\&\, u \cap (V - \Pi(Q)) \subseteq Q$. Dann ist $u \subseteq \Pi(Q) \cup Q = \Pi(Q)$. Aus dem Lemma 5 ergibt sich $u \in \Pi(Q)$, was ein Widerspruch ist. b) Es sei $x \neq 0 \,\&\, x \in \Pi(Q) = V \,\&\, (u)(u \in x \rightarrow x \cap u \cap (-Q) \neq \neq 0)$. Wir bezeichnen $a = x - Q$; es sei $z \in a$. Dann existiert ein $z_1 \in z \,\&\, z_1 \in a$. Der Definition von x nach ist nämlich $x \cap z \cap (-Q) \neq 0$ und daher $(\exists z_1)(z_1 \in \in x \,\&\, z_1 \in z \,\&\, z_1 \notin Q)$, d. h. $(\exists z_1)(z_1 \in a \,\&\, z_1 \in z)$. Wir bezeichnen $u = Q \cap Unv\, a$. Aus $a \subseteq x \in \Pi(Q)$ und aus Comp (V) ergibt sich $a \subseteq \Pi(Q)$. Nach den Betrachtungen im Beweis des Lemma 5 gilt $z \in a \rightarrow z \in \Pi(u)$. Es sei β eine Ordnungszahl, für die $(\exists z)(z \in a \,\&\, \beta = \tau_u(z)) \,\&\, \neg(\exists z)(z \in a \,\&\, \tau_u(z) < \beta)$ gilt. Dann ist $\beta \neq 0$, denn es ist $p_u^0 = Q \cap Unv\, a \subseteq Q$ und $0 \neq p_u^\beta \cap a \subseteq a \subseteq (-Q)$. Wählen wir z, z_1 so dass $z_1 \in z \,\&\, z \in p_u^\beta$ gilt, so ist $\tau_u(z_1) < \tau_u(z) = \beta$, was ein Widerspruch ist.

Aus dem obigen folgt sofort der

Satz 3. *In der axiomatischen Mengenlehre mit den Axiomgruppen* A, B, C *gilt* $\Pi(0) = V \equiv (x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists u)(u \in x \,\&\, u \cap x = 0))$ *und im Halbmodell* $(E \cap (\Pi(0) \times \times \Pi(0)), \bar{\psi}_0)$ *sind die Axiome der Gruppen* A*, B*, C*, D* *erfüllt.*[4])

Beweis. Comp $(0) \rightarrow$ Comp $(\Pi(0))$ dem Lemma 3 nach. Weiter benützen wir die Sätze 1, 2. Auf der rechten Seite steht das Axiom D′, d.h. das Fundierungsaxiom für Mengen.)

Literatur

[1] *Kurt Gödel:* The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis etc., Princeton University Press 1940.

[2] *Ernst Specker:* Zur Axiomatik der Mengenlehre. Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik *3* (1957), 173.

[3] *Petr Hájek, Antonín Sochor:* Ein dem Fundierungsaxiom äquivalentes Axiom. Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik *10* (1964), 261.

[4] *Petr Vopěnka:* Модели теорем множеств, Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik *8* (1962), 281.

[5] *Petr Vopěnka, Petr Hájek:* Über die Gültigkeit des Fundierungsaxioms in speziellen Systemen der Mengentheorie. Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen der Mathematik *9* (1963), 235.

Anfschrift der Verfassers: Vinohradská 166, Praha 3.

---

[3]) V ist Universalklasse.

[4]) Siehe z. B. [2].