Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

RECENSE

Ralph Henstock: THEORY OF INTEGRATION, Butterworths, London 1963. Stran 168, cena 21s.

V této knize je rozvinuta nová teorie integrace, zahrnující např. Perronův integrál. Výklad je při tom zcela elementární; předpokládají se nejvýše základy $\varepsilon - \delta$ techniky.

Intervalem budeme vždy rozumět zleva uzavřený a zprava otevřený interval. Dělením $\mathscr{D}$ uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$ nazveme konečný počet disjunktních intervalů $\langle u, v)$ takových, že $\bigcup_{\mathscr{D}} \langle u, v) = \langle a, b\rangle$. Řekneme, že množina $\mathscr{L}$ intervalů je zleva úplná v $\langle a, b\rangle$, jestliže ke každému $x \in (a, b\rangle$ existuje $\delta_1(x) > 0$ tak, že $\langle t, x) \in \mathscr{L}$ pro každé $t \in \langle x - \delta_1(x), x)$. Analogicky množina $\mathscr{R}$ intervalů je zprava úplná v $\langle a, b\rangle$, jestliže ke každému $x \in \langle a, b)$ existuje $\delta_2(x) > 0$ tak, že $\langle x, u) \in \mathscr{R}$ pro každé $u \in (x, x + \delta_2(x)\rangle$. Bod x nazveme v obou případech asociovaným k intervalu $\langle t, x)$ resp. $\langle x, u)$, a systém $\{\mathscr{L}, \mathscr{R}\}$ úplným.

V dalším má zásadní význam následující elementární „pokrývací" věta: *Je-li $\{\mathscr{L}, \mathscr{R}\}$ úplný v $\langle a, b\rangle$, pak existuje dělení $\mathscr{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ tvořené intervaly z $\mathscr{L} \cup \mathscr{R}$.*

Nechť f je komplexní funkce na $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f má riemannovsky úplný integrál I přes $\langle a, b\rangle$ (Riemann-complete integral), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje úplný systém $\{\mathscr{L}, \mathscr{R}\}$ na $\langle a, b\rangle$ tak, že pro každé dělení $\mathscr{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ vzniklé z $\mathscr{L} \cup \mathscr{R}$ je $\left|\sum_{\mathscr{D}} f(x)(v - u) - I\right| < \varepsilon$; při tom x je bod asociovaný s intervalem $\langle u, v)$. Lze dokázat, že takto definovaný integrál je ekvivalentní s Perronovým.

Tuto definici autor rozšiřuje i na případ součtů tvaru $\sum f(x)\{g(v) - g(u)\}$, kde g je libovolná funkce na $\langle a, b\rangle$, což vede k integrálu ekvivalentnímu s Wardovým (viz např. S. Saks: Theory of the integral, str. 207). Ještě další zobecnění vede k integraci dvojic funkcí intervalu $\boldsymbol{h} = \{h_l, h_r\}$, což zahrnuje např. Burkillův integrál.

Vedle této konstruktivní definice zavádí autor ještě deskriptivní definici ekvivalentního variačního integrálu; vyslovme ji pro úplnost pro nejobecnější případ funkcí intervalu. Nechť $\boldsymbol{h} = \{h_l, h_r\}$, $\boldsymbol{h}^* = \{h_l^*, h_r^*\}$ jsou dvě dvojice funkcí intervalu v $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že $\boldsymbol{h}^*$ je variačně ekvivalentní s $\boldsymbol{h}$ v $\langle a, b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje úplný systém $\{\mathscr{L}, \mathscr{R}\}$ nezáporná superaditivní funkce intervalu χ tak, že $\chi(a, b) < \varepsilon$, $|h_l^*(t, x) - h_l(t, x)| \leqq \chi(t, x)$, $\forall \langle t, x) \in \mathscr{L}$ a $|h_r^*(x, u) - h_r(x, u)| \leqq \chi(x, u)$, $\forall \langle x, u) \in \mathscr{R}$. Je-li nyní $h_l^* = h_r^* = H$ a je to aditivní funkce intervalu, pak se $H(a, b)$ nazývá variačním integrálem $\boldsymbol{h}$ v $\langle a, b\rangle$.

Stručný obsah knihy je nyní patrný z názvů kapitol: 1. Historical introduction. 2. The Riemann-complete integral. 3. Variational properties of the integral. 4. Differentiation. 5. Limits under the integral sign. 6. Double integrals and Fubini's theorem. 7. The Cauchy and Denjoy extensions, and the integral in an infinite range. 8. Connections with earlier integrals. 9. Linear topological spaces, Young's inequality and integration. 10. Integration in statistics.

Jak již bylo řečeno, základní roli v celé teorii hraje výše uvedená pokrývací věta 16.1. Nebude nezajímavé ocitovat autora (str. 124): *After writing the bulk of this book I received a letter from Professor T. H. Hildebrandt, who very kindly gave me the references Hildebrandt* (1926) *and Young* (1915), *which in turn gave the reference N. Lusin* (1911—12) (jde o práci К основной теореме интегрального исчисления, Мат. сборник 1912 (28)), *in which Lusin gave a proof of my Theorem*

16.1, *so that he has the priority. However, no Denjoy-depth integration is based on that theorem, so that Henstock* (1960a—1961b) *appears to have the priority for the integrals.*

Ekvivalentní definice (s výjimkou variačního integrálu) a některé základní věty této teorie se však naleznou také v práci J. Kurzweila: Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J., 7 (82), 1957. Stojí snad za zmínku, že, pokud vím, byl autor knihy veden k Wardovu integrálu a dalším zobecněním problémy z teorie sumability řad a integrálů.

Teorie vypracovaná v této knize je bezesporu zajímavým přínosem k obtížné a zvláště ve vícerozměrném případě málo propracované části reálné analýzy.

Karel Karták, Praha

N. Bourbaki: INTÉGRATION (Chapitre 5: Intégration des mesures), 2. vydání. Vydalo nakladatelství Hermann, Paris, 1967. Stran 154.

Další svazek Bourbakiho integrace pojednává o integraci měr. Tento pojem umožňuje pozoruhodné metodické sjednocení některých klasických témat teorie míry.

K označením, zavedeným v referátu o prvním svazku (Časopis pěst. matem., *92* (1967), str. 120), připojme ještě následující: $\mathscr{M}_+(X)$ značí kužel nezáporných měr na lokálně kompaktním prostoru X; ε_x značí Diracovu míru soustředěnou v bodě $x \in X$.

První tři paragrafy obsahují pomocné konstrukce a základní definice. Nejprve se zavádí horní podstatný integrál $\mu^\bullet$. Nechť T je lokálně kompaktní prostor a $\mu \in \mathscr{M}_+(T)$. Je-li $f \geqq 0$ na T, položíme $\mu^\bullet(f) = \sup \{\mu^*(f\varphi_K); \varphi_K$ je charakteristická funkce kompaktní množiny $K \subset T\}$. Pomocí $\mu^\bullet$ se nyní definuje pojem podstatně integrovatelných funkcí.

Nechť nyní $\Lambda : t \to \lambda_t$ je zobrazení T do $\mathscr{M}_+(X)$. Řekneme, že Λ je skalárně podstatně integrovatelná v míře μ, jestliže pro každou $f \in \mathscr{K}(X)$ je funkce $t \to \lambda_t(f)$ podstatně μ-integrovatelná. Položíme-li $\nu(f) = \int \lambda_t(f)\, d\mu(t)$, je ν nezáporný lineární funkcionál na $\mathscr{K}(X)$, tedy $\nu = \int \lambda_t\, d\mu(t) \in \mathscr{M}_+(X)$. Ve čtvrtém paragrafu se jedná o integraci Diracových měr. Nechť π je zobrazení z T do X, g je nezáporná a konečná na T. Buď teď $\lambda_t = g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}$. Je-li $\nu = \int g(t)\, \varepsilon_{\pi(t)}\, d\mu(t)$ definováno, pak $\int f\, d\nu = \int f(\pi(t))\, g(t)\, d\mu(t)$, má-li alespoň jedna strana smysl.

Pátý paragraf speciálně jedná o případu $X = T$, $\pi =$ identita, a definice se rozšiřuje i na komplexní hodnoty g a μ. Výsledná míra $\nu = g \,.\, \mu$ se nazývá měrou s bází μ. Tyto míry charakterizuje Lebesgue-Nikodymova věta (každá μ-nulová kompaktní množina je ν-nulová). Dále je zde dokázán např. Lebesgueův rozklad míry a věta o vyjádření lineárního funkcionálu v $\mathscr{L}^p(T, \mu)$, $1 \leqq p < \infty$.

V šestém paragrafu se studuje případ $g \equiv 1$. To vede k pojmu obrazu $\pi(\mu)$ míry μ v zobrazení π. Z aplikací je zde uvedena věta o záměně proměnných při integraci na přímce.

Je-li X lokálně kompaktní podprostor prostoru T, pak se touto cestou dospěje k vlastnostem indukované míry (§7).

Konečně v osmém paragrafu se v tomto duchu interpretuje součinová míra na $T \times T'$ (viz III. kapitola); speciálním případem jedné obecné věty z §3 je pak Fubiniho věta.

Kniha zase končí několika desítkami cvičení a velmi zajímavou historickou poznámku ke kapitolám II—V.

Karel Karták, Praha

Serge Lang: RAPPORT SUR LA COHOMOLOGIE DES GROUPS. W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam 1966; str. 260, cena viaz. $ 8,—, neviaz. $ 3,95.

V úvode autor poznamenáva, že táto monografia bola zamýšľaná pôvodne pre sériu publikácií, ktorých autorom je Bourbaki; keďže však Bourbaki nebude v najbližšom čase (ak vôbec) písať o tejto problematike, rozhodol sa autor vydať knihu v predloženej forme. Monografia má deväť kapitol, ktorých názvy sú tieto: Existencia a jednoznačnosť; Relácie vzťahované na podgrupy; Kohomologická trivialita; $\bigcup$-súčiny („cup produits"); Rozšírené súčiny; Spektrálne postupnosti; Grupy Galoisovho typu; Rozšírenia grúp; Tvorenie tried. Okrem autorových pôvodných príspevkov opiera sa kniha hlavne o nepublikované prednášky Tateove, v ktorých boli použité metódy a výsledky E. Artina. Úvaha v kapitole IV je založená na pojme multilineárnej kategórie, pochádzajúcom od Cartiera, a jej hlavným výsledkom je veta Nakayamu-Tatea. Celú kapitolu VII (ktorej najdôležitejšie vety sa týkajú kohomologickej dimenzie) tvoria nové prv nepublikované výsledky Tateove.

Kniha je písaná prehľadným a jasným štýlom. Spôsob podania je pomerne náročný; autor predpokladá u čitateľa za známe len základné pojmy homologickej algebry, k sledovaniu stručne formulovaných dôkazov potrebuje však čitateľ značnú „rutinu" v používaní obratov, ktoré sú typické pre homologickú algebru. Nedostatkom knihy je, že na konci chýba bibliografia a že aj bibliografické údaje v texte sú často neúplné (napr. bez udania ročníka časopisu).

Ján Jakubík, Košice

GENERAL TOPOLOGY AND ITS RELATIONS TO MODERN ANALYSIS AND ALGEBRA II. Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, 1966. Vydala Academia, nakladatelství ČSAV, Praha 1967. Stran 365, 7 obr., cena váz. výtisku Kčs 90,—.

Úvodní část sborníku obsahuje stručnou zprávu o symposiu, seznam účastníků a seznam přednesených sdělení. Hlavní část knihy tvoří sdělení přednesená účastníky symposia. Z 85 sdělení přednesených na symposiu je ve sborníku publikováno 76 (seznam sdělení přednesených na symposiu je uveden ve zprávě o symposiu otištěné v Časopise pro pěstování matematiky *92* (1967), 243—245). Kromě toho je ve sborníku otištěno ještě 5 příspěvků, které nemohly být na symposiu z různých důvodů předneseny.

Část příspěvků je ve tvaru stručného výtahu, většinou jde o delší text, kde jednotlivá tvrzení jsou uváděna zpravidla bez důkazů. Po stránce jazykové je 69% sborníku psáno anglicky, 22% německy, 7% rusky a 2% francouzsky.

Velký počet příspěvků znemožňuje zmínit se o každém z nich. Připomeňme si proto alespoň přehledné přednášky, které se zhruba kryjí se skupinou nejzávažnějších příspěvků. Převážná většina článků je věnována problémům topologických struktur. P. S. Alexandrov a V. Ponomarev pojednávají o projekčních spektrech a o vývoji teorie absolutů. R. D. Anderson vyšetřuje homeomorfní zobrazení těchto prostorů nekonečné dimense: Hilbertova prostoru l_2, spočetného součinu přímek s a Hilbertova kvádru I^{∞}. Článek R. H. Binga uvádí příklady kompaktních metrických prostorů nekonečné dimense, které neobsahují uzavřené podmnožiny dimense 1. V článku L. Gillmana se studuje závislost tvrzení o kompaktním β-obalu na hypothese kontinua. Přehledná přednáška L. V. Keldyšové a A. V. Černavského o topologických vnořeních v euklidovských prostorech seznamuje s výsledky sovětské školy geometrické topologie. S. Mardešić podává přehled výsledků ve zkoumání problému topologické charakterisace tříd prostorů IOC a IOK, kde IOC (IOK) je třída prostorů X, které můžeme získat jako obrazy uspořádaných kontinuí C (kompaktů K). Ju. M. Smirnov zkoumá vztahy mezi vlastnostmi prostorů X a $cX - X$, kde cX je daný kompaktní obal prostoru X.

Některé články se zabývají obecnějšími strukturami, než jsou topologické (uniformní, proximitní, syntopogenní). M. Katětov ve svém článku buduje teorii konvergenčních struktur na základě teorie merotopních struktur. Řada příspěvků je věnována teorii dimense. Sborník obsahuje přehlednou přednášku Jun-iti Nagaty, který podrobně zkoumá současný stav teorie dimense, a to odděleně pro prostory metrisovatelné a nemetrisovatelné.

Další skupina příspěvků pojednává o vztazích topologie k funkcionální analyse. Článek D. A. Edwardse je věnován aproximaci a separaci reálných funkcí na Choquetových simplexech. Rovněž vztahům mezi topologií a algebraickými strukturami je věnována řada článků. Poslední skupinu tvoří jednotlivé příspěvky týkající se vztahů mezi topologií a ostatními matematickými disciplínami (matematická logika aj.).

Vědecká úroveň sborníku je vysoká, i když se ve sborníku vyskytují i příspěvky slabší. Domnívám se, že sborník poskytuje dobrý přehled o současném stavu a tendencích vývoje obecné topologie.

V závěru je třeba ocenit, že nakladatelství i tiskárna knihu vydaly a vytiskly v poměrně krátké lhůtě devíti měsíců, což je u sborníku zvláště důležité a je velmi oceňováno našimi i zahraničními matematiky. Přitom je ve sborníku poměrně málo tiskových chyb. Všechny tiskové chyby si čtenář lehce opraví, výjimku snad tvoří str. 197_{16}, kde místo $F_i^{X_i}$ má být $\overline{F}_i^{X_i}$. Na druhé straně je politováníhodné, že cena sborníku je tak vysoká.

Václav Koutník, Praha

A. Doneddu: COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES. Tome 2: Analyse et géométrie différentielle. Vydal Dunod, Paris 1966, stran 687, cena neudána.

Jméno francouzského autora A. Donedduho se v poslední době objevilo již třikrát na stránkách našeho časopisu. Jan Vyšín referoval zde o dvou dílech jeho třídílné učebnice elementární matematiky[1]) a naše nedávná recense se týkala prvního dílu jeho kursu vyšší matematiky.[2]) V této zprávě si všimneme druhého dílu, kterým Doneddu uzavřel svůj „Cours de mathématiques supérieures". I tento svazek je velmi rozsáhlý a autor jej podle slov své předmluvy psal pro studující, kteří se chtějí obeznámit s vyšší matematikou. Pokud se týče celkového hodnocení tohoto druhého dílu, zůstává v platnosti to, co jsme před časem napsali o dílu prvním. Zdá se nám zejména, že kniha je vhodnější pro opakování (v každé kapitole je řada cvičení) a že se hodí již méně jako samostatný úvod do studia. Je tu shrnuto mnoho materiálu, o němž není vždy jasné, zda je uspořádán právě nejvhodněji. Kniha je rozdělena do šesti oddílů, kterých si nyní všimneme trochu blíže.

První oddíl se týká funkcí jedné reálné proměnné a je rozdělen do sedmi kapitol. Je tu zhruba vše, o čem se studenti učí v prvních semestrech na našich vysokých školách (limita, derivace, Taylorův rozvoj, určitý integrál, logaritmická a exponenciální funkce apod.), ale výklad nejde do takové hloubky, jak jsme na to zvyklí např. z knih Jarníkových. Druhý oddíl je stručnější — má jen dvě kapitoly — a týká se vektorových funkcí jedné nebo více proměnných. Začíná se samozřejmě definicí vektorového prostoru, normy a vektorové funkce a čtenář se seznámí např. i s Banachovým prostorem. Třetí oddíl se zabývá diferenciální geometrií, ale autor se jen letmo dotýká základních pojmů. Je tu výklad o křivkách, jejich vyjádření v polárních souřadnicích, je definována křivost a torse a poslední, čtvrtá kapitola tohoto oddílu pojednává o některých speciálních křivkách (o astroidě, cykloidě apod.). Čtvrtý oddíl se zase vrací k pojmu integrálu. Ve čtyřech kapitolách se tu definuje křivkový a násobný integrál a přihlíží se k aplikacím v mecha-

[1]) Časopis pro pěstování matematiky, roč. *89*, str. 336 a roč. *91*, str. 105.

[2]) Časopis pro pěstování matematiky, roč. *91*, str. 366.

nice (např. moment setrvačnosti). Není nám jasné, proč autor do pátého oddílu shrnul jednak pojednání o diferenciálních rovnicích, jednak numerické řešení algebraických rovnic. Na diferenciální rovnice tak zbývá asi 40 stránek, takže si čtenář učiní představu, do jaké hloubky může autor asi jít. Pokud se týče numerického řešení algebraických rovnic, najdeme tu např. separaci kořenů a klasické metody aproximace kořenů algebraické rovnice vyššího stupně. Numerickým řešením soustav se autor nezabývá. Závěr knihy tvoří oddíl věnovaný kinematice. Má tři kapitoly a bude asi zajímat spíše fyziky. Vyšetřuje se tu pohyb bodu (rychlost, zrychlení a speciální druhy pohybů) a pohyb tuhého tělesa (rotační pohyb, šroubový pohyb, skládání pohybů atd.).

Za závadu knihy považujeme to, že tu chybí rejstřík, což zvláště v tak rozsáhlé knize ztěžuje orientaci. Bylo by možné diskutovat též o tom, zda je vhodné shrnout takové množství látky do jednoho dvousvazkového díla, které se tím na jedné straně rozrůstá do značných rozměrů a na druhé straně nutně trpí určitou povrchností.

Jitka Kučerová a *Jiří Sedláček*, Praha

N. Bourbaki: ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE. Fascicule XV. Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 et 2. Základy matematiky. Díl XV. Topologické vektorové prostory. Kapitola 1 a 2. Hermann, Paris 1966. Počet stran 178. Cena neuvedena.

V předmluvě k recensované části Bourbakiho traktátu autor říká, že oproti 1. vydání došlo ve 2. vydání k několika změnám, která se týkají některých detailů, ale hlavně přidání paragrafu o slabé dualitě ke kapitole 2 (byla v podstatě převzata z kapitoly 4 prvního vydání) a daleko hlubšího studia pojmů induktivní limita lokálně konvexních prostorů a extremálních vytvořujících prvků konvexního kužele v topologickém vektorovém prostoru. Odtud je též patrné, čím se recensovaná část díla liší od odpovídající části u nás dobře známého ruského vydání knihy V. „Topologické vektorové prostory". Mezi nepodstatné změny patří též přečíslování a změny pořadí jednotlivých paragrafů, definicí a vět. I s touto „maličkostí" autor počítá a pro pohodlí čtenáře připojuje na konec knížky tabulku, v níž je provedeno podrobné přiřazení odpovídajících si definicí a vět 1. a 2. vydání.

V kapitole 1, nazvané „Topologické vektorové prostory nad normovaným tělesem", jsou probrány základní vlastnosti topologických vektorových prostorů, jejich podprostorů, součtů, součinů a faktorů. Jsou v ní probírány otázky spojené s úplností a se zúplněním, jakož i s některými způsoby zavádění topologie do vektorových prostorů. Dále jsou v ní vyšetřovány vlastnosti lineárních variet v topologických vektorových prostorech. Kapitola 1 končí paragrafem věnovaným metrisovatelným topologickým vektorovým prostorům. Jak je pravidlem v každém knize Bourbakiho, tak i kapitola 1 recensované části je uzavřena cvičeními ke každému ze tří paragrafů kapitoly. Rovněž tak jako obvykle, je ve cvičeních uložen obrovský faktický materiál, kterého se užívá též na některých místech základního textu. Tyto poznámky se týkají též cvičení ke kapitole 2.

Rozsáhlá kapitola 2, nazvaná „Konvexní množiny a lokálně konvexní prostory", sestává z osmi paragrafů a dodatku. Kromě paragrafu 1 resp. 8, kdy se vyšetřování provádějí nad libovolným nediskrétním tělesem resp. nad tělesem komplexních čísel, jsou vyšetřování prováděna vesměs nad tělesem reálných čísel. V této kapitole se vyšetřují nejprve topologie zadané na vektorových prostorech pomocí seminorem (§1) a vlastnosti konvexních množin ve vektorových prostorech (§2). Jsou studovány konvexní kužele a zaváděné jimi částečná uspořádání topologických vektorových prostorů. Dalším tématem jsou otázky spojené s rozšiřováním lineárních forem (Hahn-Banachova věta, v tomto paragrafu — §3, je uváděn její analytický tvar). Následuje studium lokálně konvexních prostorů (§4), jmenovitě pak některé způsoby zavádění lokálně konvexních topologií. Geometrický tvar Hahn-Banachovy věty je uveden v souvislosti s vyšetřováním problému oddělování konvexních množin v lokálně konvexních prostorech (§5). Další částí je paragraf 6 věnovaný slabým topologiím. Jsou studovány slabé faktor-topologie, součty, součiny slabých topologií, slabá úplnost a vlastnosti konvexních kuželů ve slabých topologiích. Reálná analysa ja završena studiem otázek spojených s extremálními prvky konvexních množin a speciálně konvexních kuželů (§7). Poslední, osmý, paragraf této kapitoly obsahuje výsledky platné pro topologické vektorové prostory nad tělesem komplexních čísel. Posléze v dodatku je dokázána věta o společném pevném bodu systému komutujících lineárních zobrazení reprodukujících kompaktní kužel. Celá knížka je uzavřena cvičeními ke všem paragrafům kapitoly 2 a dodatku.

Recensovaná kniha je součástí známého traktátu, jehož kvality, i přes výtky se strany některých matematiků, není třeba zvlášť zdůrazňovat. Obsahově recensovaná část díla patří, možno říci, ke všeobecnému vzdělání každého matematika, čímž je též určeno, kterým čtenářům je kniha určena.

Ivo Marek, Praha

Harold L. Dorwart: THE GEOMETRY OF INCIDENCE. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1966; stran xviii + 156.

Úvodní učebnice reálné rovinné projektivní geometrie a geometrie konečných rovin, elementárně, avšak zcela moderně pojatá. V předmluvě autor zajímavým způsobem shrnuje některá soudobá hlediska na úlohu geometrie v rámci dnešní matematiky (cituje H. Busemanna, A. Seidenberga, F. Kleina, R. Couranta a H. Robbinse, a konečně I. Halperina z jeho předmluvy k dílu „Continuous Geometry" od J. von Neumanna).

Autor se omezuje jen na geometrické struktury, v nichž vystupují jako primitivní pojmy *bod*, *přímka* a *incidence*. V kapitole I hovoří o Kleinově klasifikačním principu, o adjunkci nevlastních elementů, o vztahu mezi bodovými a přímkovými souřadnicemi a o souřadnicích homogenních. — — V kapitole II studuje reálnou projektivní rovinu, především pak princip duality a různé konfigurační útvary. — V kapitole III se zabývá základními konfiguračními větami (Pappus, Desargues, Pascal, Brianchon). — V kapitole IV, která je z celé knihy asi nejzajímavější, je nejprve definována obecná projektivní rovina (zde je velmi oceněn přínos L. A. Skornjakova a celý výklad je vůbec zahájen citací z jedné základní práce tohoto sovětského autora), pak se ale další úvahy omezují jen na konečné projektivní roviny. Pro zajímavost citujme následující přehled o prokázané existenci či neexistenci konečných projektivních rovin nejnižšího řádu n (pro $n = 2$ až 19). Připomeňme, že číslo n se nazývá *řádem* konečné projektivní roviny, když každá její přímka obsahuje právě $n + 1$ bodů.

Následuje krátký popis vyjádření konečných projektivních rovin užitím latinských čtverců a dále je zmíněna zajímavá historie Eulerovy hypotézy o neexistenci dvojice ortogonálních latinských čtverců řádu $n = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Pro $k = 1$ byla hypotéza potvrzena Tarrym v r. 1901, kdežto pro $k = 2$ (a pro některá další k) byla hypotéza vyvrácena Parkerem, Bosem a Shrikhandem v r. 1959 (přitom bylo užito počítačů). V závěru je řeč o interpretaci konečných projektivních rovin užitím tzv. perfektních diferenčních množin. Protože jde (podle recensentova názoru) o krajně zajímavou tématiku, pokusme se o podrobnější zmínku. *Perfektní diferenční množinu řádu n* lze chápat jako konečnou posloupnost přirozených čísel $d_1, \ldots, d_{n+1}$ takových, že $n(n + 1)$ rozdílů $d_i - d_j$ (kde i, j jsou všecky možné dvojice různých indexů probíhajících množinu přirozených čísel $1, \ldots, n + 1$) je při vhodném uspořádání rovno postupně číslům $\pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots, \pm n(n + 1)/2$. Tak např. pro $n = 2$ tvoří čísla 1, 2, 4 perfektní diferenční množinu, protože $1 - 2 = -1$, $1 - 4 = -3$, $2 - 4 = -2$, $2 - 1 = 1$, $4 - 1 = 3$, $4 - 2 = 2$. Singer ukázal v r. 1938, že pro n rovné prvočíslu anebo mocnině prvočísla existuje vždy perfektní diferenční množina řádu n, že perfektním diferenčním množinám kanonicky odpovídají právě tzv. konečné cyklické projektivní roviny a že každá konečná desarguesovská rovina je cyklická. Mann a Evans

Řád n	Existence	Počet bodů v celé rovině	Počet bodů na přímce	Typ
2	Ano	7	3	Existuje pouze desarguesovská rovina
3	Ano	13	4	Existuje pouze desarguesovská rovina
4	Ano	21	5	Existuje pouze desarguesovská rovina
5	Ano	31	6	Existuje pouze desarguesovská rovina
6	Ne	Neexistence prokázána Tarrym v r. 1901		
7	Ano	57	8	Existuje pouze desarguesovská rovina
8	Ano	73	9	Existuje pouze desarguesovská rovina
9	Ano	91	10	Existuje nedesarguesovská rovina
10	Neví se			
11	Ano	133	12	Existuje pouze desarguesovská rovina
12	Neví se			
13	Ano	183	14	Existuje pouze desarguesovská rovina
14	Ne	Neexistence prokázána v r. 1949 Bruckem a Ryserem		
15	Neví se			
16	Ano	273	17	Existují nedesarguesovské roviny
17	Ano	307	18	Existuje pouze desarguesovská rovina
18	Neví se			
19	Ano	421	20	Existuje pouze desarguesovská rovina

dokázali, že pro cyklickou projektivní rovinu řádu $n \leqq 1600$ musí být n prvočíslo anebo mocnina prvočísla. — K tomu nyní připojme několik poznámek o výsledcích, které v recensované knize uvedeny nejsou. Připomeňme, že projektivní rovina se nazývá cyklická, připouští-li cyklickou grupu kolineací, působící transitivně na množině bodů roviny. Existenci nekonečných nedesarguesovských cyklických projektivních rovin prokázal M. Hall již v r. 1947, dodnes však se neví, zda každá konečná cyklická rovina je desarguesovská (Hallova domněnka praví, že tomu tak je). V r. 1965 dokázal H. Karzel, že každá nekonečná cyklická projektivní rovina již musí být nedesarguesovská a dokázal tak jinou domněnku, pocházející rovněž od M. Halla. — Vraťme se však k recensované knize: ta končí zajímavými doložkami k různým částem textu a obsáhlou současnou bibliografií. Recensent soudí, že kniha je velmi zdařilá.

Václav Havel, Brno

Ákos Császár: GRUNDLAGEN DER ALLGEMEINEN TOPOLOGIE. (Základy obecné topologie.) B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (cena MDN 34) & Akadémiai Kiadó, Budapest 1963 (cena $ 9.00). Stran 367.

Poprvé byla tato kniha vydána ve francouzštině (Fondaments de la topologie générale, Budapest et Paris 1960), další vydání bylo podstatně přepracováno a vyšlo anglicky (Foundations of general topology, Pergamon Press, New York 1963). Německé vydání je téměř nepozměněný překlad tohoto anglického vydání.

Název říká málo o obsahu této knihy. Hlavním tématem jsou totiž syntopogenní struktury. Teorii těchto struktur je věnována přibližně polovina knihy. Ve druhé polovině je ukázáno, že v rámci teorie syntopogenních struktur lze topologii skutečně vybudovat. Za zmínku stojí, že i syntopogení struktury lze dále zobecňovat (viz např. Heinrich Matzinger: Über die Axiome der topologischen Räume und verallgemeinerter metrischer Räume, Math. Zeitschr. *93,* 80—86 (1966) nebo některé výsledky M. Katětova).

Kniha je rozdělena do 20 kapitol. V prvních pěti kapitolách se studují (bi-)perfektní (polo-) topogenní uspořádání, což jsou relace uspořádání na množině všech podmnožin M. Je-li např. M topologický prostor, pak uspořádání „množina A je obsažena ve vnitřku množiny B“, je perfektní topogenní a dokonce každé perfektní topogenní uspořádání lze takto interpretovat.

Zdá se nám, že 6. kapitola, pojednávající o vzoru polotopogenního uspořádání, by se stala srozumitelnější užitím faktorprostoru.

V 7. až 9. kapitole jsou zavedeny syntopogenní struktury (což jsou jisté množiny topogenních uspořádání) a prostory a jejich generování. Ukazuje se, že speciálním případem syntopogenních prostorů jsou topologické, proximitní a uniformní prostory. Studium jejich vzájemných vztahů je odloženo do 12. kapitoly.

Desátou kapitolu lze považovat za zahájení vlastního výkladu topologie pomocí syntopogenních struktur. Pojednává se o spojitosti zobrazení, o součinu a oddělitelnosti syntopogenních prostorů. Je ukázán význam metriky. Je podána Czipszerova metoda, umožňující libovolnou syntopogenní strukturu generovat pomocí systému reálných funkcí.

Výklad konvergence pomocí báze filtru, použitý autorem v 15. kapitole se zdá výhodnější proti výkladu pomocí konvergence filtrů. Ja zaveden pojem uzávěru, Cauchyho báze filtru, kompaktnost a úplnost syntopogenního prostoru. Zdá se, že ani zde nejde o příliš významná zobecnění běžných pojmů, jak ukazují např. tvrzení (15.35) a (15.47).

Šestnáctá kapitola pojednává o rozšiřování syntopogenních prostorů. V podstatě jde o transformaci běžných metod (např. Alexandrovovy konstrukce kompaktního obalu).

Závěrečné kapitoly obsahují převážně výklad J. Czipszerových výsledků.

Po přípravné 17. kapitole je ukázáno v 18. kapitole, že syntopogenní prostor lze vnořit do syntopogenní krychle, jejíž dimenze je zde přesně vymezena. V 19. a 20. kapitole jsou probírány různé otázky, které souvisí s metrikou.

Úprava knihy je pěkná a tiskové chyby téměř neexistují. Kniha je napsána velice pečlivě a dosažený stupeň přesnosti je vysoký. Řada pojmů a výsledků se může zdát samoúčelná. Mnoho věcí bylo možno přenechat čtenáři jako cvičení. Výklad je srozumitelný, přemíra označení však místy vyžaduje od čtenáře zvýšenou houževnatost. Dílo je určeno specialistům; vyžaduje zběhlost v topologii, neboť výklad topologie pomocí syntopogenních struktur je originální, ale poněkud těžkopádný.

Petr Kratochvíl, Praha

O. Lehto, K. I. Virtanen: QUASIKONFORME ABBILDUNGEN, Springer-Verlag 1965.

Kniha finských matematiků O. Lehto a K. I. Virtanena je věnována systematickému výkladu teorie kvasikonformních zobrazení v rovině. Autoři vycházejí z geometrické definice: Homeomorfní zobrazení w rovinné oblasti G, zachovávající orientaci, se nazývá K-kvasikonformní (v dalším stručně $K-QC$ zobrazení), jestliže $K(G) = \sup_{Q \subset G} (M(w(Q))/M(Q)) \leqq K < \infty$. Zde Q je libovolný čtyřroh (tj. Jordanova oblast a posloupnost z_1, z_2, z_3, z_4 jejích hraničních bodů), $M(Q)$ jeho modul (tj. poměr stran obdélníka, na nějž lze Q konformně zobrazit tak, že se body z_i zobrazí na vrcholy obdélníka). Ukazuje se, že geometrická definice je ekvivalentní s touto analytickou definicí: Homeomorfní zobrazení w rovinné oblasti G, zachovávající orientaci, se nazývá K-kvasikonformní, jestliže platí: 1. V každém obdélníku $R = \{x + iy \mid a < x < b, c < y < d\}$, $\bar{R} \subset G$, je w absolutně spojitou funkcí x na skoro všech úsečkách $I_y = \{x + iy \mid a < x < b\}$ a absolutně spojitou funkcí y na skoro všech úsečkách $I_x = \{x + iy \mid c < y < d\}$. 2. Skoro všude v G platí $\max_\alpha |\partial_\alpha w(z) \leqq| K \min_\alpha |\partial_\alpha w(z)|$, kde $\partial_\alpha w(z)$ je derivace w v bodě z ve směru α. Důkazu ekvivalence analytické a geometrické definice, která patří k nejhlubším faktům celé teorie, a studiu jejích důsledků, je věnována IV. kapitola. V posledním paragrafu této kapitoly je zaveden důležitý pojem komplexní dilatace $\varkappa(z)$ daného $K-QC$ zobrazení, která zachycuje nejen velikost dilatačního kvocientu $K-QC$ zobrazení v bodě, tj. poměru $D(z) = \max_\alpha |\partial_\alpha w(z)|/\min_\alpha |\partial_\alpha w(z)|$, ale i směr „maximálního roztažení“ $K-QC$ zobrazení v bodě.

Z analytické definice je hned patrno, že jde o dalekosáhlé zobecnění konformních zobrazení: je-li w konformní zobrazení, je w analytická funkce a ve 2. platí všude v G rovnost s $K = 1$. Obráceně důsledkem ekvivalence analytické a geometrické definice je, že zobrazení, které je $1-QC$ ve smyslu analytické definice, je už konformní. Zároveň je však vidět, že v teorii $K-QC$ zobrazení nelze vystačit s metodami teorie funkcí komplexní proměnné. Podstatná část teorie $K-QC$ zobrazení se opírá o teorii funkcí reálné proměnné, i když se tu kladou problémy, které jsou zobecněním úloh z teorie funkcí komplexní proměnné. Jde tu zejména o tyto problémy: a) zobecnění úlohy o existenci konformního zobrazení jednoduše souvislých oblastí; b) otázka prodlužitelnosti (odstranitelných singularit) $K-QC$ zobrazení; c) otázka, za jakých podmínek je $K-QC$ zobrazení konformní v daném bodě resp. kdy je hladké v G. Řešení těchto otázek je věnována kapitola V. Úloha a) se formuluje takto: V dané oblasti G je dána měřitelná funkce $\varkappa$, $\sup_{z \in G} |\varkappa(z)| < 1$. Jest zkonstruovati $K-QC$ zobrazení, jehož komplexní dilatace je rovna $\varkappa(z)$ pro skoro všechna $z \in G$. Pomocí metody „kvasikonformního slepování oblastí“, která se opírá o hluboké výsledky L. Ahlforse a A. Beurlinga, vyložené v II. kapitole, je ukázáno, že tato úloha má vždycky řešení pro stupňovité funkce, odkud se limitním přechodem dostane obecný případ. Pokud jde o úlohu c), je ukázáno toto: je-li w $K-QC$ zobrazení roviny na sebe takové, že $w(0) = 0$ a že se w v okolí počátku málo liší od konformního zobrazení v tom smyslu, že $\iint_{|z| < r} [(D(z) - 1)/|z|^2] \, dx \, dy < \infty$ pro jisté $r < \infty$, je $w(z)$ konformní v počátku. Pro diferencovatelnost $K-QC$ zobrazení v bodě resp. v oblasti jsou udány analogické podmínky v termínech komplexní dilatace $\varkappa(z)$. Na příkladech je pak ukázáno, že tyto podmínky regularity zdaleka nejsou nutné. V V. kapitole je dále ukázána souvislost $K-QC$ zobrazení se zobecněným řešením Beltramiho systému, který se pomocí Hilbertovy transformace převede na integrální rovnici. Užitím hlubokého faktu, že Hilbertova transformace je omezeným operátorem v $L_p(\Omega)$ pro každé $p > 1$, se ukáže, že zobecněné derivace $K-QC$ zobrazení jsou funkce ležící v $L_p(\Omega)$ pro jisté $p > 2$, jehož velikost závisí na K. To je zostření výsledku ze IV. kapitoly, kde je dokázána integrovatelnost kvadrátu zobecněných derivací $K-QC$ zobrazení.

VI. kapitola je věnována zavedení a základním vlastnostem $K-QC$ funkcí. Jde tu o to, zbavit se podmínky, že zobrazení je prosté, aby však přitom zůstaly zachovány základní rysy teorie $K-QC$ zobrazení.

Kromě této základní problematiky najde čtenář v knize řadu dalších jemných problémů. Tak např. v II. kapitole jsou studovány různé extremální úkoly, úlohy o deformaci $K-QC$ zobrazení, otázky kompaktnosti a konvergenční věty a konečně otázka, kdy lze $K-QC$ zobrazení prodloužit přes hranici oblasti.

Kniha se čte velmi pěkně, důkazy vět jsou podrobné a v mnoha případech nabyly patrně definitivního tvaru. Všechna potřebná fakta z topologie a teorie konformního zobrazení jsou shrnuta v I. kapitole, potřebné věci z teorie reálných funkcí jsou podrobně vyloženy ve III. kapitole. Výběr pomocných faktů je velmi zdařilý: výklad je systematický a je vyloženo jen to, co je vskutku potřeba. Všechny zaváděné pojmy jsou krásně motivovány a často ilustrovány řadou důmyslných protipříkladů. Před každou kapitolou je uveden její stručný obsah, který současně vhodně uvádí čtenáře do okruhu studovaných problémů.

Monografie obsahuje řadu originálních výsledků autorů. Lze ji vřele doporučit všem zájemcům o moderní teorii funkcí.

Jaroslav Fuka, Praha