Časopis pro pěstování matematiky

Jan Stanisław Lipiński

Sur la classe $\mathcal{M}_2'$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 2, 222--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108574

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

SUR LA CLASSE $\mathscr{M}'_2$

JAN STANISŁAW LIPIŃSKI, Lódź

(Reçu le 7. juin 1967)

Dans cette Note nous nous occuperons de trois propriétés des fonctions, plus strictement, des rapports entre les propriétés de Darboux, de Denjoy et la propriété $\mathscr{M}'_2$ de Zahorski. Étudiant les dérivées des fonctions continues, ces mathématiciens ont constaté qu'elles jouissent des propriétés qui portent leurs noms. Or, il existe des fonctions qui jouissent de ces propriétés et ne sont pas des dérivées.

Une fonction réelle $f(x)$ a la propriété de Darboux, si pour tout ensemble connexe E l'image $f(E)$ de cet ensemble est un ensemble connexe. Soit $f(x)$ une fonction mesurable au sens de Lebesgue. Posons $E_a^b(f) = \{x: a < f(x) < b\}$. La fonction mesurable $f(x)$ jouit de la propriété de Denjoy si et seulement si pour tout couple de nombres a et b et pour tout intervalle fermé J l'inégalité $E_a^b(f) \cap J \neq 0$ entraîne $|E_b^a(f) \cap J| > 0$. Posons encore $E_a(f) = \{x: f(x) > a\}$ et $E^a(f) = \{x: f(x) < a\}$. La fonction mesurable $f(x)$ jouit de la propriété $\mathscr{M}'_2$ de Zahorski, si pour tout intervalle fermé J et pour tout nombre a l'inégalité $E_a(f) \cap J \neq 0$ entraîne $|E_a(f) \cap J| > 0$ et l'inégalité $E^a(f) \cap J \neq 0$ entraîne $|E^a(f) \cap J| > 0$. Dans ces deux définitions on suppose que l'intervalle J n'est pas dégénéré, c'est-à-dire qu'il n'est pas un nesemble composé d'un seul point. Au lieu de dire qu'une fonction a la propriété $\mathscr{M}'_2$, on dit aussi qu'elle appartient à la classe $\mathscr{M}'_2$.

On voit aisément que toute fonction ayant la propriété de Denjoy doit appartenir à la classe $\mathscr{M}'_2$. L. MIŠIK a démontré [3] qu'une fonction de 1ère classe de Baire ayant la propriété $\mathscr{M}'_2$ doit aussi jouir de la propriété de Denjoy. Pour une fonction de 1ère classe de Baire, la propriété $\mathscr{M}'_2$ et celle de Denjoy sont donc équivalentes. Remarquonds encore que toute fonction de 1èr classe de Baire qui jouit de la propriété $\mathscr{M}'_2$ doit aussi avoir la propriété de Darboux ([4] p. 6, théorème 1). Il existe pourtant des fonctions de 1ère classe de Baire qui ont la propriété de Darboux, mais n'ont pas la propriété $\mathscr{M}'_2$.

Le but de cette Note est de compléter les résultats de L. Mišik, dont l'étude a porté sur les rapports entre les propriétés de Darboux, de Denjoy et $\mathscr{M}'_2$ pour des fonctions de Baire, pas nécessairement de 1ère classe. Dans le travail [3] il a donné un exemple de fonction de 2e classe de Baire qui a la propriété $\mathscr{M}'_2$, mais ne jouit pas de la propriété de Denjoy. Cette fonction ne jouit pas non plus de la propriété de Darboux.

A propos de cet exemple, L. Mišik a posé la question: existe-t-il une fonction de 2^e classe de Baire qui jouisse aussi bien de la propriété $\mathscr{M}'_2$ que de celle de Darboux, mais ne jouisse pas de la propriété de Denjoy? Avant de répondre à cette question, nous donnerons encore quelques exemples de fonctions de 2^e classe de Baire qui ont la propriété $\mathscr{M}'_2$, mais n'ont pas celle de Denjoy. Pour définir ces fonctions nous utiliserons les dérivées de Köpcke.

A. Köpcke dans son travail [2], et, après lui, de nombreux auteurs ont construit des fonctions continues et dérivables qui n'admettent aucun intervalle dans lequel elles soient monotones, et, par conséquent, aucun dans lequel elles soient constantes. On trouvera dans le travail [4] les indications bibliographiques sur les dérivées de ces fonctions, dites „dérivées de Köpcke". Pour les dérivées de Köpcke $f'(x)$ les ensembles $E_0(f')$ et $E^0(f')$ sont nécessairement denses sur la droite et, ce qui résulte de la propriété $\mathscr{M}'_2$, elles doivent avoir avec chaque intervalle une partie commune de mesure positive. La dérivée jouissant de la propriété de Darboux, l'ensemble $\{x: f'(x) = 0\}$ pour une dérivée de Köpcke doit être dense sur la droite. Il existe des dérivées de Köpcke, pour lesquelles l'ensemble $\{x: f'(x) = 0\}$ est de mesure nulle.

Théorème 1. *Si $\varphi'(x)$ est une dérivée de Köpcke et si $|\{x: \varphi'(x) = 0\}| = 0$, la fonction* sing $\varphi'(x)$ *est une fonction de Mišik, c'est-à-dire une fonction de 2^e classe de Baire qui jouit de la propriété $\mathscr{M}'_2$ et ne jouti pas des propriétés de Dejoy et de Darboux.*

Démonstration. Désignons par R la droite entière. Puisque $\varphi'(x)$ est, comme toute dérivée, une fonction de 1$^{\text{ère}}$ classe de Baire, les ensembles $E_0(\varphi')$ et $E^0(\varphi')$ sont F_σ et l'ensemble $\{x: \varphi'(x) = 0\}$ est G_δ. On a

$$(*)\qquad \{x: \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad a \geqq 1 \\ E_0(\varphi') & \text{pour} \quad 1 > a \geqq 0 \\ E_0(\varphi') \cup \{x: \varphi'(x) = 0\} & \text{pour} \quad 0 > a \geqq -1 \\ R & \text{pour} \quad -1 > a \end{cases}$$

et

$$(**)\qquad \{x: \operatorname{sign} \varphi'(x) < a\} = \begin{cases} R & \text{pour} \quad a > 1 \\ E^0(\varphi') \cup \{x: \varphi'(x) = 0\} & \text{pour} \quad 1 \geqq a > 0 \\ E^0(\varphi') & \text{pour} \quad 0 \geqq a > -1 \\ 0 & \text{pour} \quad -1 \geqq a\,. \end{cases}$$

Il en résulte que, quel que soit a, les ensembles $\{x: \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\}$ et $\{x: \operatorname{sign} \varphi'(x) < a\}$ sont $G_{\delta\sigma}$; par conséquent la fonction sign $\varphi'(x)$ est de 2^e classe de Baire.

La fonction sign $\varphi'(x)$ représente tout intervalle sur l'ensemble composé des trois nombres -1, 0 et $+1$, qui n'est pas connexe. Cette fonction ne jouit donc pas de la propriété de Darboux.

Admettons $a = -1$, $b = 1$ et soit J un intervalle fermé quelconque. Alors $E_a^b(\text{sign } \varphi') \cap J = \{x: \varphi'(x) = 0\} \cap J$. D'après ce que nous avons dit, avant d'énoncer le théorème, des dérivées de Köpcke, l'ensemble $\{x: \varphi'(x) = 0\} \cap J$ est non vide. Par hypothèse cet ensemble est de mesure nulle. La fonction sign $\varphi'(x)$ ne jouit donc pas de la propriété de Denjoy.

Les ensembles $E_0(\varphi')$ et $E^0(\varphi')$ sont aussi denses et il résulte de la propriété $\mathscr{M}'_2$, dont jouit toute dérivée d'une fonction continue, que pour tout intervalle fermé J on a $|E_0(\varphi') \cap J| > 0$ et $|E^0(\varphi') \cap J| > 0$. De (*) et (**) il s'ensuit que, quel que soit a, les ensembles $E_a(\text{sign } \varphi')$ et $E^a(\text{sign } \varphi')$ sont ou bien vides, ou bien, comme ils contiennent les ensembles $E_0(\varphi')$ et $E^0(\varphi')$, ils ont avec tout intervalle une partie commune de mesure positive. La fonction sign $\varphi'(x)$ jouit donc de la propriété $\mathscr{M}'_2$ et la démonstration est ainsi achevée.

Nous allons maintenant construire une fonction $g(x)$ de 2^e classe de Baire qui a les propriétés $\mathscr{M}'_2$ et de Darboux et, en même temps, ne jouit pas de la propriété de Denjoy. Nous aurons ainsi résolu par la positive la question citée plus haut et posée par Mišik. La fonction $g(x)$ sera définie sur l'intervalle (0, 1), mais il n'y aurait aucune difficulté à la prolonger sur la droite entière.

Désignons par C l'ensemble de Cantor, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels de la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n/3^n)$, où $a_n = 0$ ou bien $a_n = 1$. Sur l'ensemble de Cantor nous définirons la fonction $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/2^n)$ pour $x = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n/3^n)$. On sait bien que l'ensemble C est fermé, non dense et de mesure nulle, et que la fonction $\varphi(x)$ est continue et représente l'ensemble C sur l'intervalle fermé $\langle 0, 1 \rangle$. Admettons que les intervalles ouverts $(\alpha_n^{(1)}, \beta_n^{(1)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soient les composantes de l'ensemble $\langle 0, 1 \rangle \setminus C$. Soit $\psi_{n,1}(x) = \frac{1}{2}(\beta_n^{(1)} - \alpha_n^{(1)})\, x + \alpha_n^{(1)} + \frac{1}{4}(\beta_n^{(1)} - \alpha_n^{(1)})$. Soit ensuite $C_n^{(1)} = \psi_{n,1}(C)$. Sur l'ensemble $C_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)}$ nous définirons la fonction $\varphi_1(x)$ par la formule $\varphi_1(x) = \varphi[\psi_{n,1}^{-1}(x)]$ pour $x \in C_n^{(1)}$. Prolongeons la fonction $\varphi_1(x)$ sur tout l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ en posant $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ pour $x \in C$ et $\varphi_1(x) = 0$ pour $x \notin C \cup C_1$. L'ensemble $C \cup C_1 = G_1$ est fermé, non dense et de mesure nulle, la fonction $\varphi_1(x)$ est donc une fonction de 1$^{\text{ère}}$ classe de Baire. En outre, pour tout n, on a $\varphi_1(C_n^{(1)}) = \langle 0, 1 \rangle$. Supposons que l'on ait déjà défini les ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ disjoints, fermés et de mesure nulle, donc aussi non denses et tels que $C \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1} = G_{n-1}$ soit un ensemble fermé. Soit $C_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, où les ensembles $C_m^{(i)}$ sont disjoints, non denses, parfaits et de mesure nulle. Soit ensuite $\varphi_{n-1}(x)$ une fonction de 1$^{\text{ère}}$ classe de Baire telle que $\varphi_{n-1}(C_m^{(i)} = \langle 0, 1 \rangle$ et que les restrictions $\varphi_{n-1}(x \mid C_m^{(i)})$ soient continues et monotones. Désignons par $(\alpha_m^{(n)}, \beta_m^{(n)})$ les composantes de l'ensemble $\langle 0, 1 \rangle \setminus G_{n-1}$. Admettons $\psi_{m,n}(x) = \frac{1}{2}(\beta_m^{(n)} - \alpha_m^{(n)})\, x + \alpha_m^{(n)} + \frac{1}{4}(\beta_m^{(n)} - \alpha_m^{(n)})$ et $C_m^{(n)} = \psi_{m,n}(C)$, $C_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$. Évidemment on a $|C_n| = 0$. Soit

$G_n = G_{n-1} \cup C_n$. Définissons la fonction $\varphi_n(x)$ de la manière suivante:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(\psi_{m,n}^{-1}(x)) & \text{pour} \quad x \in C_m^n \\ \varphi_{n-1}(x) & \text{pour} \quad x \in G_{n-1} \\ 0 & \text{pour} \quad x \notin C \cup G_n \,. \end{cases}$$

La fonction $\varphi_n(x)$ est une fonction de 1ère classe de Baire, presque partout nulle et telle que $\varphi_n(C_m^{(n)}) = \langle 0, 1 \rangle$. Posons $G = C \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Évidemment $|G| = 0$. Soit $\varphi^*(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. La fonction $\varphi^*(x)$ est une fonction de 2e classe de Baire. En dehors de l'ensemble G, donc presuqe partout, elle est nulle. Soit $(a, b) \subset \langle 0, 1 \rangle$. Il existe alors un ensemble $C_m^{(i)}$ contenu dans (a, b). Il s'ensuit que $\varphi^*((a, b) \cap G) = \varphi^*(C_m^{(i)}) = \langle 0, 1 \rangle$. Admettons $\varphi^{**}(x) = 2[\varphi^*(x) - \frac{1}{2}]$. Alors $\varphi^{**}(x)$ est aussi une fonction de 2e classe de Baire et pour tout intervalle (a, b) on a $\varphi^{**}((a, b) \cap G) = \langle -1, 1 \rangle$.

Soit $\varphi'(x)$ une dérivée de Köpcke différente de zero presque partout. Pour $x \in (0, 1)$ définissons la fonction $g(x)$ en posant

$$g(x) = \begin{cases} \varphi^{**}(x) & \text{pour} \quad x \in G \cap (0, 1) \\ \operatorname{sign} \varphi'(x) & \text{pour} \quad x \in (0, 1) \setminus G \,. \end{cases}$$

On a $\{x\colon g(x) > a\} = (\{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\} \setminus G) \cup (\{x\colon \varphi^{**}(x) > a\} \cap G)$. Comme G est F_σ et les ensembles $\{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\}$ et $\{x\colon g^{**}(x) > a\}$ sont $G_{\delta\sigma}$, l'ensemble $\{x\colon g(x) > a\}$ est $G_{\delta\sigma}$. On constate de même que pour tout a l'ensemble $\{x\colon g(x) < a\}$ est $G_{\delta\sigma}$. La fonction $g(x)$ est donc de 2e classe de Baire.

Soit $(a, b) \subset (0, 1)$. Alors $g((a, b)) \supset g((a, b) \cap G) = \varphi^{**}((a, b) \cap G) = \langle -1, 1 \rangle$. Puisuqe $-1 \leqq g(x) \leqq 1$, on a $g((a, b)) = \langle -1, 1 \rangle$. La fonction $g(x)$ jouit donc de la propriété de Darboux. Mais elle *n*'a pas la propriété de Denjoy. En effet, $0 \neq \{x\colon -1 < g(x) < 1\} \subset G \cup \{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) = 0\}$. L'ensemble $\{x\colon -1 < g(x) < 1\}$ est donc non vide et de mesure nulle. Il n'y a plus qu'à prouver que $g(x)$ jouit de la propriété $\mathscr{M}'_2$.

Soit un intervalle fermé $J \subset (0,1)$ et admettons que $J \cap \{x\colon g(x) > a\} \neq 0$. Alors évidemment $a < 1$. Pour une dérivée de Köpcke on a nécessairement $\{x\colon \varphi'(x) > 0\} \cap J \neq 0$, ce qui équivaut à $\{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) = 1\} \cap J \neq 0$. La fonction $\operatorname{sign} \varphi'(x)$ jouit de la propriété $\mathscr{M}'_2$, donc $|\{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\} \cap J| > 0$. Puisuqe $\{x\colon g(x) > a\} \cap J \supset (\{x\colon \operatorname{sign} \varphi'(x) > a\} \cap J) \setminus G$ et $|G| = 0$, il s'ensuit que $|\{x\colon g(x) > a\} \cap J| > 0$. On démontre d'une manière analogue que $J \cap \{x\colon g(x) < a\} \neq 0$ entraîne $|\{x\colon g(x) < a\} \cap J| > 0$. La propriété $\mathscr{M}'_2$ de la fonction $g(x)$ se trouve ainsi établie et on obtient le théorème auivant:

Théorème 2. *Il existe des fonctions de 2e classe de Baire qui ont la propriété de Darboux et la propriété $\mathscr{M}'_2$, mais ne jouissent pas de la propriété de Denjoy.*

Références

[1] *Denjoy A.:* Sur une propriété des fonctions dérivées. L'Enseignement Mathématique *18* (1916), pp. 320—328.

[2] *Köpcke A.:* Über eine durchaus differentierbare stetige Funktion mit Oscillationen in jedem Intervalle. Math. Ann. *34* (1889) S. 161—171.

[3] *Mišik L.:* Über die Klasse $\mathcal{M}_2$. Časopis pro pěstov. mat. *91* (1966), pp. 389—393.

[4] *Zahorski Z.:* Sur la première dérivée. Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), pp. 1—54.

Adresse de l'auteur: ul. Wierzbowa 38 m. 42, Łódż, Pologne.