Časopis pro pěstování matematiky

Petr Mandl

Об асимптотическом поведении вероятностей в группах состояний однородной цепи Маркова

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 84 (1959), No. 2, 140--149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108549`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ГРУППАХ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Петр МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

(Поступило в редакцию 20/III 1958 г.)

DT: 519.217

В статье исследуется предельное поведение распределения вероятностей в классе состояний однородной цепи Маркова при условии, что пребывание системы в данном классе не нарушалось.

Пусть R — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний, определенная матрицей вероятностей перехода и начальным распределением вероятностей. Под регулярностью вероятностей $p_j^{(n)}$, т. е. вероятностей того, что система будет во времени n находиться в состоянии j, мы будем понимать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n)}$ и независимость этих вероятностей от начального распределения. Вопрос регулярности вероятностей может быть дополнен вопросами об асимптотическом поведении величин $P(x_n = \omega/T^n)$, определенных следующим образом:

Если T — какая-то группа состояний цепи R и ω — состояние группы T, то выражение $P(x_n = \omega/T^n)$ представляет вероятность того, что система будет во времени n находиться в состоянии ω при условии, что она не выйдет за пределы класса T. Значит, T^n обозначает явление, что система осталась пребывать в классе T по крайней мере до времени n. Эта проблема является частным случаем вопроса, который поставил Я. Гаек (Математический институт ЧСАН), которому я обязан за ценные указания.

Можем, например, предполагать, что система может пребывать в состояниях двух видов: в таких, за которыми можно наблюдать, и в таких, которые не поддаются наблюдениям. Будем, следовательно, изучать распределение вероятностей при условии, что в течение продолжительного времени наблюдения за системой не велись.

Определение. Группу S состояний однородной цепи Маркова назовем *регулярной*, если матрица P вероятностей перехода в группе S неразложима и непериодична.

Теорема 1. *В случае, когда T — регулярный класс, для каждого ω существует* $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = P_T(\omega) > 0$ *и не зависит от начального распределения вероятностей.*

Доказательство. Умножим строки матрицы P на положительные числа так, чтобы получилась стохастическая матрица. Используя известные теоремы о стохастических матрицах (см., напр. [3]), легко обнаружим, что вследствие предположения о матрице P существует n_0 такое, что все элементы P^{n_0} положительны. По теореме Перрона (см., напр., [1]) существует характеристический корень Θ матрицы P^{n_0}, который имеет следующие свойства:

1. Он является положительным и простым, 2. превосходит по абсолютной величине остальные корни, 3. матрица Adj $(\Theta E - P^{n_0})$ имеет только положительные элементы, равно как и 4. в качестве элементов соответствующего характеристического вектора можно взять сплошь положительные числа.

Итак, матрица P имеет корень $\varrho = \Theta^{\frac{1}{n_0}}$, который, очевидно, обладает свойствами 1, 2, 4.

Займемся представлением матрицы P^n при помощи формулы Перрона ([3]):

$$P^n = \varrho^n B_{11} + \sum_{\mu=2}^{s} \sum_{\nu=0}^{s_\mu - 1} \binom{n}{\nu} \lambda_\mu^{n-\nu} B_{\nu\mu} = \varrho^n B_{11} + o(\varrho^n) ,$$

где λ_μ — характеристические корни матрицы P, s_μ — их кратности, $B_{\nu\mu}$ — матрицы и $o(\varrho^n)$ — матрица, элементы которой суть бесконечно малые величины порядка выше ϱ^n. В частности, матрица B_{11} имеет вид

$$B_{11} = \lim_{\lambda\to\varrho} (\lambda - \varrho)(\lambda E - P)^{-1} = \text{Adj}\,(\varrho E - P)\, \psi_P(\varrho)^{-1} ,$$

где $\psi_P(x) = (x - \varrho)^{-1} |xE - P|$. Очевидно, что должно быть $\psi_P(\varrho) > 0$, ибо в противном случае было бы ϱ или многократным корнем многочлена $|xE - P|$, или этот многочлен имел бы еще один действительный корень, который был бы больше ϱ.

Сравним выражение для матрицы P^n с аналогичным выражением для степеней матрицы P^{n_0}. Имеем

$$\varrho^{n_0 n} B_{11} + o(\varrho^{n_0 n}) = (P^{n_0})^n = \Theta^n \,\text{Adj}\,(\Theta E - P^{n_0})\, \psi_{P^{n_0}}(\Theta)^{-1} + o(\Theta^n) .$$

Итак, мы видим, что характеристический корень ϱ имеет свойство 3, т. е. матрица $B_{11}\psi_P(\varrho) = \text{Adj}\,(\varrho E - P)$ имеет только положительные элементы.

Пусть, далее, p — вектор начального распределения вероятностей (во времени $n = 0$), e — вектор-столбец, в котором все элементы равны единице,

e_ω — вектор-столбец, в котором единица стоит на том месте, где в матрице P состояние ω, на остальных местах нули. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(\{x_n = \omega\} \cap T^n)}{P(T^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{pP^n e_\omega}{pP^n e} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho^n p B_{11} e_\omega + o(\varrho^n)}{\varrho^n p B_{11} e + o(\varrho^n)} = \frac{pB_{11}e_\omega}{pB_{11}e} = P_T(\omega)\,,$$

так как $pB_{11}e > 0$ ввиду того, что выполняется свойство 3.

Теперь можем писать

$$[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\, P = \lim_{n\to\infty} \frac{pP^{n+1}}{pP^n e} = \varrho \frac{pB_{11}}{pB_{11}e} = \varrho[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\,. \tag{1}$$

Значит, $[P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]$ есть собственный вектор матрицы P с суммой, равной единице. Следовательно, он обладает свойством 4 и ввиду того, что ϱ — простой корень, дефект матрицы $\varrho E - P$ равен единице; следовательно, $P_T(\omega)$ определено однозначно.

Замечание. Если $\{P_T(\omega)\}$ представляет первоначальное распределение вероятностей, то распределение вероятностей в группе T при условии, что система не выйдет за пределы группы T, не зависит от n. Время N выхода из группы T в таком случае подчинено, если считать $\varrho < 1$, распределению Паскаля, т. е. $P(N = n) = \varrho^{n-1}(1 - \varrho)$. Это распределение является предельным распределением в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} P(N > n + m \mid N > n) = \lim_{n\to\infty} P(T^{n+m} \mid T^n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{pP^{n+m}e}{pP^n e} = [P_T(\omega_1), \ldots, P_T(\omega_s)]\, P^m e = \varrho^m \sum_{\omega\in T} P_T(\omega) = \varrho^m\,.$$

Доказательство теоремы 1 оправдывает введение следующего определения:

Определение. *Характеристическим числом* регулярной группы S назовем максимальное по абсолютной величине характеристическое число матрицы, образованной из вероятностей перехода внутри класса S.

Теперь предположим, что группа состояний T разбита на подклассы $T_1, \ldots, T_l$ такие, что система, не выходя за пределы T, может с положительной вероятностью перейти из класса T_j в класс T_{j+1} и только в этот класс. Пусть P_{jj} означает матрицу вероятностей перехода внутри класса T_j, а P_{jj+1} — матрицу вероятностей перехода из состояний класса T_j в состояния класса T_{j+1}.

Теорема 2. *В случае, когда классы T_j регулярны и $P(x_0 \in T_1) = 1$, для каждого $\omega \in T_l$ будет*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(\{x_n = \omega\} \cap T^n)}{\varrho^n n^{k-1}} = \frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!} pA_{11}P_{12}A_{22} \dots P_{l-1,l}A_{ll}e_\omega ,$$

где $\varrho = \max\limits_{j=1,\dots,l} \varrho_j$, ϱ_j *равно характеристическому числу класса* T_j *и число* k *указывает, сколько раз встретится характеристическое число* ϱ *среди чисел* ϱ_j. *Далее,*

$$A_{jj} = (\varrho E - P_{jj})^{-1}, \quad \text{если} \quad \varrho_j < \varrho ,$$
$$A_{jj} = \lim_{\lambda\to\varrho} (\lambda - \varrho)(\lambda E - P_{jj})^{-1}, \quad \text{если} \quad \varrho_j = \varrho$$

(A_{jj} есть коэффициент у ϱ^n в формуле Перрона).

Доказательство. Имеем $P(\{x_n = \omega\} \cap T^n) = \sum\limits_{\Sigma n_i = n+1} pP_{11}^{n_1-1}P_{12} \dots P_{ll}^{n_l-1}e_\omega$. Обозначим $\sum\limits_{\varrho_i<\varrho} n_i = \Sigma_1$, $\sum\limits_{\varrho_i=\varrho} n_i = \Sigma_2$; ввиду того, что $(\varrho E - P_{jj})^{-1} = = \frac{1}{\varrho}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P_{jj}}{\varrho}\right)^n$ можем писать, положив сначала $\frac{P_{jj}}{\varrho} = Q_{jj}$, $\frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!} pA_{11}P_{12} \cdot$ $\cdot A_{22} \dots P_{l-1,l}A_{ll} = \frac{\varrho^{-(l-1)}}{(k-1)!} \sum\limits_{\Sigma_1 = l-k}^{\infty} p \dots Q_{jj}^{n_j-1}P_{jj+1} \dots B_{mm}P_{mm+1} \dots$, запись слагаемого в этом соотношении означает, что при $\varrho_j < \varrho$ умножаем на матрицу $Q_{jj}^{n_j-1}$; при $\varrho_m = \varrho$ умножаем на коэффициент в соответствующей формуле Перрона B_{mm}. Итак, нам надо доказать, что при достаточно больших n выражение

$$\left| \frac{\varrho^{-(l-1)}}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{\infty} p \dots Q_{jj}^{n_j-1}P_{jj+1} \dots B_{mm}P_{mm+1} \dots e_\omega - \right.$$
$$\left. - \frac{\varrho^{-(l-1)}}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{n+1-k} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1} pQ_{11}^{n_1-1}P_{12}Q_{22}^{n_2-1} \dots Q_{ll}^{n_l-1}e_\omega \right| ,$$

как угодно мало. Первая сумма во втором члене предписывает суммирование по показателям n_i классов с характеристическими числами, меньшими ϱ, а вторая сумма — с характеристическими числами, равными ϱ.

Возьмем натуральные числа N, M. Символ Σ^M будет обозначать суммирование только таких слагаемых, для которых $n_m > M$, а символ $\Sigma^{\overline{M}}$ — суммирование тех слагаемых, для которых по крайней мере одно $n_m \leqq M$.

Записывая все еще короче, имеем

$$\left| \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{\infty} \dots Q_{jj}^{n_j-1} \dots B_{mm} \dots - \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{n+1-k} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1} pQ_{11}^{n_1-1} \dots \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \ldots - \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M} pQ_{11}^{n_1-1} \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\Sigma_1 = N+1}^{\infty} \ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \right| + \left| \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = N+1}^{n+1-k} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1} pQ_{11}^{n_1-1} \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{\Sigma_1 = l-k}^{N} \sum_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{\overline{M}} pQ_{11}^{n_1-1} \right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 .$$

Прежде всего покажем, что выбрав надлежащим образом N, можем добиться того, чтобы выражение I_3 было меньше $\varepsilon > 0$ для всех n. Обозначим $\Theta = \max\limits_{\varrho_k < \varrho} \varrho_k$. Ввиду того, что $Q_{jj}^n = \left(\frac{\varrho_j}{\varrho}\right)^n B_{11} + o\left[\left(\frac{\varrho_j}{\varrho}\right)^n\right]$, легко обнаружим, что существует постоянная C_1 такая, что $pQ_{11}^{n_1-1} \ldots Q_{ll}^{n_l-1} e_\omega \leqq C_1 \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{\Sigma_1}$. Теперь установим число слагаемых при суммировании $\sum\limits_{\Sigma_1 = \text{konst.}} \sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}$. Легко видно, что оно равно $\binom{\Sigma_1 - 1}{l-k-1}\binom{n-\Sigma_1}{k-1} \leqq C_2 (\Sigma_1)^{l-k-1} n^{k-1}$. Следовательно, $I_3 \leqq C_1 C_2 \sum\limits_{\Sigma_1 = N+1}^{\infty} (\Sigma_1)^{l-k-1} \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{\Sigma_1}$ и выражение в правой части можно, выбрав надлежащим образом N, сделать как угодно малым (меньше ε). То же можно сказать и о выражении I_2, потому что рассматриваемый ряд сходится.

Теперь аналогичным приемом оценим выражение I_4. Имеем $pQ_{11}^{n_1-1} \ldots$ $\ldots Q_{ll}^{n_l-1} e_\omega \leqq C_1$ и число слагаемых в сумме $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{\overline{M}}$ меньше $k \sum\limits_{i=1}^{M} \binom{n - \Sigma_1 - i}{k-2} \leqq$ $\leqq C_3 n^{k-2}$. Итак, мы видим, что для достаточно больших n также $I_4 < \varepsilon$.

О выражении I_1 будем рассуждать следующим образом: если T_j имеет характеристическое число ϱ, то $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{jj}^n = B_{jj}$. Значит, выбрав подходящим способом число M, можно добиться того, чтобы при фиксированных показателях, соответствующих классам с немаксимальными характеристическими числами, каждое из слагаемых суммы $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M}$ отличалось от соответствующего ему $\ldots Q_{jj}^{n_j-1} \ldots B_{mm} \ldots e_\omega$ на как угодно малое число. Следовательно, достаточно, обозначив через $S_n(M, \Sigma_1)$ число слагаемых суммы $\sum\limits_{\Sigma_2 = n+1-\Sigma_1}^{M}$, убедиться в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(M, \Sigma_1)}{n^{k-1}} = \frac{1}{(k-1)!}$. Однако $S_n(M, \Sigma_1) = \binom{n - \Sigma_1 - kM}{k-1}$. Этим теорема полностью доказана.

Перейдём теперь к произвольному классу T состояний цепи. Разобьем T на подклассы T_j состояний, сообщающихся внутри T; это значит следующее: Если $\omega_1 \in T_j$, то система может перейти с положительной вероятностью из состояния ω_1 в состояние ω_2 и обратно, не выходя при этом за пределы класса T, в том и только в том случае, когда также $\omega_2 \in T_j$. Эти подклассы можно как известно, частично упорядочить следующим образом: $T_k < T_j$ означает, что внутри класса T возможен переход из класса T_k в класс T_j. Разбиение на подклассы T_j не должно обязательно исчерпать весь класс T. Ради простоты обозначений будем однако предполагать, что каждое состояние является сообщающимся с самим собой. Из хода доказательств станет ясным, что следовало бы изменить в противном случае. Также будем предполагать, что положительна вероятность того, что система будет во времени 0 пребывать в таких классах T_k, для которых не существует $T_j < T_k$, $T_j \neq T_k$. (Условие А.)

Теорема 3. *Пусть классы T_j регулярны. Пусть $\varrho = \max\limits_{T_j} \varrho_j$, пусть k — наибольшее число, обладающее тем свойством, что существуют классы $T_{\alpha_1} < T_{\alpha_2} < \ldots < T_{\alpha_k}$, для которых $\varrho_{\alpha_1} = \varrho_{\alpha_2} = \ldots \varrho_{\alpha_k} = \varrho$. Тогда, если еще выполняется условие* А, *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(T^n)}{n^{k-1}\varrho^n} > 0 .$$

Доказательство. Пусть P_{jj} — матрицы, образованные из вероятностей перехода внутри T_j, пусть P_{jk} — матрицы, образованные из вероятностей перехода из состояний класса T_j в состояния класса T_k. Через p_j обозначим ту часть вектора начального распределения, которая соответствует классу T_j. Если случайные явления $\{x_n = \omega\} \cap T^n$ разложить на непересекающиеся явления, руководствуясь тем, через какие классы прошла система, пока она не находилась в состоянии ω, получим

$$P(T^n) = \sum_{T_\alpha < T_\beta \ldots < T_\omega} \Big(\sum_{\Sigma n_\nu = n+1} p_\alpha P_{\alpha\alpha}^{n_\alpha - 1} P_{\alpha\beta} P_{\beta\beta}^{n_\beta - 1} \ldots P_{\omega\omega}^{n_\omega - 1} e \Big) .$$

Применяя результат теоремы 2, мы видим, что порядок выражений в скобках не меньше $n^{k-1}\varrho^n$ и что там существует по крайней мере один член такой, что частное от деления его на $n^{k-1}\varrho^n$ имеет положительный предел.

В следующей теореме символ A_{jj} означает те же матрицы, как в теореме 2.

Теорема 4. *При условиях теоремы* 3 *справедливо утверждение: Для каждого $\omega \in T$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n) = P_T(\omega)$; он будет положительным тогда и только тогда, когда ω будет принадлежать такому классу T_j, для которого существуют $T_{S_1} < T_{S_2} < \ldots < T_{S_k} \leqq T_j$, характеристические числа которых равны ϱ. В таком случае*

$$P_T(\omega) = C \sum{}^* p_{r_1} A_{r_1 r_1} P_{r_1 r_2} A_{r_2 r_2} \ldots A_{jj} e_\omega ,$$

где C — постоянная, не зависящая от j, и $\sum^*$ означает суммирование по всем последовательностям классов $T_{r_1} < T_{r_2} < \ldots < T_j$, среди характеристических чисел которых число ϱ встретится k раз.

Доказательство. Имеем

$$P(x_n = \omega | T^n) = \frac{P(\{x_n = \omega\} \cap T^n)}{P(T^n)} =$$

$$= P(T^n)^{-1} \sum_{T_\alpha < T_\beta \ldots < T_j} \Big(\sum_{\Sigma n_\nu = n+1} p_\alpha P_{\alpha\alpha}^{n_\alpha - 1} P_{\alpha\beta} \ldots P_{jj}^{n_j - 1} e_\omega \Big) .$$

Разделим читателя и знаменателя на $n^{k-1}\varrho^n$. Из теоремы 2 вытекает, что в случае, когда T_j не обладает перечисленными в теореме 4 свойствами, все выражения в скобке являются бесконечно малыми величинами порядка, большего $n^{k-1}\varrho^n$. Аналогично, если класс T_j удовлетворяет условиям теоремы, то по теореме 2 видно, что порядок $n^{k-1}\varrho^n$ имеют именно те выражения, которые суммируются по символу $\sum^*$. В этой же теореме приведено и предельное выражение. Если теперь воспользоваться теоремой 3, то получим, что

$$C = \frac{\varrho^{-(k-1)}}{(k-1)!} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{P(T^n)}{n^{k-1}\varrho^n} \right)^{-1} .$$

Иначе эта постоянная определена условием $\sum_{\omega \in T} P_T(\omega) = 1$.

Предел вероятности можем привести еще в несколько ином виде. Пусть T_{n_k} — класс с характеристическим числом ϱ, для которого существуют $T_{n_1} < T_{n_2} < \ldots < T_{n_{k-1}} < T_{n_k}$, характеристические числа которых также равны ϱ. По предположению класс T_{n_k} регулярен. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что для матрицы $A_{n_k n_k}$, которая является коэффициентом при ϱ^n в формуле Перрона, справедливо соотношение (1), т. е.: $pA_{n_k n_k} = C_p \pi_{n_k}$, где π_{n_k} — характеристический вектор, соответствующий корню ϱ матрицы $P_{n_k n_k}$. Если в качестве вектора p брать последовательно векторы, одна компонента которых равна единице а остальные нулю, то окажется, что строки матрицы $A_{n_k n_k}$ суть кратные π_{n_k}, т. е. $A_{n_k n_k} = u_{n_k} \pi_{n_k}$, где u_{n_k} — вектор-столбец с одними положительными компонентами. Итак, каждому классу можно поставить в соответствие число

$$C_{n_k} = C \sum p_{S_1} A_{S_1 S_1} P_{S_1 S_2} A_{S_2 S_2} \ldots A_{S_j S_j} P_{S_j n_k} u_{n_k} ,$$

причем на этот раз требуется, чтобы слагаемые содержали матрицы $k - 1$ классов с характеристическим числом ϱ.

Предельные вероятности в классе T_j можно тогда писать в виде

$$P_T(\omega) = \sum C_{S_1} \pi_{S_1} P_{S_1 S_2} A_{S_2 S_2} \ldots A_{jj} e_\omega , \tag{2}$$

где суммируются произведения для всех классов T_{S_1}, удовлетворяющих только что высказанным условиям, и для классов следующих за ними.

О регулярности условных вероятностей справедлива при условиях теоремы 3.

Теорема 5. *Если существует одна единственная k-членная последовательность классов $T_{s_1} < T_{s_2} < \ldots < T_{s_k}$ с характеристическими числами ϱ, то $P_T(\omega)$ одна и та же для всех начальных распределений, удовлетворяющих условию* А.

Доказательство легко вытекает из соотношения (2). Постоянная опять-таки определена условием $\sum\limits_{\omega \in T} P_T(\omega) = 1$.

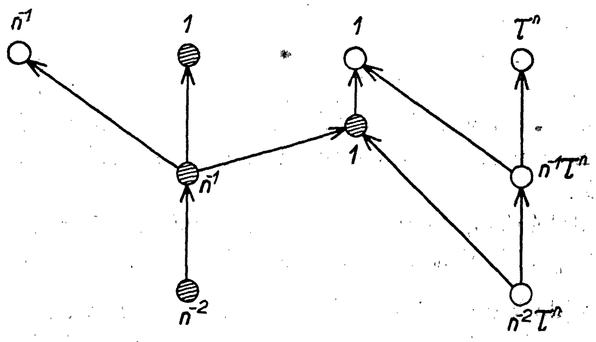

Рис. 1.

Замечание. Если $\varrho = 1$, то и $k = 1$, ибо, как легко обнаружить, к регулярному классу T_j, характеристическое число которого равно единице, не сущесвтвует T_k такое, чтобы было $T_j < T_k$. Предельное распределение в таких классах T_j можно представить в виде $C_j \pi_j$. В остальных классах предел равен 0.

Добавление. Предположим, что характеристическое число подклассов равно ϱ или Θ, $\varrho > \Theta$, и что эти подклассы частично упорядочены таким образом, как показано на рисунке 1; классы с характеристическим числом ϱ обозначены полными кружками. Если положить $\frac{\Theta}{\varrho} = \tau$ то из теорем 2 и 3 вытекает, что величины $P(x_n = \omega | T^n)$ имеют в отдельных классах такой порядок, какой написан у каждого кружка на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ф. Г. Гантмахер, М. Г. Крейн:* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Москва-Ленинград 1950.

[2] *Т. А. Сарымсаков:* Основы теории процессов Маркова. Москва 1954.

[3] *L. Truksa:* Statistická dynamika, Praha 1956.

Výtah

O ASYMPTOTICKÉM CHOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ UVNITŘ SKUPIN STAVŮ HOMOGENNÍHO MARKOVOVA ŘETĚZCE

PETR MANDL, Praha

(Došlo dne 20. března 1958)

V článku jest studováno limitní chování pravděpodobností $P(x_n = \omega|T^n)$, že systém konečného, homogenního Markovova řetězce se po n krocích bude vyskytovati ve stavu ω, patřícím množině T stavů řetězce, za podmínky, že se vyskytoval ve stavech množiny T ve všech okamžicích mezi 0 a n (včetně).

Množina T je nazvána *regulární*, jestliže matice, utvořená z pravděpodobností přechodu mezi stavy T, je nerozložitelná a aperiodická. Charakteristické číslo této matice o největší absolutní hodnotě se nazývá *charakteristickým číslem* skupiny T.

Nejprve jest dokázáno, že v případě regulární skupiny T existují limity $\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega|T^n)$ positivní a nezávislé na počátečním rozložení pravděpodobností. Pak se přejde k obecnému případu, kdy T se rozpadá na více tříd T_α stavů navzájem sousledných. Když třídy T_α jsou regulární, limity $\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega|T^n)$ existují. Zda jsou positivní či nikoliv, závisí, způsobem naznačeným v článku, na charakteristických číslech T_α a na struktuře množiny tříd T_α dané vztahem $T_\alpha < T_\beta$, jestliže pravděpodobnost, že systém nacházející se v T_α přejde do T_β, je positivní. Vypočteno je také, jakého řádu je pravděpodobnost, že se systém bude vyskytovat v T bez přerušení od 0 do n.

Résumé

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PROBABILITÉS DANS LES ENSEMBLES DES ÉTATS D'UNE CHAÎNE DE MARKOV HOMOGÈNE

PETR MANDL, Praha

(Reçu le 20 mars 1958)

Dans cet article on étudie le comportement limite des probabilités $P(x_n = \omega|T^n)$ que le système d'une chaîne finie de Markov homogène se trouvera après n pas dans un état ω, appartenant á l'ensemble T des états de cette chaîne, sous la condition qu'il se trouvait sans cesse dans les états de T à tout instant entre 0 et n (inclus).

L'ensemble T est dit *régulier*, si la matrice formée des probabilités de transition entre les états de T est indécomposable et apériodique. La racine caractéristique de cette matrice de la plus grande valeur absolue est nommée *racine caractéristique* de l'ensemble T.

On prouve d'abord dans le cas de T régulier l'existence des limites $\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n)$ positives et indépendantes de la lois de probabilité initiale. Après cela on passe au cas général oú T peut être décomposé en plusiers classes T_α d'états communicants. Si les classes T_α sont régulières, les limites $\lim_{n\to\infty} P(x_n = \omega | T^n)$ existent. Si elles sont positives ou non, cela dépend d'une manière indiquée dans l'article des racines caractéristiques des T_α et de la structure de l'ensemble des T_α donnée par la relation $T_\alpha < T_\beta$ si la probabilité que le système se trouvant dans T_α passe dans T_β est positive. On évalue aussi l'ordre de grandeur des probabilités que le système se trouve dans T sans cesse depuis 0 jusqu'à n.