Časopis pro pěstování matematiky, roč. 84 (1959), Praha

DARBOUXOVY KŘIVKY NADPLOCHY

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo dne 15. dubna 1958)

DT: 513.731

V článku je nalezen geometrický význam Darbouxových tečen nadplochy pomocí studia korespondence mezi nadplochou a její dualisací.

Nadplocha π v projektivním prostoru S_{n+1} (vytvářená bodem A_0) je dána obvyklým způsobem rovnicemi

$$\begin{gathered} \mathrm{d}A_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta\,, \quad \omega_\alpha^\alpha = 0\,, \quad \omega^{n+1} = 0\,, \\ \alpha, \beta = 0, \ldots, n+1\,; \quad i, j, k = 1, \ldots, n\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Dostávám ($\omega_0^i = \omega^i$)

$$\begin{gathered} [\omega^k \omega_k^{n+1}] = 0\,, \quad \omega_i^{n+1} = a_{ij}\omega^j \quad (a_{ij} = a_{ji})\,, \\ \mathrm{d}a_{ij} = a_{ik}\omega_j^k + a_{jk}\omega_i^k - a_{ij}(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1}) + A_{ijk}\omega^k\,, \end{gathered} \tag{2}$$

kde A_{ijk} jsou symetrické v každé dvojici indexů. Označím-li

$$b_{ijk} = (n+2)\,A_{ijk} - 3a_{(ij}b_{k)}\,, \quad b_k = a^{ij}A_{ijk}\,, \tag{3}$$

nazývají se křivky

$$b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0 \tag{4}$$

Darbouxovými, viz G. F. LAPTĚV, *Differencialnaja geometria pogružennych mnogoobrazij*, Trudy Mosk. Mat. Obšč., tom 2, 1953, 275—382.

Zavedením duálních basí $E^\alpha = (-1)^\alpha[A_0 \ldots A_{\alpha-1}A_{\alpha+1} \ldots A_{n+1}]$ je dualisace π^* nadplochy π (vytvářená tečnou nadrovinou E^{n+1}) dána rovnicemi

$$\mathrm{d}E^\alpha = -\,\omega_\beta^\alpha E^\beta\,, \quad \omega^{n+1} = 0\,. \tag{5}$$

Nejobecnější kolineace mezi S_{n+1} a duálním S_{n+1}^*, tečná ke korespondenci $\pi \to \pi^*$, je

$$HA_0 = E^{n+1}\,, \quad HA_i = \alpha_i E^{n+1} - a_{ij}E^j\,, \quad HA_{n+1} = \beta_\alpha E^\alpha\,, \tag{6}$$

kdy je

$$H\,dA_0 = dE^{n+1} + (\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} + \alpha_i\omega^i)\,E^{n+1}\,, \tag{7}$$

$$H\,d^2A_0 = d^2E^{n+1} + 2(\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} + \alpha_i\omega^i)\,dE^{n+1} + (.)\,E_{n+1} + \varphi_iE^i + \varphi_0E^0\,,$$

kde

$$\varphi_0 = (\beta_0 - 1)\,a_{ij}\omega^i\omega^j\,, \quad \varphi_i = (\Lambda_{ijk} + \beta_i a_{jk} + 2\alpha_k a_{ij})\,\omega^j\omega^k\,. \tag{8}$$

H-linearisující transformace zkoumané korespondence (viz E. Čech, *Géom. proj. diff. des correspondances entre deux espaces* I, Čas. pro pěst. mat. a fys. *74* (1949)) je

$$t \equiv [A_0, \omega^iA_i] \to t' \equiv [E^{n+1}, \varphi_iE^i + \varphi_0E^0]\,. \tag{9}$$

Vztah $\beta_0 = 1$ charakterisuje ty kolineace H, pro něž všechny linearisující přímky jsou tečnami nadplochy π^*; omezím se jen na ně. Nutná a postačující podmínka, aby tečna t byla obsažena v příslušném linearisujícím prostoru t', je

$$c_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,, \quad c_{ijk} = \Lambda_{ijk} + \gamma_{(i}a_{jk)}\,, \quad \gamma_i = \beta_i + 2\alpha_i\,. \tag{10}$$

Z toho se již přímým výpočtem zjistí

Věta. *Nechť π je nadplocha v S_{n+1} a π^* je její dualisace. Pak existuje ∞^{2n+1} tečných kolineací H* (pro každý pár sobě odpovídajících bodů) *korespondence $\pi \to \pi^*$, pro něž H-linearisující přímky tečen nadplochy π jsou tečnami nadplochy π^*. Tečny nadplochy π, jež leží ve svých H-linearisujících přímkách* (což jsou přímky v duálním prostoru S^*_{n+1}, ale S_{n-1} v S_{n+1})*, vytvářejí v každém bodě při určité volbě H kubický kužel. Existuje ∞^{n+1} H, pro něž tento kužel je apolární k asymptotickému kuželi, potom však nutně splývá s kuželem Darbouxových tečen.*

Резюме

КРИВЫЕ ДАРБУ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 15/IV 1958 г.)

Пусть π — гиперповерхность в проективном пространстве S_{n+1} и π^* — ее дуализация. Тогда существует ∞^{2n+1} касательных коллинеаций H соответствия $\pi \to \pi^*$, для которых H-линеаризирующие прямые касательных к гиперповерхности π являются касательными к гиперповерхности π^*. Касательные к гиперповерхности π, лежащие в своих H-линеаризирующих пространствах, образуют в каждой точке при определенном выборе H кубический конус. Существует ∞^{n+1} H, для которых этот конус аполярен асимптотическому конусу, но тогда он необходимо совпадает с конусом касательных Дарбу.

Résumé

COURBES DE DARBOUX D'UNE HYPERSURFACE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 15 avril 1958)

Soit π une hypersurface dans l'espace projectif S_{n+1} et soit π^* sa dualisation. Alors il existe ∞^{2n+1} d'homographies tangentes H de la correspondance $\pi \to \pi^*$ pour lesquelles les droites H-linéarisantes des tangentes de l'hypersurface π sont des tangentes de l'hypersurface π^*. Les tangentes de l'hypersurface π qui sont situées dans leurs espaces H-linéarisants engendrent en chaque point, pour un certain choix de H, un cône cubique. Il existe ∞^{n+1} d'homographies H pour lesquelles ce cône est apolaire par rapport au cône asymptotique, mais alors il coïncide nécessairement avec le cône des tangentes de Darboux.