Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Kalášek

Poznámka k článku V. Petrůva

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 2, 156--158

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108466`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

POZNÁMKA K ČLÁNKU V. PETRŮVA

PAVEL KALÁŠEK, Ostrava

(Došlo dne 1. června 1971)

Buď C prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s obvyklou metrikou. V práci [2] je ukázáno, že existuje množina $B \subset C$, prvé kategorie v C tak, že pro každou funkci $f \in C - B$ a pro každé $t \in (0, 1)$ je

$$(1) \qquad f^s(t) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{2h} = +\infty\,,$$

$$f_s(t) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{2h} = -\infty\,.$$

V práci [1] je uvedena konstrukce takovéto funkce.

V této poznámce udáme jednoduchý obecný postup ke konstrukci takové funkce, z něhož vhodnou specialisací plyne zjednodušení podstatné části důkazu uvedeného tvrzení v práci [2] a i jednodušší konstrukce, než je uvedena v [1].

1. Buď $g(t)$ spojitá funkce definovaná v $(-\infty, +\infty)$, periodická s periodou 1, $0 \leqq g \leqq 1$ a nechť existují kladná čísla α, β, γ tak, že platí

a)

$$(2) \qquad |g(t_1) - g(t_2)| \leqq \alpha |t_1 - t_2|$$

pro všechna t_1, t_2,

b) pro každé t existuje číslo $h_i(t)$ $(i = 1, 2)$ tak, že $\beta \leqq h_i(t) < 1$ a platí

$$(3) \qquad 2\gamma\, h_i(t) < (-1)^{i+1} \left(g(t + h_i(t)) - g(t - h_i(t))\right), \quad i = 1, 2\,.$$

Buď $1 < A < B$ a položme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(B^n t)}{A^n}\,.$$

Funkce f je zřejmě spojitá. Označme $h_{i,k}(t) = h_i(B^k t)/B^k$ pro $i = 1, 2,\ k = 1, 2, \ldots$ Je tedy

$$\frac{\beta}{B^k} \leqq h_{i,k}(t) < \frac{1}{B^k}\,. \tag{4}$$

Zvolme t pevné. Pro $i = 1, 2,\ k = 1, 2, \ldots$ je dle (2)–(4)

$$(-1)^{i+1}\frac{f(t + h_{i,k}(t)) - f(t - h_{i,k}(t))}{2h_{i,k}(t)} > \gamma\left(\frac{B}{A}\right)^k - \sum_{n=0}^{k-1}\alpha\left(\frac{B}{A}\right)^n - \frac{B^k}{2\beta}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{A^n} >$$

$$> \left(\frac{B}{A}\right)^k\left(\gamma - \frac{\alpha A}{B - A} - \frac{1}{2\beta(A - 1)}\right),$$

což je pro $B > A(1 + 4\alpha/\gamma)$, $A > 1 + 2/\beta\gamma$ jistě větší než $\frac{1}{2}(B/A)^k\,\gamma$. Platí tedy (1), tj. funkce f má v každém bodě horní symetrickou derivaci $+\infty$, dolní $-\infty$.

2. Buď $\varphi(h)$ kladná funkce definovaná v intervalu $(0, +\infty)$, $\lim_{h\to 0+}\varphi(h) = 0$. V práci [2] je ukázáno, že množina A těch $f \in C$, pro něž pro každé $t \in (0, 1)$ je

$$\limsup_{h\to 0+}\frac{f(t + h) - f(t - h)}{\varphi(h)} = +\infty\,, \quad \liminf_{h\to 0+}\frac{f(t + h) - f(t - h)}{\varphi(h)} = -\infty$$

tvoří residuel, tj. $C - A$ je prvé kategorie. Z [2] (str. 338–339) vyplývá, že k důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že pro každé přirozené $n > 1$ je množina B_n těch $f \in C$, pro něž existuje $t \in \langle 1/n,\ 1 - 1/n\rangle$ tak, že pro všechna $h \in (0, 1/n\rangle$ platí

$$f(t + h) - f(t - h) \leqq n\,\varphi(h)$$

řídká v C. Stejně jako v [2] ukážeme, že množiny B_n jsou uzavřené. Protože polynomy jsou husté v C, stačí jako v [2] ukázat toto:

K danému přirozenému $n > 1$, danému polynomu p a k danému $r > 0$ existuje $f \in C$ tak, že $|f| < r$ a $p + f \in C - B_n$.

Buď $M > 0$ takové, že $|p(t + h) - p(t - h)| \leqq 2Mh$ pro všechna $t \in \langle 1/n,\ 1 - 1/n\rangle$, $0 < h < 1/n$ a buď $f(t) = g(B^k t)/A^k$, kde g je funkce z odst. 1, $1 < A < B$. Označme $\psi(h) = \sup_{0<u\leqq h}\varphi(u)$. Je tedy ψ neklesající, $\lim_{h\to 0+}\psi(h) = 0$. Buď $t \in \langle 1/n,\ 1 - 1/n\rangle$. Potom je

$$\frac{p(t + h_{1,k}(t)) + f(t + h_{1,k}(t)) - p(t - h_{1,k}(t)) - f(t - h_{1,k}(t))}{\varphi(h_{1,k}(t))} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\varphi(h_{1,k}(t))}\left(\frac{\gamma B}{A^k} - \frac{2M}{B^k}\right).$$

Volíme-li tedy A a B a přirozené číslo k tak, aby

$$\left(\frac{B}{A}\right)^k > \frac{4M}{\gamma B}, \qquad \frac{1}{\psi(B^k)} \frac{\gamma B}{2A^k} > n,$$

$$B^{-k} < \frac{1}{n}, \qquad A^{-k} < r,$$

má funkce f požadované vlastnosti (snadno nahlédneme, že dokonce pro každé pevné k lze zvolit A a B tak, aby tyto podmínky platily).

3. Zbývá tedy ukázat jednoduchou volbu funkce g z 1. Volme

$$g(t) = \tfrac{4}{3} \min\left(3\{t\}, 1 - \{t\}\right),$$

kde $\{t\}$ označuje zlomkovou část čísla t. Volíme-li $h_i(t)$ $(i = 1, 2)$ jako nejmenší kladné číslo, pro něž je

$$g(t - h_1(t)) = g(t + h_2(t)) = 0 \quad \text{pro} \quad \tfrac{1}{8} \leqq \min\left(\{t\}, 1 - \{t\}\right),$$
$$g(t + h_1(t)) = g(t - h_2(t)) = 1 \quad \text{pro ostatní } t,$$

zjistíme snadno, že stačí volit $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{8}$, $\gamma = \frac{1}{6}$. Touto volbou funkce g dostaneme výše uvedeným postupem zjednodušení příslušných částí prací [1] a [2].

Literatura

[1] *L. Filipczak:* Exemple d'une function continue privéé de derivée symétrique partout, Coll. Math. *XX* (1969), 249—253.
[2] *V. Petrův:* O symetrické derivaci spojitých funkcí, Čas. pro pěst. matematiky *83* (1958), 336—342.

Adresa autora: 708 00 Ostrava-Poruba, Urxova 488.

Summary

NOTE TO A PAPER BY V. PETRŮV

PAVEL KALÁŠEK, Ostrava

This paper describes a simple general procedure for the construction of a continuous function within the interval $\langle 0, 1 \rangle$ which for every $t \in (0, 1)$ meets the condition (1). A suitable specialization of this procedure simplifies the substantial part of the proof of the theorem presented in [2]; it also permits a simpler construction of the function than is described in [1]. The final part of the paper presents a simple concrete example of such a function.