Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

ROZKLAD ELEMENTÁRNÍ KŘIVKY NA JORDANOVY KŘIVKY

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 5. listopadu 1962)

Dokazuje se, že (orientovanou) uzavřenou křivku (v rovině), která sama sebe protíná jen konečněkrát, lze „rozložit" na systém (orientovaných) Jordanových křivek tak, že každé dvě křivky χ_1, χ_2 systému mají jen konečně mnoho průsečíků a že vnitřek χ_1 je obsažen buď ve vnitřku nebo ve vnějšku χ_2. Uvedený systém Jordanových křivek je sestrojen efektivně.

1. Množinu všech reálných čísel budeme označovat E_1, otevřenou (resp. uzavřenou) Gaussovu rovinu E (resp. S). *Křivkou* budeme rozumět každé spojité zobrazení φ (jakéhokoliv kompaktního) intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle \subset E_1$ do E. Body $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ jsou *krajní body* křivky φ; $\varphi(\alpha)$ resp. $\varphi(\beta)$ je přitom její *počáteční bod* (p. b. φ) resp. *koncový bod* (k.b. φ). Množinu $[\varphi] = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$ nazveme *geometrickým obrazem* křivky φ; označíme ještě $(\varphi) = \varphi((\alpha, \beta)) = [\varphi] - \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$.

Je-li φ křivka, definovaná v $\langle\alpha, \beta\rangle$, bude $\dot{-}\varphi$ znamenat křivku, definovanou pro $t \in \langle -\beta, -\alpha\rangle$ vztahem

$$(1) \qquad (\dot{-}\varphi)(t) = \varphi(-t)\,.$$

Je ovšem p.b. $(\dot{-}\varphi)$ = k.b. φ, k.b. $(\dot{-}\varphi)$ = p.b. φ, $[\dot{-}\varphi] = [\varphi]$, $(\dot{-}\varphi) = (\varphi)$. Přechod od φ k $\dot{-}\varphi$ nazýváme *změnou orientace* křivky φ.

Jsou-li φ, ψ dvě křivky, definované v $\langle\alpha, \beta\rangle$ resp. v $\langle\gamma, \delta\rangle$, přičemž k.b. φ = = p.b. ψ, bude $\omega = \varphi \dot{+} \psi$ znamenat křivku, definovanou v intervalu $\langle\alpha, \beta + + \delta - \gamma\rangle$ předpisem:

$$(2) \qquad \omega(t) = \left\langle \begin{array}{lll} \varphi(t) & \text{pro} & t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,, \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{pro} & t \in \langle\beta, \beta + \delta - \gamma\rangle\,. \end{array} \right.$$

Místo $\varphi \dot{+} (\dot{-}\psi)$ budeme (v případě, že k.b. φ = k.b. ψ) krátce psát $\varphi \dot{-} \psi$. Analogicky se definuje „součet" $\varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_n$ (pro libovolný konečný počet „sčítanců"). Je-li $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_n$, nazveme každou z křivek φ_j *částí* φ.

Je jistě zřejmé, co rozumíme slovy *po částech lineární křivka* a *prostá křivka*. Je-li p.b. φ = k.b. φ, budeme říkat, že křivka φ je *uzavřená*. Je-li φ uzavřená křivka, definovaná v $\langle\alpha, \beta\rangle$, a jsou-li parciální zobrazení $\varphi \mid \langle\alpha, \beta)$ a $\varphi \mid (\alpha, \beta\rangle$ prostá, budeme říkat, že φ je *Jordanova křivka*.

Geometrický obraz prosté (resp. Jordanovy, resp. nekonstantní po částech lineární) křivky budeme nazývat *obloukem* (resp. *topologickou kružnicí*, resp. *lomenou čarou*). *Krajními body* (*počátečním* a *koncovým bodem*) geometrického obrazu nějaké křivky φ budeme rozumět krajní body (počáteční a koncový bod) této křivky.

Je-li φ Jordanova křivka, definovaná v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, a jsou-li z_1, z_2 dva různé body z $[\varphi]$, $z_1 = \varphi(t_1)$, $z_2 = \varphi(t_2)$, budeme *úsekem Jordanovy křivky φ mezi body* z_1, z_2 nazývat křivku $\varphi \mid \langle t_1, t_2\rangle$, je-li $t_1 < t_2$, a křivku $\varphi \mid \langle t_1, \beta\rangle + \varphi \mid \langle\alpha, t_2\rangle$ (kde první resp. druhý sčítanec odpadá, je-li $t_1 = \beta$ resp. $t_2 = \alpha$), je-li $t_1 > t_2$. Úsek Jordanovy křivky φ mezi body z_2, z_1 budeme nazývat *úsekem komplementárním* k úseku této křivky mezi body z_1, z_2.

Index bodu $z \in S$ vzhledem k uzavřené křivce φ ($\mathrm{ind}_\varphi\, z$) nechť je (pro $z \in S - [\varphi]$) definován obvyklým způsobem (viz např. [1]). Je-li $M \subset S - [\varphi]$ souvislá neprázdná množina, je ind_φ – jak známo – konstantní na M; jeho hodnotu na M označíme $\mathrm{ind}_\varphi\, M$.

Podle Jordanovy věty (viz [1]) je pro každou Jordanovu křivku φ

$$S - [\varphi] = \mathrm{Int}\,\varphi \cup \mathrm{Ext}\,\varphi\,, \tag{3}$$

kde $\mathrm{Int}\,\varphi$ (*vnitřek* φ) a $\mathrm{Ext}\,\varphi$ (*vnějšek* φ) jsou neprázdné disjunktní oblasti, jejichž společnou hranicí je $[\varphi]$. Oblast $\mathrm{Int}\,\varphi$ je přitom omezená a $\mathrm{ind}_\varphi\,(\mathrm{Int}\,\varphi) = \pm 1$ (podle toho, zdali křivka φ je *kladně* nebo *záporně orientována*), oblast $\mathrm{Ext}\,\varphi$ je neomezená (obsahuje bod ∞) a $\mathrm{ind}_\varphi\,(\mathrm{Ext}\,\varphi) = 0$. Každou oblast $\Omega \subset S$, jejíž hranicí je topologická kružnice, nazveme *Jordanovou oblastí.*

Budeme říkat, že dvě Jordanovy křivky φ a ψ *se protínají podstatně*, je-li

$$[\varphi] \cap \mathrm{Int}\,\psi \neq \emptyset \neq [\varphi] \cap \mathrm{Ext}\,\psi\,.^{1)} \tag{4}$$

Poznámka 1. Jak snadno nahlédneme, platí toto tvrzení: *K tomu, aby Jordanovy křivky φ a ψ se podstatně protínaly, je nutné a stačí, aby každá oblast K, pro niž je* $[\varphi] \subset H(K)$,[2]) *měla společné body jak s* $\mathrm{Int}\,\psi$, *tak s* $\mathrm{Ext}\,\psi$. Podle Jordanovy věty je $[\varphi] = H(\mathrm{Int}\,\varphi) = H(\mathrm{Ext}\,\varphi)$; odtud vyplývá, že *protínají-li se křivky φ, ψ podstatně, protíná každá z množin* $\mathrm{Int}\,\varphi$, $\mathrm{Ext}\,\varphi$ *každou z množin* $\mathrm{Int}\,\psi$, $\mathrm{Ext}\,\psi$. Čtenář se snadno přesvědčí, že *platí také obrácené tvrzení.*

2. V dalším budeme potřebovat řadu vět z topologie roviny:

---

[1]) Ze vztahu (4) vyplývá symetrická podmínka

$$[\psi] \cap \mathrm{Int}\,\varphi \neq \emptyset \neq [\psi] \cap \mathrm{Ext}\,\varphi\,. \tag{4'}$$

Kdyby totiž bylo např. $[\psi] \cap \mathrm{Int}\,\varphi = \emptyset$, byla by souvislá množina $\mathrm{Int}\,\varphi$ obsažena nutně v jedné z oddělených množin $\mathrm{Int}\,\psi$, $\mathrm{Ext}\,\psi$, jejichž sjednocením je $S - [\psi]$. Z podmínky $\mathrm{Int}\,\varphi \subset \mathrm{Int}\,\psi$ (resp. $\mathrm{Int}\,\varphi \subset \mathrm{Ext}\,\psi$) však plyne, že $[\varphi] \subset \overline{\mathrm{Int}\,\varphi} \subset \overline{\mathrm{Int}\,\psi} = S - \mathrm{Ext}\,\psi$, takže $[\varphi] \cap \mathrm{Ext}\,\psi = \emptyset$ (resp. $[\varphi] \cap \mathrm{Int}\,\psi = \emptyset$), což je ve sporu s (4).

[2]) $H(K)$ je hranice množiny K.

Lemma 1. *Buď σ_1 libovolný úsek Jordanovy křivky σ, σ_2 nechť je úsek k němu komplementární; buď ϱ prostá křivka, pro niž je* p.b. $\varrho =$ p.b. σ_1, k.b. $\varrho =$ k.b. σ_1, $(\varrho) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$. *Pak je*

$$\mathrm{Int}\,\sigma - [\varrho] = D_1 \cup D_2\,, \tag{5}$$

kde D_j jsou Jordanovy oblasti, pro něž (při vhodném očíslování) platí:

$$H(D_1) = [\sigma_1 \dot{-} \varrho]\,, \quad H(D_2) = [\sigma_2 \dot{+} \varrho]\,. \tag{6}$$

(Podobné tvrzení platí, je-li $(\varrho) \subset \mathrm{Ext}\,\sigma$.)

Je-li přitom σ kladně (záporně) orientována (a je-li $(\varrho) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$), jsou obě Jordanovy křivky

$$\omega_1 = \sigma_1 \dot{-} \varrho\,, \quad \omega_2 = \sigma_2 \dot{+} \varrho \tag{7}$$

kladně (záporně) orientovány.

Důkaz. První část důkazu (vztahy (5) a (6)) – viz [2], str. 359.[3]) Dokažme zbytek tvrzení. Je-li $(\varrho) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$, je zřejmě

$$\mathrm{Int}\,\sigma = \mathrm{Int}\,\omega_1 \cup (\varrho) \cup \mathrm{Int}\,\omega_2\,; \tag{8}$$

podle (7) je kromě toho

$$\mathrm{ind}_\sigma = \mathrm{ind}_{\omega_1} + \mathrm{ind}_{\omega_2} \tag{9}$$

(na množině $S - ([\sigma] \cup [\varrho])$). Pro $z \in \mathrm{Int}\,\omega_1$ dostáváme na levé straně rovnosti (9) v případě, že σ je kladně orientována, číslo 1, přičemž první sčítanec vpravo může být buď $+1$ nebo -1, druhý sčítanec vpravo ± 1 nebo 0. Snadno nahlédneme, že rovnost (9) s číslem 1 vlevo může pak platit jen tehdy, když $\mathrm{ind}_{\omega_1} z = 1$, $\mathrm{ind}_{\omega_2} z = 0$. Odtud plyne, že ω_1 je kladně orientována; podobně pro křivku ω_2 a pro případ, že σ je orientována záporně.

Lemma 2. *Buď ϱ_1 resp. σ_1 libovolný úsek Jordanovy křivky ϱ resp. σ, ϱ_2 resp. σ_2 nechť je úsek k němu komplementární. Přitom nechť křivky ϱ a σ se protínají podstatně, nechť σ je kladně orientována, nechť* p.b. $\varrho_j =$ p.b. σ_j *pro* $j = 1, 2$, *nechť* $((\varrho_1) \cup (\varrho_2)) \cap ((\sigma_1) \cup (\sigma_2)) = \emptyset$ *a* $(\sigma_2) \subset \mathrm{Int}\,\varrho$. *Pak je* $(\varrho_1) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$ *právě tehdy, když ϱ je kladně orientována.*

Důkaz. 1. Je-li $(\varrho_1) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$, jsou podle lemmatu 1 Jordanovy křivky $\omega_1 = \sigma_1 \dot{-} \varrho_1$, $\omega_2 = \sigma_2 \dot{+} \varrho_1$ kladně orientovány. Protože $(\sigma_2) \subset \mathrm{Int}\,\varrho$, má (podle téhož lemmatu) křivka ϱ touž orientaci jako ω_2, tedy kladnou.

2. Je-li $(\varrho_1) \subset \mathrm{Ext}\,\sigma$, je – vzhledem k tomu, že křivky ϱ a σ se podstatně protínají – $(\varrho_2) \subset \mathrm{Int}\,\sigma$. Podle lemmatu 1 jsou nyní kladně orientovány křivky $\chi_1 = \sigma_1 \dot{+} \varrho_2$, $\chi_2 = \sigma_2 \dot{-} \varrho_2$. Protože $(\sigma_2) \subset \mathrm{Int}\,\varrho$, má křivka ϱ touž orientaci jako křivka $\varrho_2 \dot{-} \sigma_2$, tedy zápornou.

---

[3]) Známá věta pro „Θ-křivky".

Lemma 3. *Je-li L oblouk, je $S - L$ homeomorfní s $S - \langle 0, 1 \rangle$.* (Důkaz viz [2], str. 381.)

Důsledek. *$S - L$ je oblast.*

Lemma 4 (*Janiszewského věta*). *Jsou-li M_1, M_2 množiny uzavřené v S a jsou-li množiny $S - M_1$, $S - M_2$, $M_1 \cap M_2$ souvislé, je souvislá i množina $S - (M_1 \cup \cup M_2)$.*

Důkaz. V podstatě se jedná o větu 7 z [2], str. 355.

Lemma 5. *Buď G oblast, jejíž hranicí je buď oblouk nebo topologická kružnice; buď $z_1 \in H(G)$. Pak existuje prostá křivka ϱ tak, že $z_1 =$ p. b. ϱ a že $[\varrho] - \{\text{p.b.}\varrho\} \subset \subset G$; tuto křivku je ovšem možno volit ještě tak, aby průměr $[\varrho]$ byl menší než libovolné předem dané kladné číslo.*

Důkaz. Viz [2], str. 365.

Důsledek. *Za situace popsané v lemmatu 5, existuje pro každé $z_2 \in H(G)$, $z_2 \neq z_1$, prostá křivka $\tilde{\varrho}$, jejíž částí je ϱ, tak, že $(\tilde{\varrho}) \subset G$, p.b. $\tilde{\varrho} = z_1$, k.b. $\tilde{\varrho} = z_2$.*

Důkaz. Dokažme nejdříve, že $G_1 = G - [\varrho]$ je oblast. Otevřenost této množiny je zřejmá.

Je-li $H(G)$ oblouk, jsou množiny $H(G)$ a $[\varrho]$ uzavřené, množiny $S - H(G)$, $S - [\varrho]$, $H(G) \cap [\varrho] = \{z_1\}$ souvislé; podle lemmatu 4 je množina $G_1 = S - (H(G) \cup [\varrho])$ souvislá. Je-li $H(G)$ topologická kružnice, jsou množiny $\overline{S - G}$ a $[\varrho]$ uzavřené, množiny $S - \overline{S - G} = G$, $S - [\varrho]$, $\overline{S - G} \cap [\varrho] = \{z_1\}$ souvislé; podle lemmatu 4 je množina $G_1 = S - (\overline{S - G} \cup [\varrho])$ souvislá.

Označme $a =$ k.b. ϱ a zvolme $\delta > 0$ tak malé, aby $U(a, \delta) \subset G$ [4]) a aby $U(z_2, \delta) \cap \cap (U(a, \delta) \cup [\varrho]) = \emptyset$. Podle lemmatu 5 existují prosté křivky μ a ν, definované např. v $\langle 0, 1 \rangle$, tak, že platí:

$$\mu(0) = a\,, \quad [\mu] - \{\mu(0)\} \subset U(a, \delta) - [\varrho]\,,$$
$$\nu(0) = z_2\,, \quad [\nu] - \{\nu(0)\} \subset U(z_2, \delta) \cap G\,.$$

Protože G_1 je oblast, $\mu(1) \in G_1$, $\nu(1) \in G_1$, existuje prostá křivka σ, definovaná v $\langle 0, 1 \rangle$, tak, že $[\sigma] \subset G_1$, $\sigma(0) = a$, $\sigma(1) = \nu(1)$.

Buď t_1 největší číslo z $\langle 0, 1 \rangle$, pro něž $\sigma(t_1) \in [\mu]$, a nechť $t_2 > t_1$ je nejmenší číslo, pro něž $\sigma(t_2) \in [\nu]$; buďte τ_1, τ_2 ta čísla z $\langle 0, 1 \rangle$, pro něž je $\sigma(t_1) = \mu(\tau_1)$, $\sigma(t_2) = \nu(\tau_2)$.

Jak snadno nahlédneme, je

$$\tilde{\varrho} = \varrho \dotplus \mu \mid \langle 0, \tau_1 \rangle \dotplus \sigma \mid \langle t_1, t_2 \rangle \dot{-} \nu \mid \langle 0, \tau_2 \rangle$$

křivka s žádanými vlastnostmi.

---

[4]) $U(a, \delta)$ je okolí o středu a a poloměru $\delta > 0$; znaku $U(a)$ budeme užívat pro libovolný (otevřený) kruh o středu a.

Lemma 6. *Buďte* ω_j $(j = 1, \ldots, q)$ *prosté křivky, definované v* $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$; *označme* $M_j = [\omega_j]$ (*takže* M_j *jsou oblouky*). *Nechť* $z =$ p.b. ω_j *pro* $j = 1, \ldots, q$ *a nechť* $\omega_j((\alpha_j, \beta_j\rangle)$ *jsou disjunktní množiny. Pak je* $S - \bigcup_{j=1}^{q} M_j$ *oblast.*

Důkaz. Tvrzení plyne snadno indukcí podle q z lemmatu 3 (a jeho důsledku) a z lemmatu 4.

Úmluva. Nastane-li situace z lemmatu 6, budeme psát $\omega_0 = \omega_q$, $M_0 = M_q$, $\alpha_0 = \alpha_q$, $\beta_0 = \beta_q$.

3. Zaveďme ještě několik pojmů: Budeme říkat, že množina $R \subset E$ je *sítí*, je-li $R = \bigcup_{j=1}^{r} N_j$, kde N_j jsou oblouky, pro něž platí:

1) $N_1 \cup N_2$ je topologická kružnice,

2) $N_j \cap (N_1 \cup \ldots \cup N_{j-1}) = \{\text{p.b. } N_j, \text{ k.b. } N_j\}$ pro $j = 2, \ldots, r$.

Podle [2], str. 374 (kde je pojem sítě (*réseau*) zaveden), *má množina* $S - R$ *právě* r *komponent* D_j $(j = 1, \ldots, r)$ *a jejich hranice jsou topologické kružnice, obsažené v* R.

Je-li h homeomorfní zobrazení sítě R do E, je $h(R) = \bigcup_{j=1}^{r} h(N_j)$ zřejmě opět síť, jejíž komplement má r komponent $(D_1^*, \ldots, D_r^*)$. Budeme říkat, že h je *regulární* (viz [2], str. 376), je-li při vhodném očíslování

$$h(H(D_j)) = H(D_j^*) \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, r\,. \tag{10}$$

Podle [2], str. 379 platí toto tvrzení:

Lemma 7. *Je-li* h *regulární homeomorfní zobrazení sítě* R *do* E, *lze* h *rozšířit na homeomorfní zobrazení celého* S *na* S.

Lemma 8. *Buďte* ω_j *a* M_j *jako v lemmatu 6; pak existuje homeomorfní zobrazení* h *roviny* S *na* S *tak, že* $h(M_j)$ *jsou stejně dlouhými úsečkami s počátečním bodem* 0.

Než přikročíme k důkazu, zaveďme jistý pojem, který budeme v dalším potřebovat.

Definice. Buď M topologická kružnice, $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ posloupnost navzájem různých bodů z M. Budeme říkat, že q-tice $\{z_1, \ldots, z_q\}$ je *přirozeně uspořádána* (na M), existuje-li kladně orientovaná Jordanova křivka μ, definovaná v jistém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, tak, že $[\mu] = M$, $z_j = \mu(\tau_j)$, kde $\tau_1 < \ldots < \tau_q$.

Je-li q-tice $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ přirozeně uspořádána na M, platí totéž o q-tici $\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_q}\}$, kde $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ je cyklickou permutací $(1, 2, \ldots, q)$. Dále je patrné, že jsou-li $z_1, \ldots, z_q$ libovolné navzájem různé body z M, je pro vhodnou permutaci $(i_1, \ldots, i_q)$ čísel $1, \ldots, q$ q-tice $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_q}\}$ přirozeně uspořádána na M.

Důkaz lemmatu 8 provedeme indukcí podle q. Je-li $q = 1$ nebo $q = 2$, stačí užít lemmatu 3 (v obou případech je $\bigcup_{j=1}^{q} M_j$ oblouk). Buď tedy $q > 2$ a předpokládejme, že existuje homeomorfní zobrazení h^* roviny S na S tak, že $M_j^* = h^*(M_j)$ jsou pro $j = 1, \dots, q - 1$ stejně dlouhými úsečkami s počátečním bodem 0; jejich délku označme ε. Lze jistě předpokládat, že očíslování je zvoleno tak, že posloupnost $\{z_1, \dots, z_{q-1}\}$ koncových bodů úseček M_j^* je přirozeně uspořádána na kružnici C o středu 0 a poloměru ε. Jest

$$U(0, \varepsilon) - \bigcup_{j=1}^{q-1} M_j^* = \bigcup_{j=1}^{q-1} V_j\,, \tag{11}$$

kde V_j jsou (otevřené) kruhové výseče; bez újmy obecnosti lze ještě předpokládat, že očíslování je zvoleno tak, že

$$h^*(\omega_q((\alpha_q, \alpha_q + \delta))) \subset V_{q-1} \tag{12}$$

pro všechna dost malá $\delta > 0$ a že hranice V_j obsahuje (pro $j = 1, \dots, q - 2$) úsečky M_j^* a M_{j+1}^* (takže $H(V_{q-1})$ obsahuje úsečky M_{q-1}^* a M_1^*).

Snadno nahlédneme, že existují prosté po částech lineární křivky ψ_j $(j = 1, \dots, q - 2)$, definované např. v $\langle 0, 1 \rangle$, tak, že

$$\psi_j(0) = z_j\,, \quad \psi_j(1) = z_{j+1} \tag{13}$$

a že

$$\text{množiny } (\psi_j), \text{ kde } j = 1, \dots, q - 2, \ \bigcup_{j=1}^{q} M_j^* \text{ jsou disjunktní}\,. \tag{14}$$

(Viz obr. 1.)

Množina $R = \bigcup_{j=1}^{q-1} M_j^* \cup \bigcup_{j=1}^{q-2} [\psi_j]$ je – jak snadno nahlédneme – sítí; přitom $R \cap (M_q^* - \{0\}) = \emptyset$. Množina $M_q^* - \{0\}$ leží tedy v jedné z komponent G množiny $S - R$; tato komponenta G je (podle toho, co jsme řekli na začátku tohoto odstavce) Jordanovou oblastí. Podle důsledku lemmatu 5 existuje prostá křivka $\tilde{\varrho}$, definovaná např. v $\langle 0, 2 \rangle$, pro niž platí:

1) $\tilde{\varrho}(\langle 0, 1 \rangle) = M_q^*$, $\tilde{\varrho}(0) = 0$;
2) $(\tilde{\varrho}) \subset G$;
3) $\tilde{\varrho}(2) = z_1$.

Podle lemmatu 1 je

$$G - [\tilde{\varrho}] = G_1 \cup G_2\,, \tag{15}$$

kde G_1, G_2 jsou disjunktní Jordanovy oblasti. Zvolme libovolně bod $z_q \in C \cap H(V_{q-1})$, $z_1 \neq z_q \neq z_{q-1}$, a buď χ definována v intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ těmito podmínkami:

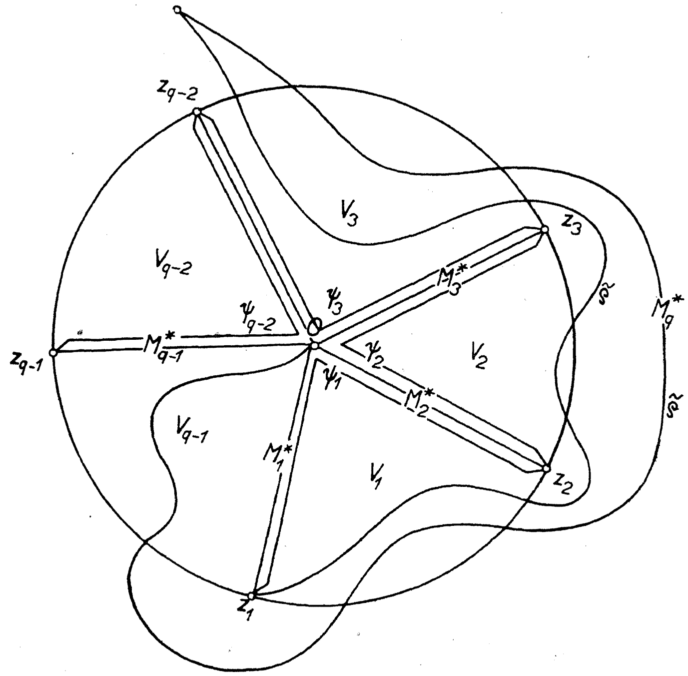
1) χ je lineární v $\langle 0, 1 \rangle$ i v $\langle 1, 2 \rangle$;
2) $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = z_q$, $\chi(2) = z_1$.

Zobrazení $\tilde{h}$, definované vztahy:

$$\tilde{h}(z) = z \quad \text{pro} \quad z \in R\,, \tag{16'}$$

$$\tilde{h}(\tilde{\rho}(t)) = \chi(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\rangle\,, \tag{16''}$$

je zřejmě regulární homeomorfní zobrazení sítě $R \cup [\tilde{\varrho}]$, přičemž $\tilde{h}(M_q^*)$ je úsečka $\chi(\langle 0, 1\rangle)$ délky ε, $\tilde{h}(M_j^*) = M_j^*$ pro $j = 1, \dots, q - 1$. Podle lemmatu 7 lze toto zobrazení rozšířit na homeomorfní zobrazení S na S; rozšířené zobrazení označme opět $\tilde{h}$.



Obr. 1.

Zobrazení $h = \tilde{h} * h^*$ je homeomorfním zobrazením S na S, při kterém oblouky M_j $(j = 1, \dots, q)$ přecházejí v úsečky $h(M_j)$ délky ε s počátečním bodem 0. Tím je lemma 8 dokázáno.

Lemma 9. *Jsou-li ω_j a M_j jako v lemmatu 6, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ Jordanova křivka μ tak, že platí:*

1) $[\mu] \cap M_j = \{z_j\}$,

přičemž

2) $z_j = \omega_j(\gamma_j)$, *kde* $\gamma_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, $\omega_j(\langle \alpha_j, \gamma_j)) \subset \operatorname{Int} \mu$, $\omega_j((\gamma_j, \beta_j\rangle) \subset \operatorname{Ext} \mu$;

3) *průměr* $[\mu]$ *je menší než* ε.

Důkaz. Buď h homeomorfní zobrazení S na S, při kterém jsou $h(M_j)$ stejně dlouhými úsečkami s počátečním bodem 0 (viz lemma 8); položíme-li $\mu^*(t) = \varepsilon^* e^{it}$ pro

$t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\mu = h_{-1} * \mu^*$, jsou jistě vlastnosti 1)–3) z lemmatu 9 splněny pro každé dostatečně malé $\varepsilon^* > 0$.

Lemma 10. *Buďte ω_j a M_j jako v lemmatu 6, při čemž nechť $q > 2$; nechť μ^1, μ^2 jsou kladně orientované Jordanovy křivky, definované např. v $\langle 0, 2\pi\rangle$, při čemž nechť (pro $m = 1, 2$) platí:*

1) $[\mu^m] \cap M_j = \{z_j^m\}$,

přičemž

2) $z_j^m = \omega_j(\gamma_j^m)$, *kde* $\gamma_j^m \in (\alpha_j, \beta_j)$, $\omega_j(\langle \alpha_j, \gamma_j^m)) \subset \operatorname{Int} \mu^m$, $\omega_j((\gamma^m, \beta_j\rangle) \subset \operatorname{Ext} \mu^m$.

Nechť q-tice $\{z_1^1, \ldots, z_q^1\}$ je přirozeně uspořádána na $[\mu^1]$; pak je q-tice $\{z_1^2, \ldots, z_q^2\}$ přirozeně uspořádána na $[\mu^2]$.

Důkaz. Podle lemmatu 9 existuje (kladně orientovaná) Jordanova křivka μ s vlastnostmi analogickými vlastnostem 1)–2), pro niž je $[\mu] \subset \operatorname{Int} \mu^1 \cap \operatorname{Int} \mu^2$. Odtud plyne, že v důkazu lemmatu 10 lze bez újmy obecnosti předpokládat, že $[\mu^2] \subset \subset \operatorname{Int} \mu^1$ (jinak přejdeme od μ^2 k μ a pak od μ k μ^1).

Za tohoto předpokladu bude ovšem $\alpha_j < \gamma_j^2 < \gamma_j^1 < \beta_j$; bez újmy obecnosti lze dále předpokládat, že p.b. $\mu^m \in M_q$. Označme

$$z_j^m = \mu^m(\tau_j^m)\,; \tag{17}$$

je tedy

$$0 = \tau_0^1 < \tau_1^1 < \ldots < \tau_q^1 = 2\pi\,, \quad \tau_0^2 = 0\,, \quad \tau_q^2 = 2\pi\,.^5) \tag{18}$$

Dále buď

$$\mu_j^1 = \mu^1 \mid \langle \tau_{j-1}^1, \tau_j^1 \rangle \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, q\,, \tag{19}$$

$$\nu_j = \omega_j \mid \langle \alpha_j, \gamma_j^2 \rangle\,, \quad \varrho_j = \omega_j \mid \langle \gamma_j^2, \gamma_j^1 \rangle \quad \text{pro} \quad j = 0, \ldots, q\,. \tag{20}$$

Stačí ukázat, že

$$\tau_0^2 < \tau_1^2 < \tau_2^2\,; \tag{21}$$

pro ostatní trojice indexů $j - 1, j, j + 1$ – pokud vůbec existují, tj. pokud $q > 3$ – je důkaz analogický.

Označme $\mu_1^2 = \mu^2 \mid \langle 0, \tau_2^2 \rangle$, $\mu_2^2 = \mu^2 \mid \langle \tau_2^2, \tau_q^2 \rangle$, takže $\mu^2 = \mu_1^2 \dotplus \mu_2^2$. Položíme-li

$$\kappa = \mu_1^1 \dotplus \mu_2^1 \dot{-} \varrho_2 \dot{-} \nu_2 \dotplus \nu_0 \dotplus \varrho_0\,, \tag{22}$$

je $[\kappa] \cap [\mu^1] \neq \emptyset$, takže $[\kappa] \cap \operatorname{Ext} \mu^2 \neq \emptyset$, a $z \in [\kappa]$, takže $[\kappa] \cap \operatorname{Int} \mu^2 \neq \emptyset$. Odtud plyne, že Jordanovy křivky μ^2 a κ se podstatně protínají. Protože obě jsou kladně

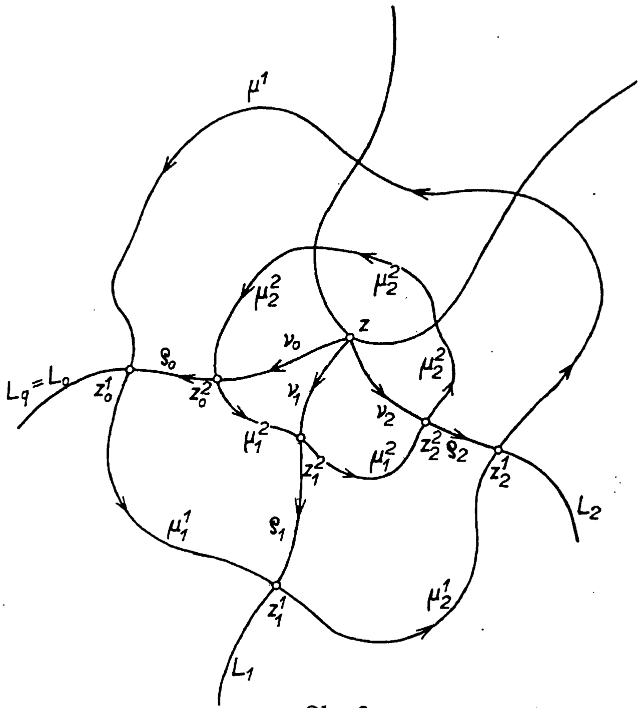
[5]) Srv. s úmluvou za lemmatem 6.

orientované a protože p.b. $\mu_1^2 =$ p.b. ϱ_0, k.b. $\mu_1^2 =$ k.b. $(\dot{-}\varrho_2)$, $((\mu_1^2) \cup (\mu_2^2)) \cap$ $\cap ((\varrho_0 \dotplus \mu_1^1 \dotplus \mu_2^1 \dot{-} \varrho_2) \cup (\dot{-} \nu_2 \dotplus \nu_0)) = \emptyset$, je podle lemmatu 2

$$(23) \qquad (\mu_1^2) \subset \operatorname{Int} \kappa .$$

Dále: Množina $(\nu_1 \dotplus \varrho_1)$ je disjunktní s $[\kappa]$, tedy obsažená buď v $\operatorname{Int} \kappa$ nebo v $\operatorname{Ext} \kappa$. Protože

$$\operatorname{Int} \mu^1 - [\kappa] = \operatorname{Int} \kappa \cup D ,$$



Obr. 2.

kde D je Jordanova oblast disjunktní s $\operatorname{Int} \kappa$, jejíž hranice $H(D)$ je disjunktní s $(\mu_1^1 \dotplus \dotplus \mu_2^1)$, a protože $(\nu_1 \dotplus \varrho_1) \subset \operatorname{Int} \mu^1 - [\kappa]$, k.b. $(\nu_1 \dotplus \varrho_1) \in (\mu_1^1 \dotplus \mu_2^1)$, je nutně

$$(24) \qquad (\nu_1 \dotplus \varrho_1) \subset \operatorname{Int} \kappa .$$

Oblouk $[\nu_1 \dotplus \varrho_1]$ má jen jeden bod (z_1^2) společný s $[\mu^2]$; tento bod leží podle (24) v $\operatorname{Int} \kappa$. Vzhledem k tomu, že křivky κ a μ^2 se protínají podstatně, a vzhledem k (23) (odkud plyne, že $[\mu_2^2] \cap \operatorname{Int} \kappa = \emptyset$), je nutně $z_1^2 \in (\mu_1^1)$.

Tím je dokázán vztah (21), a tedy i tvrzení lemmatu.

P o z n á m k a 2. Vzhledem k lemmatu 10 můžeme zavést tuto d e f i n i c i:

Buďte $M_1, \ldots, M_q$ oblouky jako v lemmatu 6; jestliže existuje kladně orientovaná Jordanova křivka μ, definovaná např. v $\langle 0, 2\pi \rangle$, mající vlastnosti 1), 2) z lemmatu 9, přičemž $z_j = \mu(\tau_j)$, kde

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{q-1} < \tau_q = 2\pi ,$$

budeme říkat, že q-tice $\{M_1, \ldots, M_q\}$ oblouků je *přirozeně uspořádána.*

Je patrné, že je-li přirozeně uspořádána q-tice $\{M_1, \ldots, M_q\}$, platí totéž o q-tici $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_q}\}$ právě tehdy, když $(i_1, \ldots, i_q)$ tvoří cyklickou permutaci $(1, \ldots, q)$. Z lemmatu 10 plyne, že o tom, zda q-tice $\{M_1, \ldots, M_q\}$ je přirozeně uspořádána, můžeme rozhodnout pomocí jakékoliv kladně orientované Jordanovy křivky μ, mající vlastnosti 1) a 2) z lemmatu 9. (Výsledek je nezávislý na bližší volbě μ.)

Dále je patrné, že q-tice $\{M_1, \ldots, M_q\}$ je uspořádána přirozeně právě tehdy, když pro některou Jordanovu křivku μ s vlastnostmi 1) a 2) z lemmatu 9 je q-tice $\{z_1, \ldots, z_q\}$ přirozeně uspořádána na $[\mu]$. Vzhledem k tomu, že podle lemmatu 9 křivky μ s vlastnostmi 1), 2) existují, je q-tice $\{M_{i_1}, \ldots, M_{i_q}\}$ přirozeně uspořádána při vhodné volbě permutace $(i_1, \ldots, i_q)$ čísel $1, \ldots, q$.

4. *Elementární křivkou* nazveme každou uzavřenou křivku φ, definovanou v $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro niž je množina

$$T = \{t \in \langle\alpha, \beta\rangle;\ \text{existuje } t' \in \langle\alpha, \beta\rangle,\ t' \neq t \text{ tak, že } \varphi(t) = \varphi(t')\} \tag{25}$$

konečná.

V dalším se budeme zabývat pevně danou elementární křivkou φ; zavedeme toto označení: Jsou-li

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta \tag{26}$$

(kde $N \geqq 1$) právě všechny body množiny T, položíme

$$\varphi_k = \varphi \mid \langle t_{k-1}, t_k\rangle \quad \text{pro} \quad k = 1, \ldots, N . \tag{27}$$

Je zřejmé, že každá z křivek φ_k je buď prostá nebo Jordanova.

Naším cílem je důkaz tohoto tvrzení (užitečného např. v některých částech teorie funkcí komplexní proměnné):

Věta. *Buď φ elementární křivka; užívejme právě zavedeného označení. Pak existuje systém J Jordanových křivek, který má tyto vlastnosti:*

1. *Každá z křivek $\chi \in J$ je tvaru $\chi = \varphi_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{i_n}$ (kde $n \geqq 1$, $1 \leqq i_k \leqq N$ pro každé k).*
2. *Každé φ_k $(k = 1, \ldots, N)$ je částí právě jedné z křivek $\chi \in J$.*[6])
3. *Žádné dvě křivky $\chi_1, \chi_2 \in J$ se neprotínají podstatně.*

Poznámka 3. „Rozklad“ elementární křivky φ na Jordanovy křivky $\chi \in J$ provedeme efektivně. Pro každé k ukážeme metodu konstrukce křivky $\chi \in J$, jejíž částí je φ_k.

[6]) Z toho plyne mj., že $[\varphi] = \bigcup_{\chi \in J} [\chi]$.

Poznámka 4. Vynecháme-li vlastnost 3 systému J, lze příslušné tvrzení dokázat velmi snadno, a to indukcí podle počtu prvků množiny T:

Obsahuje-li množina T jen dva body, jsou to jistě body α a β; křivka φ je Jordanova a tvrzení je triviální (systém J obsahuje pouze křivku φ).

Předpokládejme, že tvrzení je správné pro každou elementární křivku, pro niž příslušná množina T obsahuje méně než N prvků (kde $N > 2$). Je-li φ elementární křivka, pro niž množina T obsahuje N prvků (26), existuje jistě nejmenší index j tak, že pro jistý index $i < j$ je $\varphi(t_i) = \varphi(t_j)$; jak snadno nahlédneme, existuje takový index i právě jeden a křivka $\psi_1 = \varphi \mid \langle t_i, t_j \rangle$ je Jordanova. Na křivku $\psi_2 = \varphi \mid \langle \alpha, t_i \rangle \dotplus \varphi \mid \langle t_j, \beta \rangle$ (první sčítanec odpadá, je-li $t_i = \alpha$) lze užít indukčního předpokladu. Množina J (pro křivku φ) bude obsahovat křivku ψ_1 a všechny Jordanovy křivky, na něž lze (podle indukčního předpokladu) „rozložit" křivku ψ_2.

Jak uvidíme, je důkaz věty, v níž žádáme vlastnost 3 systému J, podstatně složitější. *Protože věta je triviální v případě, že φ je Jordanova křivka, budeme v dalším předpokládat, že φ není Jordanova křivka, takže množina T obsahuje aspoň 3 body.* Protože – jak snadno nahlédneme – ve větě nezáleží na volbě počátečního bodu křivky φ (to znamená: dokážeme-li tvrzení věty pro určitou křivku $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$, platí toto tvrzení i pro křivku $\varphi_2 \dotplus \varphi_1$), můžeme předpokládat (a v dalším to učiníme), že *množina $\varphi_{-1}(\varphi(\alpha))$ obsahuje více než dva body.*

Pak platí:

(28) *Pro každé $t_j \in T$ je bod $\varphi(t_j)$ počátečním bodem $r \geqq 2$ křivek* (27) *a koncovým bodem téhož počtu těchto křivek.*

Důkaz. Je-li $\varphi_{-1}(\varphi(t_j))$ složena z bodů $t_{i_1}, \ldots, t_{i_r}$ a všechna t_{i_k} jsou různá od α (tedy i od β), je $\varphi(t_j) = \text{p.b. } \varphi_{i_k} = \text{k.b. } \varphi_{i_k - 1}$ pro $k = 1, \ldots, r$; jestliže např. $t_{i_1} = \alpha$, $t_{i_2} = \beta$, je $r > 2$, a $\varphi(t_j) = \text{p.b. } \varphi_1 = \text{p.b. } \varphi_{i_k} = \text{k.b. } \varphi_N = \text{k.b. } \varphi_{i_k - 1}$ pro $k = 3, \ldots, r$.

Kromě (25)–(27) budeme užívat ještě tohoto označení:

$$L_k = [\varphi_k]\,, \quad \tilde{L}_k = (\varphi_k)\,. \tag{29}$$

Komponenty množiny $S - [\varphi]$ budeme značit vždy písmenem Ω (s různými indexy).[7]

5. Lemma 11. *Každé L_k leží na hranici právě dvou různých komponent Ω_i, Ω_j množiny $S - [\varphi]$; přitom pro ostatní komponenty Ω_n této množiny je $H(\Omega_n) \cap \tilde{L}_k = \emptyset$ a*

$$|\text{ind}_\varphi\, \Omega_i - \text{ind}_\varphi\, \Omega_j| = 1\,. \tag{30}$$

Důkaz. Dokážeme, že 1) pro každý bod $\zeta \in \tilde{L}_k$ existují právě dvě komponenty Ω_i, Ω_j množiny $S - [\varphi]$, pro něž je $\zeta \in H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, a že přitom pro ně platí (30); 2) komponenty Ω_i, Ω_j nezávisí na volbě $\zeta \in \tilde{L}_k$. Tím bude lemma dokázáno.

[7]) V důsledku za lemmatem 16 je dokázáno, že těchto komponent je jen konečný počet.

Buďte $\zeta_m \in \tilde{L}_k$ $(m = 1, 2)$ libovolné dva body; nechť $\zeta_m = \varphi(\tau_m)$, kde $t_{k-1} < \tau_1 < < \tau_2 < t_k$. Zvolme ještě čísla u_m tak, aby bylo $t_{k-1} < u_1 < \tau_1 < \tau_2 < u_2 < t_k$. Vzhledem k topologickému charakteru tvrzení a vzhledem k tomu, že existuje homeomorfní zobrazení S na S, které převádí oblouk $L = \varphi(\langle u_1, u_2 \rangle)$ v úsečku (viz lemma 3), lze bez újmy obecnosti předpokládat, že L je úsečka.

Buď $\varepsilon > 0$ tak malé, že uzávěry okolí $U_m = U(\zeta_m, \varepsilon)$ jsou disjunktní s množinou $[\varphi] - L$. Položíme-li $K_m = H(U_m)$, skládá se průnik $K_m \cap [\varphi] = K_m \cap L$ právě ze dvou bodů $z'_m = \varphi(t'_m)$, $z''_m = \varphi(t''_m)$; budeme předpokládat, že očíslování je zvoleno tak, že $t'_m < t''_m$.

Nechť ω_m je úsek kladně orientované kružnice o středu ζ_m a poloměru ε mezi body z'_m a z''_m. Položme

$$(31) \qquad \varrho_m = \varphi \mid \langle \alpha, t'_m \rangle \dotplus \omega_m \dotplus \varphi \mid \langle t''_m, \beta \rangle\,, \quad \sigma_m = \varphi \mid \langle t'_m, t''_m \rangle \dot{-} \omega_m\,.$$

Jak snadno nahlédneme (viz také lemma 1), je σ_m záporně orientovaná Jordanova křivka, takže

$$(32) \qquad z \in S - [\sigma_m] \Rightarrow \operatorname{ind}_{\sigma_m} z = 0 \quad \text{nebo} \quad = -1\,;$$

protože $U_m \cap [\varrho_m] = \emptyset$,

$$(33) \qquad \operatorname{ind}_{\varrho_m} \text{ je konstantní v } U_m\,.$$

Dále je

$$(34) \qquad U_m - [\varphi] = U_m - L = U'_m \cup U''_m\,,$$

kde U'_m, U''_m jsou otevřené půlkruhy; označení volme tak, že

$$(35) \qquad U'_m \subset \operatorname{Int} \sigma_m \quad (\text{takže } U''_m \subset \operatorname{Ext} \sigma_m)\,.$$

Půlkruhy U'_m, U''_m jsou souvislé množiny disjunktní s $[\varphi]$; odtud plyne existence komponent Ω_{i_m}, Ω_{j_m} (zatím nevíme, zda navzájem různých) množiny $S - [\varphi]$, pro něž je

$$(36) \qquad U'_m \subset \Omega_{i_m}\,, \quad U''_m \subset \Omega_{j_m}\,.$$

Je patrné, že bod ζ_m leží v $H(\Omega_{i_m}) \cap H(\Omega_{j_m})$, ale neleží na hranici žádné další komponenty množiny $S - [\varphi]$. Dokážeme, že $\Omega_{i_1} = \Omega_{i_2}$, $\Omega_{j_1} = \Omega_{j_2}$.

Podle (33), (32) a (35) je

$$(37) \qquad \operatorname{ind}_{\varrho_m} U'_m = \operatorname{ind}_{\varrho_m} U''_m\,, \quad \operatorname{ind}_{\sigma_m} U'_m = -1\,, \quad \operatorname{ind}_{\sigma_m} U''_m = 0\,;$$

protože zřejmě

$$(38) \qquad \operatorname{ind}_\varphi = \operatorname{ind}_{\varrho_m} + \operatorname{ind}_{\sigma_m}$$

(na množině $S - ([\varphi] \cup [\omega_m]))$, je $\operatorname{ind}_\varphi U'_m - \operatorname{ind}_\varphi U''_m = -1$, tedy i

$$\operatorname{ind}_\varphi \Omega_{i_m} - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_{j_m} = -1\,. \tag{39}$$

Odtud plyne, že $\Omega_{i_m} \neq \Omega_{j_m}$. Vzhledem k tomu, že úsečka $\varphi(\langle\tau_1, \tau_2\rangle)$ nemá společné body s $\overline{[\varphi] - L}$, existují jistě úsečky C', C'' (rovnoběžné s L a dostatečně blízké L), pro něž platí:

$$(C' \cup C'') \cap [\varphi] = \emptyset\,, \tag{40}$$

$$C' \cap U'_1 \neq \emptyset \neq C'' \cap U''_1\,, \tag{41}$$

$$C' \cap U_2 \neq \emptyset \neq C'' \cap U_2\,. \tag{42}$$

Z (40), (41) a (36) plyne, že

$$C' \subset \Omega_{i_1}\,, \quad C'' \subset \Omega_{j_1}\,, \tag{43}$$

takže podle (39)

$$\operatorname{ind}_\varphi C' - \operatorname{ind}_\varphi C'' = -1\,. \tag{44}$$

Vzhledem k (34), (36), (40), (42) leží C' (resp. C'') v jedné z oblastí Ω_{i_2}, Ω_{j_2}, podle (39) a (44) nutně

$$C' \subset \Omega_{i_2}\,, \quad C'' \subset \Omega_{j_2}\,, \tag{45}$$

takže (vzhledem k tomu, že každé dvě komponenty jsou buď disjunktní nebo identické)

$$\Omega_{i_1} = \Omega_{i_2}\,, \quad \Omega_{j_1} = \Omega_{j_2}\,. \tag{46}$$

Tím je lemma dokázáno.

Definice. Je-li $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde Ω_i, Ω_j jsou komponenty množiny $S - [\varphi]$, pro něž je

$$\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = -1\,, \tag{47}$$

budeme říkat, že *komponenta Ω_i leží vpravo, komponenta Ω_j vlevo od křivky φ_k*.

Poznámka 5. Zavedený pojem není topologicky invariantní; je patrné, že znamená-li h zrcadlení podle reálné osy, plyne z podmínky (47) podmínka

$$\operatorname{ind}_{h*\varphi} h(\Omega_i) - \operatorname{ind}_{h*\varphi} h(\Omega_j) = 1\,. \tag{47'}$$

Je však patrné, že *zavedený pojem je invariantní vůči kladným homeomorfním zobrazením h*, tj. vzhledem k takovým zobrazením S na S, pro něž je $h(\infty) = \infty$ a které převádějí kladně orientované Jordanovy křivky opět v kladné orientované Jordanovy křivky. (Tato zobrazení, jak známo, zachovávají index bodu vzhledem ke křivce.)

Poznamenejme k tomu ještě, že je-li h homeomorfní zobrazení S na S, pro něž je $h(\infty) = \infty$, je buď h nebo zobrazení, k němu komplexně sdružené, kladné.

Poznámka 6. Způsobem analogickým, jakým jsme dokázali lemma 11, lze dokázat poněkud obecnější tvrzení:

Je-li $\psi = \varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_n}$ uzavřená křivka (kde $n \geqq 1$ a kde indexy i_m jsou navzájem různé, aby ψ byla elementární křivkou), leží-li komponenta Ω_i (resp. Ω_j) množiny $S - [\varphi]$ vpravo (resp. vlevo) od křivky φ_{i_m} a je-li K_1 (resp. K_2) komponenta množiny $S - [\psi]$, obsahující Ω_i (resp. Ω_j), je

$$\operatorname{ind}_\psi K_1 - \operatorname{ind}_\psi K_2 = -1\,. \tag{48}$$

Označme totiž $\varphi_{i_m} = \varphi_k$ a užívejme téhož označení jako v důkazu lemmatu 11. Vzhledem k existenci kladného homeomorfního zobrazení, které převádí oblouk $L = \varphi(\langle u_1, u_2 \rangle)$ v úsečku (a které zachovává index bodu vzhledem ke křivce – viz pozn. 5), lze předpokládat (jako v důkazu lemmatu 11), že L je úsečka. Místo křivek ϱ_m, σ_m (srv. s (31)) zaveďme:

$$\varrho^* = \varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_{m-1}} + \varphi \mid \langle t_{k-1}, t_1' \rangle + \omega_1 + \varphi \mid \langle t_1'', t_k \rangle + \varphi_{i_{m+1}} + \ldots + \varphi_{i_n},$$
$$\sigma^* = \varphi \mid \langle t_1', t_2'' \rangle \dotplus \omega_1\,;$$

pak je (srv. s (38))

$$\operatorname{ind}_\psi = \operatorname{ind}_{\varrho^*} + \operatorname{ind}_{\sigma^*}$$

a jako dříve dostáváme rovnost

$$\operatorname{ind}_\psi \Omega_i - \operatorname{ind}_\psi \Omega_j = -1 \tag{49}$$

(srv. s (39) a (47)), z níž plyne (48).

Odtud plyne dále:

Lemma 12. *Nechť $\psi = \varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_n}$ (kde $n \geqq 1$) je Jordanova křivka a nechť K je souvislá množina neprotínající $[\psi]$ a obsahující některou komponentu Ω_j množiny $S - [\varphi]$, která leží vlevo od některého φ_{i_m}. Pak je $K \subset$ Int ψ resp. $K \subset$ Ext ψ podle toho, zda ψ je kladně nebo záporně orientována.*

Důkaz. Nechť $L_{i_m} \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = -1$, takže (podle pozn. 6) platí (49) a tedy také rovnost

$$\operatorname{ind}_\psi \Omega_i - \operatorname{ind}_\psi K = -1\,. \tag{50}$$

Jedna z množin K, Ω_i leží přitom (podle Jordanovy věty) v Int ψ, druhá v Ext ψ. Pro kladně (záporně) orientovanou křivku ψ je $\operatorname{ind}_\psi \operatorname{Ext} \psi - \operatorname{ind}_\psi \operatorname{Int} \psi = -1$ (resp. $+1$); porovnáním s (50) dostaneme žádané tvrzení.

V důkazu lemmatu 11 je obsaženo také toto tvrzení:

Lemma 13. *Je-li (pro některé k a i) $\tilde{L}_k \cap H(\Omega_i) \neq \emptyset$, je $L_k \subset H(\Omega_i)$.*

Čtenáři přenecháváme snadný důkaz tvrzení:

Lemma 14. *Je-li* $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, *kde* $\Omega_i \neq \Omega_j$, *je* $\Omega_i \cup \tilde{L}_k \cup \Omega_j$ *oblast.*

Poznámka 7. Všimněme si ještě, že (užíváme-li téhož označení jako v důkazu lemmatu 11) *množina* (ω_1) *je částí té komponenty* Ω_i *množiny* $S - [\varphi]$, *která leží vpravo od* φ_k.

6. V tomto odstavci zavedeme pojem *indikatrix křivky* φ *v bodě* $z \in \varphi(T)$. Zvolme především v každém z intervalů $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ dva body τ_{2k-1}, τ_{2k}, a to tak, aby

$$t_{k-1} < \tau_{2k-1} < \tau_{2k} = t_k ;$$

označme

$$\lambda_{2k-1} = \varphi \mid \langle t_{k-1}, \tau_{2k-1} \rangle , \quad \lambda_{2k} = \varphi \mid \langle \tau_{2k}, t_k \rangle ,$$

$$\Lambda_n = [\lambda_n] , \quad \tilde{\Lambda}_n = (\lambda_n) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots, 2N .$$

Pak jsou $\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}$ prosté křivky, které jsou částmi φ_k, přičemž

$$\text{p.b. } \lambda_{2k-1} = \text{p.b. } \varphi_k , \quad \text{k.b. } \lambda_{2k} = \text{k.b. } \varphi_k .$$

Buď dán bod $z \in \varphi(T)$; nechť n_i, kde $1 \leqq i \leqq q$, jsou právě všechny indexy, pro něž příslušný oblouk Λ_{n_i} má krajní bod z. Kromě bodu z nemají ovšem tyto oblouky Λ_{n_i} žádný bod společný. Podle (28) je $q \geqq 4$ sudé číslo a bod z je počátečním (koncovým) bodem právě $\frac{1}{2}q$ oblouků Λ_{n_i}.

Abychom zjednodušili zápis, pišme: $\lambda^i = \lambda_{n_i}$, $\Lambda^i = \Lambda_{n_i}$; předpokládejme dále, že λ^i je definováno v intervalu $\langle \alpha^i, \beta^i \rangle$ a že očíslování bylo zvoleno tak, že q-tice oblouků $\{\Lambda^1, \ldots, \Lambda^q = \Lambda^0\}$ je přirozeně uspořádána (viz konec odst. 4).

Zvolme libovolnou kladně orientovanou Jordanovu křivku μ, definovanou v $\langle 0, 2\pi \rangle$, pro niž platí (srv. s lemmatem 9):

1) $[\mu] \cap \Lambda^i = \{z^i\}$, přičemž
2) $z^i = \lambda^i(\gamma^i)$, kde $\gamma^i \in (\alpha^i, \beta^i)$, $\lambda^i(\langle \alpha^i, \gamma^i)) \subset \operatorname{Int} \mu$, $\lambda^i((\gamma^i, \beta^i \rangle) \subset \operatorname{Ext} \mu$;
3) $[\mu] \cap ([\varphi] - \bigcup_{i=1}^{q} \Lambda^i) = \emptyset$,
4) $z^i = \mu(\delta^i)$, kde $\delta^0 = 0$, $\delta^q = 2\pi$;

vzhledem k tomu, že q-tice $\{\Lambda^1, \ldots, \Lambda^q\}$ je přirozeně uspořádána, je

$$0 = \delta^0 < \delta^1 < \ldots < \delta^q = 2\pi . \tag{51}$$

Dále je (důkaz lze snadno provést indukcí na základě lemmatu 1)

$$\operatorname{Int} \mu - [\varphi] = \operatorname{Int} \mu - \bigcup_{i=1}^{q} \Lambda^i = \bigcup_{i=1}^{q} G^i , \tag{52}$$

kde G^i jsou disjunktní (Jordanovy) oblasti, které očíslujeme tak, aby

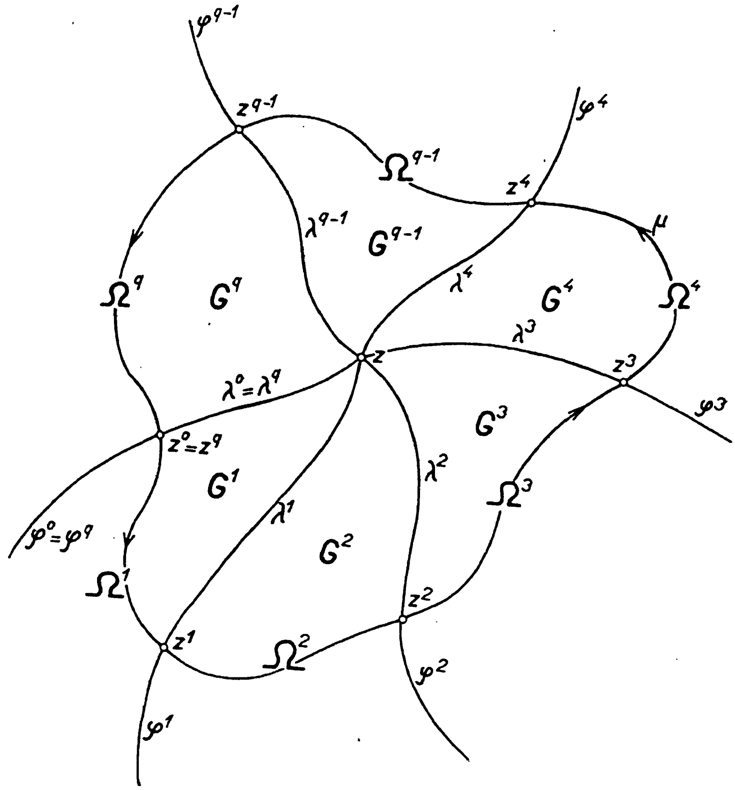
$$(\Lambda^{i-1} \cup \Lambda^i) \cap \operatorname{Int} \mu \subset H(G^i) \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, q . \tag{53}$$

Každé G^i je obsaženo v některé komponentě množiny $S - [\varphi]$; tuto komponentu označme Ω^i. Je pak také

$$(54)\qquad (\Lambda^{i-1} \cup \Lambda^i) \cap \operatorname{Int} \mu \subset H(\Omega^i)\,.$$

Je-li φ^i ta z křivek φ_n, jejíž částí je λ^i, a klademe-li $L^i = [\varphi^i]$, je tedy podle lemmatu 13

$$(55)\qquad L^{i-1} \cup L^i \subset H(\Omega^i) \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, q\,.$$



Obr. 3.

Právě sestrojený systém křivek $\lambda^1, \ldots, \lambda^q = \lambda^0$ (s uvedeným uspořádáním, při kterém q-tice oblouků $\{\Lambda^1, \ldots, \Lambda^q\}$ je přirozeně uspořádána) budeme nazývat indikatrix křivky φ v bodě $z \in \varphi(T)$. Abychom se vyhnuli zbytečnému opakování, budeme užívat i ostatní zavedená označení $(\mu, \Lambda^i, \varphi^i, L^i, \Omega^i, G^i)$, kdykoliv budeme mluvit o indikatrix křivky φ v bodě z.

Dokažme toto tvrzení:

Lemma 15. *Ω^i leží vpravo resp. vlevo od φ^i právě tehdy, když $z =$ p.b. φ^i ($=$ p. b. λ^i) resp. $z =$ k. b. φ^i ($=$ k. b. λ^i).*

Důkaz. Buď např. $i = 1$ (pro ostatní indexy je důkaz analogický) a $z =$ p. b. φ^1. Označme μ_1 úsek křivky μ mezi body z^0 a z^1; μ_2 nechť je úsek mezi body z^1 a z^2. Buď dále ν_n $(n = 0, 1, 2)$ prostá křivka, definovaná v $\langle 0, 1\rangle$, pro niž je p. b. $\nu_n = z$, k. b. $\nu_n = z^n$, $[\nu_n] \subset [\lambda^n]$.

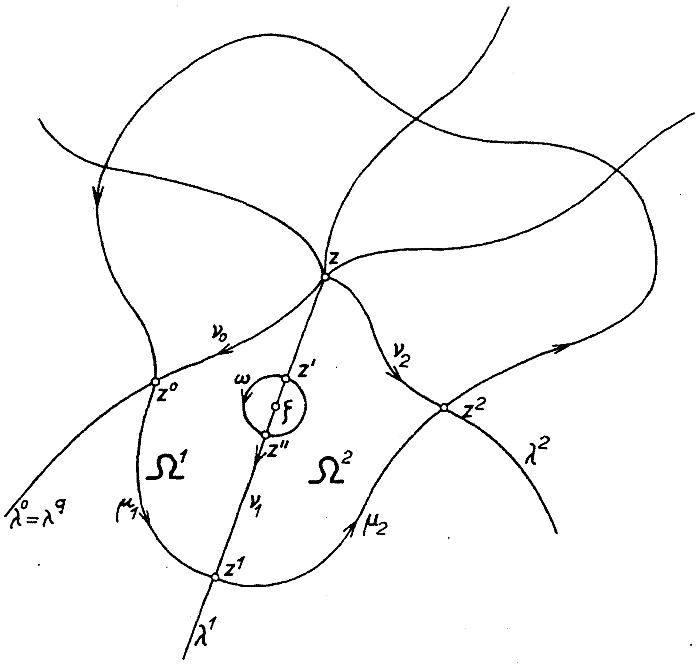
Pak je

$$\kappa = \mu_1 \dotplus \mu_2 \dot{-} \nu_2 \dotplus \nu_0$$

Jordanova křivka, která je podle lemmatu 1 kladně orientována; odtud analogicky plyne, že také Jordanovy křivky

$$\mu_1 \dot{-} \nu_1 \dotplus \nu_0\,, \quad \mu_2 \dot{-} \nu_2 \dotplus \nu_1$$

jsou kladně orientovány.



Obr. 4.

Bez újmy obecnosti (vzhledem k existenci kladného homeomorfního zobrazení, převádějícího oblouk $[\lambda^1]$ v úsečku) lze předpokládat, že $[\lambda^1]$ je úsečka. Zvolme $\zeta \in (\nu_1)$ libovolně a buď $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\overline{U(\zeta, \varepsilon)} \subset \operatorname{Int} \kappa$; označme $z' = \nu_1(t')$, $z'' = \nu_1(t'')$, kde $t' < t''$, oba průsečíky úsečky $[\nu_1]$ s kružnicí $K = H(U(\zeta, \varepsilon))$. Buď konečně ω_1 úsek kladné orientované kružnice o středu ζ a poloměru ε mezi body z' a z''.

Křivka $\omega_1 \dot{-} \nu_1 \mid \langle t', t''\rangle$ je (viz lemma 1) kladně orientována a podle lemmatu 2 je $(\omega_1) \subset \operatorname{Int}(\mu_1 \dot{-} \nu_1 \dotplus \nu_0) \subset \Omega^1$. Porovnáme-li to s důkazem lemmatu 11 (stačí též pozn. 7), kde jsme měli podobnou situaci, vidíme, že (ω_1) patří zároveň do té komponenty množiny $S - [\varphi]$, které leží vpravo od φ^1. Je-li tedy $z =$ p. b. φ^1, leží Ω^1 skutečně vpravo od φ^1. Podobně provedeme důkaz tvrzení lemmatu 15, je-li $z =$ = k. b. φ^1.

Důsledek. *Pro každé* $i = 1, \ldots, q$ *je* $\operatorname{ind}_\varphi \Omega^i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega^{i-1} = +1$ *nebo* -1 *podle toho, zda* $z =$ p. b. φ^i *nebo* $z =$ k. b. φ^i.

7. Buď $G \subset S$ libovolná množina; označme

$$\mathfrak{M}(G) = \{\varphi_k;\ L_k \subset H(G)\}\ ; \tag{56}$$

budiž dále (pro každé celé číslo p)

$$\mathfrak{R}_p = \{\varphi_k;\ \text{vlevo od } \varphi_k \text{ leží } \Omega_j, \text{ pro něž je } \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = p\}\ . \tag{57}$$

Podle lemmatu 11 je patrné, že

$$\mathfrak{R}_p = \{\varphi_k;\ L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j), \text{ kde } \operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = p - 1,\ \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = p\}\ . \tag{58}$$

Označme konečně pro $s > 0$

$$W_s = \bigcup \overline{\Omega}_j, \text{ kde se sčítá přes všechna } j, \text{ pro něž je } \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq s\ . \tag{59}$$

(Pro $s \leqq 0$ množinu W_s zatím nedefinujeme.)
Dokažme několik tvrzení:

Lemma 16. *Pro každou komponentu* Ω_i *množiny* $S - [\varphi]$ *je*

$$H(\Omega_i) = \bigcup L_k, \quad \textit{kde se sčítá přes všechna } k, \textit{ pro něž je } \tilde{L}_k \cap H(\Omega_i) \neq \emptyset\ . \tag{60}$$

Důkaz. Podle lemmatu 13 je $\bigcup L_k \subset H(\Omega_i)$. Buď $z \in H(\Omega_i)$; je-li $z \in \tilde{L}_k$ pro jisté k, je z prvkem pravé strany (60). Zbývá případ, že $z \in H(\Omega_i) \cap \varphi(T)$. Utvořme podle odst. 6 indikatrix křivky φ v bodě z (a užívejme, jak jsme se umluvili, tam zavedených označení). Protože $z \in H(\Omega_i)$, protíná $\operatorname{Int} \mu$ množinu Ω_i; existuje tedy j tak, že $\Omega^j = \Omega_i$. Odtud plyne, že $z \in L^j \subset H(\Omega_i)$ (viz (55)), přičemž L^j je jedním ze sčítanců na pravé straně (60). Tím je lemma dokázáno.

Důsledek. *Množina* $S - [\varphi]$ *má jen konečný počet (přesněji: nejvýše* $2N$*) komponent.*

Důkaz. Hranice každé komponenty Ω_i obsahuje podle lemmatu 16 některé L_k; podle lemmatu 11 leží každé L_k na hranici právě dvou různých komponent množiny $S - [\varphi]$. Protože množin L_k je N, je komponent množiny $S - [\varphi]$ nejvýše $2N$.

Lemma 17. *Pro každé* $s > 0$ *je*

$$H(W_s) = \bigcup L_k, \quad \textit{kde se sčítá přes všechna } k, \textit{ pro něž je } \varphi_k \in \mathfrak{R}_s\ . \tag{61}$$

Důkaz. Je-li $\varphi_k \in \mathfrak{R}_s$ a $z \in L_k$, je $z \in H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s$. Pro každé $U(z)$ je tedy $U(z) \cap W_s \supset U(z) \cap \Omega_j \neq \emptyset$ a $U(z) - W_s \supset U(z) \cap \Omega_i \neq \emptyset$; odtud plyne, že $z \in H(W_s)$.

Buď obráceně $z \in H(W_s)$; protože (podle (59)) $H(W_s) \subset \bigcup H(\Omega_j)$, kde se sčítá přes všechna j, pro něž $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq s$, je $z \in H(\Omega_j)$ pro některé takové j. Jsou dvě možnosti:

1) $z \notin \varphi(T)$, takže $z \in \tilde{L}_k$ pro jisté k, přičemž $L_k \subset H(\Omega_j)$ podle lemmatu 13; 2) $z \in \in \varphi(T)$.

Ad 1. L_k leží na hranici ještě právě jednoho $\Omega_i \neq \Omega_j$; kdyby $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i \geqq s$, bylo by $\overline{\Omega}_i \subset W_s$, a vzhledem k tomu, že podle lemmatu 14 je $\Omega_i \cup \tilde{L}_k \cup \Omega_j$ $(\subset \overline{\Omega}_i \cup \overline{\Omega}_j \subset W_s)$ oblast, byl by bod z vnitřním bodem množiny W_s — spor. Tedy $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i < s$, odkud podle lemmatu 11 plyne, že $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, takže podle (58) je $\varphi_k \in \mathfrak{R}_s$.

Ad 2. Utvořme indikatrix křivky φ v bodě z; kdyby všechna G^j byla obsažena ve W_s, bylo by (vzhledem k uzavřenosti množiny W_s) $\operatorname{Int} \mu \subset \bigcup_{j=1}^{q} \overline{G}_j \subset W_s$ a bod z by ležel uvnitř W_s. Tedy existuje j tak, že G^j není obsaženo ve W_s (a je tedy disjunktní s W_s).

Protože $z \in H(W_s) \subset \bigcup H(\Omega_j)$, kde se sčítá přes všechna j, pro něž $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq s$, je $z \in H(\Omega_j)$ pro některé takové j; existují tedy G^i taková, že $G^i \subset \Omega_j \subset W_s$. Vhodným očíslováním lze dosáhnout toho, že

$$G^q \subset W_s\,, \quad G^1 \cap W_s = \emptyset\,;$$

potom však $\Omega^q \subset W_s$, $\Omega^1 \cap W_s = \emptyset$, takže podle lemmatu 11 nutně $\operatorname{ind}_\varphi \Omega^q = s$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega^1 = s - 1$. Z toho pak plyne, že $\varphi^1 \in \mathfrak{R}_s$; protože ovšem $z \in L^1$, je tím lemma dokázáno.

Lemma 18. *Pro každé $s > 0$ je*

(62) $H(W_s) = \bigcup L_k$, *kde se sčítá přes všechna k, pro něž je $\tilde{L}_k \cap H(W_s) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Jde jen o to, že pro každé k je buď $L_k \subset H(W_s)$ nebo $\tilde{L}_k \cap H(W_s) = \emptyset$; to je však patrné z lemmatu 17.

Lemma 19. *Pro každé $s > 0$ je*

$$W_s = \overline{W_s^0}\,, \quad H(W_s) = H(W_s^0)\,. \tag{63}$$ [8])

Důkaz. Pro každou uzavřenou množinu M je $\overline{M^0} \subset M$; abychom dokázali první ze vztahů (63), stačí tedy ještě ukázat, že $W_s \subset \overline{W_s^0}$. Je-li však $z \in W_s = \bigcup \overline{\Omega}_j$, protíná každé okolí $U(z)$ bodu z některé $\Omega_j \subset W_s^0$, takže $z \in \overline{W_s^0}$.

Odtud plyne dále, že

$$H(W_s) = W_s - W_s^0 = \overline{W_s^0} - W_s^0 = H(W_s^0)\,.$$

Lemma 20. *Jsou-li K_1, K_2 dvě různé komponenty některého W_s^0 $(s > 0)$, je*

$$H(K_1) \cap H(K_2) \subset \varphi(T)\,. \tag{64}$$

Důkaz. Kdyby existoval bod $z \in H(K_1) \cap H(K_2) - \varphi(T)$, bylo by (vzhledem ke vztahu $H(K_1) \cup H(K_2) \subset H(W_s^0)$ a vzhledem k lemmatům 16 a 17) $z \in \tilde{L}_k$ pro jisté k, pro něž $\varphi_k \in \mathfrak{R}_s$. Existovaly by tedy Ω_i a Ω_j tak, že $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, přičemž

[8]) M^0 je vnitřek množiny M.

$\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s$. Protože $z \in H(K_1) \cap H(K_2)$ a $\Omega_i \cap W_s = \emptyset$, bylo by nutně $K_1 \cap \Omega_j \neq \emptyset \neq K_2 \cap \Omega_j$, tedy $\Omega_j \subset K_1 \cap K_2$, a komponenty K_1, K_2 množiny W_s^0 by nebyly různé.

Lemma 21. *Je-li* $0 < r < s$, *je* $W_s \subset W_r^0 \cup \varphi(T)$.

Důkaz. Protože $W_r \supset W_s$, je $W_r^0 \supset W_s^0$; zbývá tedy dokázat, že každé $z \in H(W_s) - \varphi(T)$ patří do W_r^0. Každé takové z je však podle lemmatu 17 prvkem některého $\tilde{L}_k$, kde $\varphi_k \in \mathfrak{R}_s$. Odtud plyne, že $z \in H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1 \geqq r$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s > r$; podle lemmatu 14 je $\Omega_i \cup \tilde{L}_k \cup \Omega_j$ oblast; protože tato oblast obsahuje bod z a je obsažena v $\overline{\Omega}_i \cup \overline{\Omega}_j$, tedy i ve W_r, je $z \in W_r^0$.

Lemma 22. *Je-li* $0 < r \leqq s$ *a je-li* K_1 *resp.* K_2 *komponentou množiny* W_r^0 *resp.* W_s^0, *je buď* $K_1 = K_2$ *nebo* $H(K_1) \cap H(K_2) \subset \varphi(T)$.

Důkaz. Je-li $r = s$, je tvrzení obsahem lemmatu 20. Je-li $r < s$, je $H(K_2) \subset \overline{K}_2 \subset W_s \subset W_r^0 \cup \varphi(T)$ (viz lemma 21) a ovšem $H(K_1) \subset H(W_r^0)$. Odtud plyne, že $H(K_1) \cap H(K_2) \subset (W_r^0 \cup \varphi(T)) \cap H(W_r^0) \subset \varphi(T)$.

Lemma 23. *Pro každou komponentu* K *množiny* W_s^0 $(s > 0)$ *je*

$$H(K) = \bigcup L_k, \text{ kde se sčítá přes všechna } k, \text{ pro něž } \tilde{L}_k \cap H(K) \neq \emptyset . \tag{65}$$

Důkaz. Je

$$H(W_s) = H(W_s^0) = \bigcup H(K), \text{ kde se sčítá přes všechny komponenty } K \text{ množiny } W_s^0 . \tag{66}$$

Podle lemmatu 18 je $H(W_s)$ sjednocením všech L_k, pro něž je $\tilde{L}_k \cap H(W_s) \neq \emptyset$. Kdyby pro některé takové k bylo $\tilde{L}_k \cap H(K) \neq \emptyset \neq \tilde{L}_k \cap H(K^*)$, kde $K^* \neq K$ je také komponentou množiny W_s^0, existoval by – jak snadno nahlédneme – bod $z \in \tilde{L}_k \cap H(K) \cap H(K^*)$, což je ve sporu s lemmatem 20. Odtud plyne platnost implikace

$$\tilde{L}_k \cap H(K) \neq \emptyset \Rightarrow L_k \subset H(K) .$$

Z ní a z (66) plyne snadno tvrzení lemmatu.

Lemma 24. *Množina* W_s^0 *má (pro každé* $s > 0$*) jen konečně mnoho komponent.*

Důkaz. Vzhledem k (62) a (66) má W_s^0 nejvýše tolik komponent, kolik množin L_k obsahuje hranice W_s^0.

Lemma 25. *Buď* K *komponentou množiny* W_s^0 *(kde* $s > 0$*) a nechť* $\psi = \varphi_{i_1} \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{i_n}$ $(n \geqq 1)$ *je Jordanova křivka, pro niž je* $[\psi] \subset H(K)$. *Pak je* ψ *kladně (záporně) orientována právě tehdy, když* $K \subset \operatorname{Int} \psi$ $(K \subset \operatorname{Ext} \psi)$.

Důkaz. Protože K je oblast a $[\psi] \subset H(K)$, je $K \cap [\psi] = \emptyset$. Podle (61), (65) a (66) je každé φ_{i_m} $(1 \leqq m \leqq n)$ prvkem $\mathfrak{R}_s$, je tedy např. $L_{i_1} = [\varphi_{i_1}] \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s$; takže oblast Ω_j leží vlevo od φ_{i_1} (a v množině K). K dokončení důkazu stačí již pouze užít lemmatu 12.

8. Nechť bod $z \in \varphi(T)$ leží na hranici některé komponenty K některé z množin W_s^0 $(s > 0)$. Utvořme podle odst. 6 indikatrix křivky φ v bodě z. Protože $z \in H(K)$, existuje aspoň jeden index i tak, že $G^i \subset K$ (takže i $\Omega^i \subset K$); zároveň však existuje aspoň jeden index i tak, že $G^i \not\subset K$ (takže $G^i \cap K = \emptyset$ a také $\Omega^i \cap K = \emptyset$), neboť v opačném případě by bylo (jak snadno nahlédneme) $z \in K$. Odtud plyne dále, že existuje aspoň jeden index i, pro který $\Omega^i \cap K = \emptyset$, $\Omega^{i-1} \subset K$. Z této podmínky dostáváme (podle lemmatu 11) vztah

$$\operatorname{ind}_\varphi \Omega^i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega^{i-1} = (s-1) - s = -1\,,$$

takže podle důsledku lemmatu 15 je $z =$ k. b. $\varphi^i =$ k. b. λ^i.

Buď k libovolný index, pro nějž $z =$ k. b. φ_k, $L_k \subset H(K)$; protože v dalším záleží pouze na tom, že q-tice oblouků $\{\Lambda^1, \ldots, \Lambda^q\}$ je přirozeně uspořádána, a nikoliv na tom, který z oblouků jsme označili Λ^1, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že $\varphi_k = \varphi^1$. Je pak $\Omega^1 \cap K = \emptyset$, $\Omega^q\,(= \Omega^0) \subset K$.

Buď j nejmenší kladný index, pro který $\Omega^j \subset K$; je tedy $j > 1$ a $(\Omega^1 \cup \ldots \cup \Omega^{j-1}) \cap$ $\cap\, K = \emptyset$. Vzhledem k tomu je

$$\operatorname{ind}_\varphi \Omega^j - \operatorname{ind}_\varphi \Omega^{j-1} = s - (s-1) = 1\,,$$

takže (podle důsledku lemmatu 15) je $z =$ p. b. φ^j (a ovšem $L^j \subset H(K)$).

Definice. Za popsané situace nazveme φ^j *křivkou K-sousední ke křivce* $\varphi^1 = \varphi_k$.

Poznámka 8. Ke křivce φ^j, která je K-sousední k φ^1, můžeme dojít také takto: Křivka μ je podle toho, co jsme předpokládali v odst. 6, definována v $\langle 0, 2\pi \rangle$ a p.b. $\mu = z_0$; protože pro všechna dost malá $\Delta > 0$ je $\mu((0, \Delta)) \subset \Omega^1 \subset S - \overline{K}$, existuje maximální interval tvaru $(0, t^*)$, pro který je $\mu((0, t^*)) \subset S - \overline{K}$. Je pak $\mu(t^*) \in H(K)$ a $\mu(t^*)$ je některým z bodů z^j; příslušná křivka φ^j je K-sousední k φ^1.

Nepředpokládejme nyní, že $\varphi_k = \varphi^1$; nechť pouze $z =$ k. b. φ_k, $L_k \subset H(K)$. Křivku K-sousední k φ_k najdeme takto: Je-li $\varphi_k = \varphi^i$ a je-li $\tilde{\mu}$ maximální úsek křivky μ, mající počáteční bod z^i, pro který je $(\tilde{\mu}) \cap \overline{K} = \emptyset$, je koncovým bodem $\tilde{\mu}$ některý z bodů z^j; příslušná křivka φ^j je K-sousední k φ_k.

Je patrné, že křivka φ^j, K-sousední k φ_k, je určena jednoznačně a že k. b. $\varphi_k =$ $=$ p. b. φ^j.

Poznámka 9. Je-li $z =$ k. b. φ^1, $L^1 \subset H(K)$, existují zřejmě indexy

$$(67) \qquad 1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{2r-1} < i_{2r} < i_{2r+1} = q + 1 \quad (r \geqq 1)$$

tak, že pro $m = 1, \ldots, r$ je

$$(68) \qquad \Omega^i \cap K = \emptyset\,, \quad \text{je-li} \quad i_{2m-1} \leqq i < i_{2m}\,,$$

$$(69) \qquad \Omega^i \subset K\,, \quad \text{je-li} \quad i_{2m} \leqq i < i_{2m+1}\,.$$

Analogicky jako nahoře ukážeme, že $z =$ k. b. $\varphi^{i_{2m-1}} =$ p. b. $\varphi^{i_{2m}}$; křivka $\varphi^{i_{2m}}$ je přitom K-sousední ke křivce $\varphi^{i_{2m-1}}$. Odtud plyne dále, že je-li z koncovým bodem křivek $\varphi_k \neq \varphi_l$, pro něž $L_k \cup L_l \subset H(K)$, jsou i křivky K-sousední k těmto křivkám od sebe různé.

9. Přejdeme nyní konečně k vlastnímu důkazu věty vyslovené v odst. 4. Především provedeme „rozklad" hranic komponent jednotlivých množin W_s^0 na Jordanovy křivky, z nichž žádné dvě se neprotínají podstatně.

Buď tedy K některá z komponent množiny W_s^0 (kde $s > 0$); množinu $\mathfrak{M}(K)$ (definice viz (56)) rozložíme na disjunktní (neprázdné) množiny $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$, z nichž každou cyklicky uspořádáme, a to takto:

Zvolme libovolnou křivku z $\mathfrak{M}(K)$ a označme ji φ_1^1; jak víme, je to buď Jordanova nebo prostá křivka. Postupujeme indukcí: Nechť jsou již vybrány křivky $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_i^1$ $(i \geqq 1)$ z $\mathfrak{M}(K)$, přičemž pro každé $j \leqq i - 1$ je φ_{j+1}^1 křivkou K-sousední k φ_j^1 a $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1$ je buď Jordanova nebo prostá křivka.

Je-li $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1$ Jordanova křivka, další křivku již nevybíráme a položíme $i = p_1$. Je-li $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1$ prostá křivka, definujeme φ_{i+1}^1 jako křivku K-sousední k φ_i^1. Dokážeme, že (ve druhém případě) je $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1 \dotplus \varphi_{i+1}^1$ opět buď Jordanova nebo prostá křivka.

Nechť tomu tak není; pak – vzhledem k tomu, že křivka $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1$ byla prostá – existuje (právě jedno) j tak, že $1 \leqq j \leqq i$ a že k. b. $\varphi_{i+1}^1 =$ p. b. φ_{j+1}^1. Křivka

$$\psi = \varphi_{j+1}^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{i+1}^1 \tag{70}$$

je Jordanova; přitom $[\psi] \subset H(K)$, takže buď $K \subset \operatorname{Int} \psi$ nebo $K \subset \operatorname{Ext} \psi$. Vyšetříme např. první případ; druhý je zcela analogický.

Buď tedy $K \subset \operatorname{Int} \psi$, takže podle lemmatu 25 je ψ kladně orientována. Protože $L_j^1 = [\varphi_j^1] \subset H(K)$, je nutně $\tilde{L}_j^1 = (\varphi_j^1) \subset \operatorname{Int} \psi$. Sestrojme indikatrix křivky φ v bodě $z =$ k. b. $\varphi_j^1 =$ p. b. $\varphi_{j+1}^1 =$ k. b. φ_{i+1}^1; užívejme jako obvykle označení z odst. 6 (srv. též s obr. 3). Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $\varphi_j^1 = \varphi^1$; buďte ještě j_1, j_2 takové indexy, že $\varphi_{i+1}^1 = \varphi^{j_1}$, $\varphi_{j+1}^1 = \varphi^{j_2}$.

Množina $\operatorname{Int} \mu - (L^1 \cup L^{j_1} \cup L^{j_2})$ se skládá ze tří disjunktních Jordanových oblastí; tu z nich, na jejíž hranici leží $\Lambda^{j_1} \cup \Lambda^{j_2}$, označme G. Buď ϱ_1 úsek μ mezi body z^{j_2} a z^{j_1}, ϱ_2 úsek k němu komplementární; podobně buď σ_1 úsek ψ mezi body z^{j_2} a z^{j_1}, σ_2 úsek k němu komplementární. Pak je $(\sigma_2) \subset \operatorname{Int} \mu$, protože $\sigma_2 = \lambda^{j_1} \dotplus \lambda^{j_2}$; odtud plyne podle lemmatu 2, že $(\varrho_1) \subset \operatorname{Int} \psi$, takže $(\varrho_2) \subset \operatorname{Ext} \psi$. Kdyby $j_1 > j_2$, obsahovala by množina (ϱ_2) bod $z^1 \in \tilde{L}_1 \subset \operatorname{Int} \psi$, což není možné; tedy $j_1 < j_2$.

Podle poznámky 8 – vzhledem k tomu, že $\varphi_{j+1}^1 = \varphi^{j_2}$ je K-sousední ke křivce $\varphi_j^1 = \varphi^1$ – je množina $\mu((0, \delta^{j_2}))$ disjunktní s $\overline{K}$, což není možné, neboť $z^{j_1} = \mu(\delta^{j_1}) \in$ $\in H(K) \cap \mu((0, \delta^{j_2}))$.

Tím je dokázáno, že $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1 \dotplus \varphi_{i+1}^1$ je buď Jordanova nebo prostá křivka.

Naše konstrukce tedy nutně skončí po konečném počtu kroků (neboť $\mathfrak{M}(K)$ obsahuje jen konečně mnoho křivek a při konstrukci je vždy φ_{i+1}^1 různé od všech předcházejících křivek $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_i^1$); křivka

$$\chi^1 = \varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{p_1}^1\,, \tag{71}$$

kterou konstrukcí dostaneme, je nutně Jordanova (jinak by konstrukce mohla pokračovat). Množina $\mathfrak{M}^1(K)$ nechť se skládá z křivek $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_{p_1}^1$, uspořádaných v napsaném pořadí, přičemž za $\varphi_{p_1}^1$ následuje opět φ_1^1.

V dalším budeme potřebovat, že

(72) *křivka* φ_1^1 *je K-sousední ke křivce* $\varphi_{p_1}^1$.

Důkaz (72). Buď křivka χ^1 např. kladně orientována, takže podle lemmatu 25 je $K \subset \operatorname{Int} \chi^1$ (pro případ, že χ^1 je orientována záporně, je důkaz zcela analogický). Utvořme indikatrix křivky φ v bodě $z =$ p. b. $\varphi_1^1 =$ k. b. $\varphi_{p_1}^1$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $\varphi_{p_1}^1 = \varphi^1$; nechť ještě $\varphi_1^1 = \varphi^i$. Je-li ϱ_1 úsek μ od bodu z^i do bodu z^1, ϱ_2 úsek k němu komplementární, je podle lemmatu 2 nutně $(\varrho_1) \subset \operatorname{Int} \chi^1$, takže $(\varrho_2) \subset \operatorname{Ext} \chi^1$, tedy $(\varrho_2) \cap K = \emptyset$. Odtud plyne (srv. s pozn. 8), že křivka $\varphi_1^1 = \varphi^i$ je K-sousední ke křivce $\varphi_{p_1}^1 = \varphi^1$.

Poznámka 10. Ze (72) plyne, že kdybychom konstrukci množiny $\mathfrak{M}^1(K)$ začali od kterékoliv křivky φ_i^1 $(1 \leqq i \leqq p_1)$ místo od křivky φ_1^1, dostali bychom touž množinu (s týmž uspořádáním). Jinými slovy: množina $\mathfrak{M}^1(K)$ je (i se svým cyklickým uspořádáním) určena kterýmkoli svým prvkem jednoznačně.

Pokračujme nyní v rozkladu množiny $\mathfrak{M}(K)$ na Jordanovy křivky: Je-li $\mathfrak{M}^1(K) \neq \mathfrak{M}(K)$, zvolme libovolnou křivku z $\mathfrak{M}(K) - \mathfrak{M}^1(K)$ a označme ji φ_1^2; stejně jako jsme sestrojili (cyklicky uspořádanou) množinu $\mathfrak{M}^1(K)$ pomocí křivky φ_1^1, sestrojme množinu $\mathfrak{M}^2(K)$ pomocí křivky φ_1^2. Tak pokračujme až do vyčerpání celé množiny $\mathfrak{M}(K)$.

Tím dostaneme množiny $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^k(K)$ $(r \geqq 1)$, které jsou podle poznámky 10 disjunktní; jejich sjednocením je množina $\mathfrak{M}(K)$. Každá z množin $\mathfrak{M}^k(K)$ je cyklicky uspořádána a jsou-li $\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{p_k}^k$ všechny její prvky (uspořádané v napsaném pořadí, přičemž za $\varphi_{p_k}^k$ následuje opět φ_1^k), je

$$\chi^k = \varphi_1^k \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{p_k}^k$$

Jordanova křivka. Křivka φ_{j+1}^k je vždy (tj. pro $j = 1, \ldots, p_k - 1$) K-sousední ke křivce φ_j^k, křivka φ_1^k je K-sousední ke křivce $\varphi_{p_k}^k$ (srv. se (72)).

10. Systém všech křivek $\chi^1, \ldots, \chi^r$, které jsme (pro určitou komponentu K určité množiny W_s^0) sestrojili v předcházejícím odstavci, označme $J(K)$. J^+ nechť je sjednocením všech $J(K)$ (přes všechny komponenty K všech množin W_s^0, kde $s > 0$).

Dokážeme, že platí:

Lemma 26. *Žádné dvě křivky χ_1, χ_2 z J^+ se neprotínají podstatně.*

Důkaz. Buď $\chi_1 \in J(K_1)$, $\chi_2 \in J(K_2)$, kde K_1 resp. K_2 je komponentou množiny W_r^0 resp. W_s^0; nechť přitom $0 < r \leqq s$. Označme K_2' komponentu množiny $W_r^0 \supset W_s^0$ obsahující množinu K_2. Protože K_2' je souvislá množina, neprotínající množinu $[\chi_1] \subset H(K_1) \subset H(W_r^0)$, je buď $K_2' \subset \operatorname{Int} \chi_1$ nebo $K_2' \subset \operatorname{Ext} \chi_1$. V prvním případě tedy $K_2' \cap \operatorname{Ext} \chi_1 = \emptyset$, odkud vzhledem k inklusím $[\chi_2] \subset H(K_2) \subset \overline{K}_2 \subset \overline{K}_2'$ plyne, že tím spíše $[\chi_2] \cap \operatorname{Ext} \chi_1 = \emptyset$; ve druhém případě dokážeme obdobně, že $[\chi_2] \cap \operatorname{Int} \chi_1 = \emptyset$. V žádném z obou případů se tedy křivky χ_1, χ_2 neprotínají podstatně.

11. Na začátku předcházejícího odstavce jsme definovali systém Jordanových křivek $J(K)$ pro každou komponentu K každé množiny W_s^0, kde $s > 0$; množiny W_s máme definovány zatím jen pro $s > 0$. Pišme na chvíli podrobněji: $W_s = W_s(\varphi)$, $J(K) = J(K, \varphi)$, $J^+ = J^+(\varphi)$. Buď všude v dalším $s > 0$.

Definujme:

$$W_{-s} = W_{-s}(\varphi) = W_s(\dot{-}\varphi)\,; \tag{73}$$

je-li K komponentou množiny $W_{-s}(\varphi)$, buď

$$J(K) = J(K; \varphi) = \{\dot{-}\chi; \chi \in J(K; \dot{-}\varphi)\}\,, \tag{74'}$$

$$J^- = J^-(\varphi) = \{\dot{-}\chi; \chi \in J^+(\dot{-}\varphi)\}\,. \tag{74''}$$

Položme konečně

$$J = J^+ \cup J^-\,. \tag{75}$$

Protože $\operatorname{ind}_{\dot{-}\varphi} = -\operatorname{ind}_\varphi$, je podle (59)

$$W_{-s} = \bigcup \overline{\Omega}_j, \text{ kde se sčítá přes všechna } j, \text{ pro něž je } \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \leqq -s\,. \tag{76}$$

Z lemmatu (17) a z (58) vyplývá, že $H(W_{-s}) = \bigcup L_k$, kde se sčítá přes všechna k, pro něž $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$, kde $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = -(s-1)$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = -s$; tedy

$$H(W_{-s}) = \bigcup L_k, \text{ kde se sčítá přes všechna } k, \text{ pro něž } \varphi_k \in \mathfrak{R}_{-s+1}\,. \tag{77}$$

Budeme potřebovat ještě dvě tvrzení:

Lemma 27. *Je-li $r < 0 < s$, je $W_r \cap W_s \subset \varphi(T)$, $W_r^0 \cap W_s^0 = \emptyset$.*

Důkaz. Je-li $\overline{\Omega}_i \subset W_r$, $\overline{\Omega}_j \subset W_s$, je $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i \leqq -1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq 1$, takže $\Omega_i \neq \Omega_j$ a

$$\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_i \geqq 2\,. \tag{78}$$

Protože komponenty množiny $S - [\varphi]$ tvoří systém vzájemně disjunktních (tedy oddělených) oblastí, je $\overline{\Omega}_i \cap \Omega_j \doteq \emptyset = \Omega_i \cap \overline{\Omega}_j$.

Je-li tedy $z \in W_r \cap W_s$, je vzhledem k (59) a (76) nutně $z \in H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$ pro vhodná i, j, přičemž $\overline{\Omega}_i \subset W_r$, $\overline{\Omega}_j \subset W_s$. Kdyby bylo $z \notin \varphi(T)$, leželo by z na jakémsi $\tilde{L}_k$, a podle lemmatu 13 by bylo $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$; podle lemmatu 11 by bylo $|\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_i| = 1$, což je ve sporu se (78). Tím je první z vyslovených tvrzení dokázáno.

Protože $\varphi(T)$ je konečná množina (takže $(\varphi(T))^0 = \emptyset$) a protože $W_r^0 \cap W_s^0 \subset (W_r \cap W_s)^0 \subset (\varphi(T))^0$, je lemma dokázáno.

Lemma 28. *Žádné dvě křivky $\chi_1, \chi_2 \in J$ se neprotínají podstatně.*

Důkaz. Jsou-li $\chi_1, \chi_2 \in J^+$, je tvrzení obsahem lemmatu 26; jsou-li $\chi_1, \chi_2 \in J^-$, jde o analogické tvrzení pro křivku $\dot{-}\varphi$. Zbývá případ, že např. $\chi_1 \in J^+$, $\chi_2 \in J^-$, takže $\chi_1 \in J(K_1)$, $\chi_2 \in J(K_2)$, kde K_1 resp. K_2 je komponentou jistého W_s^0 resp. W_r^0, kde $s > 0 > r$.

Protože podle lemmatu 19 je $[\chi_1] \subset H(K_1) \subset \overline{K}_1 \subset \overline{W_s^0} = W_s$ a protože podle lemmatu 27 jsou množiny W_r^0, W_s^0 oddělené, je $W_s \cap W_r^0 = \emptyset$, takže tím spíše $K_2 \cap \cap [\chi_1] = \emptyset$. Souvislá množina K_2 tedy leží buď celá v Int χ_1 nebo v Ext χ_1. Z toho snadno plyne (viz analogickou situaci v důkazu lemmatu 26), že křivky χ_1, χ_2 se neprotínají podstatně.

Nyní již konečně můžeme *dokázat větu vyslovenou v odst. 4*; systém J z tvrzení této věty buď definován jako v tomto odstavci (vztahem (74)). Dokažme, že tento systém J má vlastnosti 1) – 3), žádané ve větě:

Vlastnost 1) systému J plyne z toho, jak jsme definovali křivky systémů $J(K)$ pro jednotlivé komponenty K množin W_s^0. Je-li $s > 0$ – viz odst. 9; je-li $s < 0$, jsou křivky systému $J(K)$ tvaru $\dot{-}\chi$, kde $\chi \in J(K; \dot{-}\varphi)$. Protože přitom $\dot{-}\varphi = \dot{-}\varphi_N \dot{-} \varphi_{N-1} \dot{-} \dot{-} \ldots \dot{-} \varphi_1$, má každá křivka $\chi \in J(K; \dot{-}\varphi)$ tvar $\chi = \dot{-}\varphi_{i_1} \dot{-} \ldots \dot{-} \varphi_{i_n}$, takže $\dot{-}\chi = \varphi_{i_n} \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_{i_1}$.

Vlastnost 2) dokážeme takto: Podle lemmatu 11 patří každé φ_k právě do jednoho systému $\mathfrak{R}_p$, takže příslušné L_k leží na hranici právě jedné z množin W_s^0 (viz lemma 17 a (77)). Protože $H(W_s^0) = \bigcup H(K)$, kde se sčítá přes všechny komponenty množiny W_s^0 a protože součet vpravo je disjunktní, leží L_k na hranici právě jedné komponenty K (viz k tomu lemma 23). Z toho, jak jsme v odst. 9 rozložili množinu $\mathfrak{M}(K)$ na disjunktní množiny $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$ a jak jsme pomocí těchto $\mathfrak{M}^r(K)$ (a cyklického uspořádání v nich) utvořili křivky χ^k, plyne ihned vlastnost 2).

Vlastnost 3) je obsahem lemmatu 28.

Poznámka 11. Důkaz hlavního tvrzení této práce by bylo možné provést ještě jinak. Stačilo by je dokázat po elementární křivky φ, které jsou po částech lineární (čímž by se značně zjednodušil topologický aparát, který jsme potřebovali k zavedení indikatrix křivky φ v bodě $z \in \varphi(T)$ a k odvození jejích vlastností) a pak užít věty (viz [1]):

Pro každou elementární křivku φ existuje (kladné) homeomorfní zobrazení h roviny S na S, při němž je $h * \varphi$ po částech lineární křivka.

Vzhledem k topologickému charakteru věty by tím tvrzení vyslovené v odst. 4 bylo dokázáno pro obecnou elementární křivku.

Tento postup je ovšem jen zdánlivě kratší, neboť právě vyslovené tvrzení není ani zdaleka jednoduché. Kromě toho při něm ztrácíme návod k efektivnímu sestrojení křivek $\chi \in J$. Zůstal by sice předpis k efektivnímu sestrojení systému J pro křivku φ po částech lineární, ale vzhledem k tomu, že homeomorfní zobrazení h není efektivně známo, nedalo by nám to nic pro obecný případ.

Literatura

[1] *I. Černý:* O existenci homeomorfního zobrazení Gaussovy roviny na sebe, převádějícím danou elementární křivku na křivku po částech lineární (vyjde v Čas. pro pěst. mat.).

[2] *K. Kuratowski:* Topologie II, Warszawa 1952.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КРИВОЙ НА КРИВЫЕ ЖОРДАНА

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага

Кривой мы называем каждое непрерывное отображение компактного интервала, содержащегося в E_1, в открытую плоскость Гаусса E. Замкнутую плоскость Гаусса мы обозначим через S. Если ψ — кривая, определенная в $\langle\alpha, \beta\rangle$, то точку $\varphi(\alpha)$ мы будем называть *начальной точкой* кривой φ (н. т. φ), точку же $\varphi(\beta)$ — *концевой точкой* этой кривой (к. т. φ): *крайней точкой* кровой φ назовем начальную или концевую точку кривой φ. Далее обозначим $[\varphi] = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$, $(\varphi) = \varphi((\alpha, \beta))$; $\dot{-}\varphi$ будет кривая, определенная в $\langle -\beta, -\alpha\rangle$ условием $(\dot{-}\varphi)(t) = \varphi(-t)$.

Если φ, соотв. ψ — кривая, определенная в $\langle\alpha, \beta\rangle$, соотв. в $\langle\gamma, \delta\rangle$, причем $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$, то $\varphi \dotplus \psi$ означает кривую ω, определенную в $\langle\alpha, \beta + \delta - \gamma\rangle$ следующим образом:

$$\omega(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{для } t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,, \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{для } t \in \langle\beta, \beta + \delta - \gamma\rangle. \end{cases}$$

(Аналогично определяется $\varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$.)

Если $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$, то мы назовем каждую из кривых φ_j *частью* φ.

Если $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, мы говорим, что φ *замкнута*. Если φ замкнута и если частичные отображения $\varphi|\langle\alpha, \beta)$ и $\varphi|(\alpha, \beta\rangle$ взаимно однозначны, то мы говорим, что φ является *кривой Жордана. Индекс точки z относительно замкнутой кривой* φ определяется (для $z \in S - [\varphi]$) обычным образом (обозначение: $\operatorname{ind}_\varphi z$). Если M — связная часть множества $S - [\varphi]$, то $\operatorname{ind}_\varphi$ будет постоянным в M; его значение на M мы обозначим через $\operatorname{ind}_\varphi M$.

Для каждой кривой Жордана φ по теореме Жордана имеет место $S - [\varphi] = \operatorname{Int}\varphi \cap \operatorname{Ext}\varphi$, где $\operatorname{Int}\varphi$, $\operatorname{Ext}\varphi$ суть дизъюнктные области, общей границей которых является $[\varphi]$. Притом $\operatorname{ind}_\varphi(\operatorname{Ext}\varphi) = 0, \operatorname{ind}_\varphi(\operatorname{Int}\varphi) = \pm 1$ (в зависимости от положительной или отрицательной ориентации φ).

Мы говорим, что две кривые Жордана φ и ψ *пересекаются существенно*, если $\operatorname{Int}\varphi \cap \operatorname{Int}\psi \neq \emptyset \neq \operatorname{Ext}\varphi \cap \operatorname{Int}\psi$ (что равносильно условию $\operatorname{Int}\varphi \cap \operatorname{Int}\psi \neq \emptyset \neq \operatorname{Int}\varphi \cap \operatorname{Ext}\psi$).

Пусть φ — замкнутая кривая, определенная в $\langle\alpha, \beta\rangle$; обозначим $T = \{t \in \langle\alpha, \beta\rangle$; существует $t' \neq t$, $t' \in \langle\alpha, \beta\rangle$, для которого $\varphi(t') = \varphi(t)\}$. Если T — конечное множество, назовем φ *элементарной* кривой. Если в этом случае $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$ являются как раз всеми точками множества T, то каждая из кривых $\varphi_k = \varphi|\langle t_{k-1}, t_k\rangle$ будет или простой или кривой Жордана.

Главным утверждением статьи является следующая теорема: *При использовании только что введенных для кривой φ обозначений существует система J кривых Жордана для которой справедливо:*

1. *Каждая из кривых $\chi \in J$ имеет вид $\chi = \varphi_{i_1} \dotplus \dots \dotplus \varphi_{i_n}$ (где $n \geqq 1$, $i \leqq i_k \leqq$ $\leqq N$).*
2. *Каждое φ_k является частью одной и только одной из кривых $\chi \in J$.*
3. *Никакие две кривые $\chi_1, \chi_2 \in J$ не пересекаются существенно.*

Если не требовать выполнения свойства 3 системы J, то утверждение весьма нетрудно доказать (индукцией по числу элементов множества T). В статье система J (для каждой элементарной кривой φ) эффективно построена. Для описания хода построения необходимо ввести еще несколько понятий.

Пусть M — *топологическая окружность* (т. е. гомеоморфный образ окружности), пусть $\{z_1, \dots, z_q\}$ — упорядоченнае множество q точек из M. Мы будем говорить, что это множество *естественно упорядочено* на M, если существует положительно ориентированная кривая Жордана μ (определенная в некотором интервале $\langle \alpha, \beta \rangle$) так, что $[\mu] = M$, $z_j = \mu(\delta_j)$, $\delta_1 < \dots < \delta_q$.

Пусть ω_j $(j = 1, \dots, q)$ — простые кривые, определенные в $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$, для которых $\omega_j(\alpha_j) = z$ для всех j, причем множества $\omega_j((\alpha_j, \beta_j\rangle)$ дизъюнктны. В статье доказывается (см. лемму 9), что для каждого $\varepsilon > 0$ существует положительно ориентированная кривая Жордана μ, определенная, напр., в $\langle 0, 2\pi \rangle$, так, что

1. $[\omega_j] \cap [\mu] = \{z_j\}$, где $z_j = \omega_j(\gamma_j)$, $\gamma_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, причем
2. $\omega_j(\langle \alpha_j, \gamma_j)) \subset \operatorname{Int} \mu$, $\omega_j((\gamma_j, \beta_j\rangle) \subset \operatorname{Ext} \mu$,
3. диаметр $[\mu]$ меньше ε,
4. $\mu(0) = \mu(2\pi) = z_q$.

При тех же ω_j, как указано выше, мы будем говорить, что множество q дуг $\{[\omega_1], \dots, [\omega_q]\}$ естественно упорядочено, если существует положительно ориентированная кривая Жордана μ со свойствами 1., 2. и 4. так, что q точек $\{z_1, \dots, z_q\}$ естественно упорядочено на μ. (В статье доказывается, что указанное в определении условия не зависит от выбора кривой μ с приведенными свойствами.

Пусть φ — данная элементарная кривая; воспользуемся введенными выше обозначениями. В каждом интервале $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ возьмем две какие-либо точки τ_{2k-1}, τ_{2k} так, чтобы $t_{k-1} < \tau_{2k-1} < \tau_{2k} < t_k$; обозначим $\lambda_{2k-1} = \varphi | \langle t_{k-1}, \tau_{2k-1} \rangle$, $\lambda_{2k} = \varphi | \langle \tau_{2k}, t_k \rangle$, $\Lambda_n = [\lambda_n]$ (для $n = 1, \dots, 2N$). Тогда λ_n будут простыми кривыми; каждые две из дуг Λ_n имеют не больше одной общей точки (и эта точка — крайняя точка соответственных кривых λ_n).

Пусть $z \in \varphi(T)$; пусть $\lambda_{n_i} = \lambda^i$ $(i = 1, \dots, q)$ — в точности все кривые λ_n, крайняя точка которых есть z. Напишем еще $\Lambda^i = [\lambda^i]$, $\lambda^0 \equiv \lambda^q$, $\Lambda^0 \equiv \Lambda^q$. Пусть областью определения кривой λ^i будет интервал $\langle \alpha^i, \beta^i \rangle$. Нумерацию проведем так, чтобы множество q дуг $\{\Lambda^1, \dots, \Lambda^q\}$ было естественно упорядоченым. (Нетрудно убедиться, что это всегда можно сделать.) Итак, если взять положительно ориентированную кривую Жордана μ, определенную в $\langle 0, 2\pi\rangle$, так, что

1. $[\mu] \cap \Lambda^i = \{z^i\}$,
2. $z^i = \lambda^i(\gamma^i)$, где $\gamma^i \in (\alpha^i, \beta^i)$, $\lambda^i(\langle\alpha^i, \gamma^i)) \subset \operatorname{Int}\mu$, $\lambda^i((\gamma^i, \beta^i\rangle) \subset \operatorname{Ext}\mu$,
3. $[\mu] \cap ([\varphi]) - \bigcup\limits_{i=1}^{q} \Lambda^i) = \emptyset$,
4. $z^i = \mu(\delta^i)$, где $\delta^q = 2\pi$,

то будет $\delta^1 < \ldots < \delta^q$.

Далее, имеет место (как нетрудно убедиться)

$$\operatorname{Int}\mu - [\varphi] = \operatorname{Int}\mu - \bigcup_{i=1}^{q} \Lambda^i = \bigcup_{i=1}^{q} G^i,$$

где G^i — дизъюнктные области, которые можно перенумеровать так, что $(\Lambda^{i-1} \cup \Lambda^i) \cap \operatorname{Int}\mu$ будет частью границы G^i для $i = 1, \ldots, q$. (Ср. с рис. 3.)

Определим теперь для каждого натурального числа s множество W_s как соединение всех множеств вида $\overline{\Omega}_j$, где Ω_j — компонента множества $S - [\varphi]$, для которых $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq s$. В статье доказывается (см. лемму 11), что каждое из множеств $L_k = [\varphi_k]$ является частью границы в точности двух компонент Ω_i, Ω_j множества $S - [\varphi]$, причем

$$|\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j| = 1\,.$$

Граница $H(W_s)$ множества W_s совпадает по лемме 19 с границей $H(W_s^0)$ множества внутренних точек W^0 множества W_s, а по лемме 17 это множество является соединением всех L_k, для которых существуют компоненты Ω_i, Ω_j множества $S - [\varphi]$ так, что $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$ и $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s$.

Граница $H(K)$ каждой компоненты K множества W_s^0 состоит (по лемме 23) в точности из всех L_k, для которых $(\varphi_k) \cap H(K) \neq \emptyset$.

Пусть K — некоторая компонента какого-либо множества W_s^0; пусть $[\varphi_k] \subset H(K)$ и пусть $z =$ к. т. φ_k. Без ограничения общности можно предположить, что нумерация кривых λ^i была проведена так, что λ^1 является частью φ_k. В статье показано (ср. п. 8), что тогда $G^q \subset K$ и что существует индекс j $(1 < j \leqq q)$, для которого

$$(G^1 \cap \ldots \cap G^{j-1}) \cap K = \emptyset\,, \quad G^j \subset K\,.$$

Кривую φ_l, частью которой является λ_j, мы назовем K-смежной к кривой φ_k; доказывается, что $z =$ н. т. φ_l и что $[\varphi_l] \subset H(K)$. Кривые K-смежные к двум различным кривым φ_j, φ_k, также отличаются друг от друга.

Пусть K — компонента одного из множеств W_s^0; пусть $\mathfrak{M}(K)$ — система всех кривых φ_k, для которых $[\varphi_k] \subset H(K)$. Разложим систему $\mathfrak{M}(K)$ на систему дизъюнктных (непустых) множеств $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$, а именно: Возьмем произвольно $\varphi_1^1 \in \mathfrak{M}(K)$; пусть уже построены кривые $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_i^1$ так, что φ_j^1

является K-смежной к φ^1_{j-1} и что $\varphi^1_1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi^1_i$ — или кривая Жордана или простая кривая. В первом случае положим $i = p_1$, во втором случае пусть φ^1_{i+1} будет K-смежной кривой к φ^1_i. Доказывается (ср. п. 9), что тогда $\varphi^1_1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi^1_i \dotplus \varphi^1_{i+1}$ будет снова жордановой или простой кривой. Итак, построение обязательно закончится после конечного числа шагов кривой $\varphi^i_{p_1}$. Пусть система $\mathfrak{M}^1(K)$ состоит из кривых $\varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_{p_1}$; положим $\chi^1 = \varphi^1_1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi^1_{p_1}$; тогда χ^1 — кривая Жордана. Кривая φ^1_1 является K-смежной к кривой $\varphi^1_{p_1}$; отсюда следует, что систему $\mathfrak{M}^1(K)$ мы получим указанным выше способом, исходя из любой кривой $\varphi_k \in \mathfrak{M}^1(K)$.

Если $\mathfrak{M}^1(K) \neq \mathfrak{M}(K)$, то возьмем произвольно $\varphi^2_1 \in \mathfrak{M}(K) - \mathfrak{M}^1(K)$ и аналогично построим $\mathfrak{M}^2(K)$ и кривую χ^2. Продолжаем так, пока все множество $\mathfrak{M}(K)$ не будет исчерпано. Мы получим разложение $\mathfrak{M}(K)$ на множества $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$; каждому множеству $\mathfrak{M}^j(K)$ поставлена в соответствие кривая Жордана χ^j. Обозначим систему всех этих χ^j ($j = 1, \ldots, r$) через $J(K; \varphi)$.

Пусть $J^+(\varphi)$ — соединение всех $J(K; \varphi)$, где суммирование производится по всем компонентам K всех множеств W_s^0 где $s = 1, 2, \ldots$ Обозначим символом $J^-(\varphi)$ систему всех кривых вида $\dot{-}\chi$, где $\chi \in J^+(\dot{-}\varphi)$. Тогда система $J = J^+(\varphi) \cup J^-(\varphi)$ имеет (как показано в статье) требуемые в теореме свойства.

Summary

DECOMPOSITION OF AN ELEMENTARY CURVE INTO JORDAN CURVES

Ilja Černý, Praha

By a *curve* we will understand a continuous mapping of a compact subinterval of E_1 into the open complex plane E. The closed complex plane will be denoted by S. If φ is a curve on $\langle \alpha, \beta \rangle$, then the point $\varphi(\alpha)$ will be called the *initial point* of φ (i. p. φ), and $\varphi(\beta)$ the *terminal point* of φ (t. p. φ); an *end point* of φ will mean the initial or terminal point of φ. Define $[\varphi] = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$, $(\varphi) = \varphi((\alpha, \beta))$; $\dot{-}\varphi$ is the curve defined on $\langle -\beta, -\alpha \rangle$ by $(\dot{-}\varphi)(t) = \varphi(-t)$.

If φ and ψ are curves defined on $\langle \alpha, \beta \rangle$ and $\langle \gamma, \delta \rangle$ respectively, and $\varphi(\beta) = \psi(\gamma)$, then $\varphi \dotplus \psi$ will denote the curve ω defined on $\langle \alpha, \beta + \delta - \gamma \rangle$ thus

$$\omega(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{for} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ \psi(t - \beta + \gamma) & \text{for} \quad t \in \langle \beta, \beta + \delta - \gamma \rangle. \end{cases}$$

(One defines $\varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$ analogously.) If $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_n$ then the φ_j will be called *parts of the curve* φ.

The curve φ is said to be *closed* if $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. If φ is closed and both the partial mappings $\varphi \mid \langle \alpha, \beta)$ and $\varphi \mid (\alpha, \beta \rangle$ are $1-1$, then φ is called a *Jordan curve. The* *index of a point z with respect to a closed curve* φ is defined, for $z \in S - [\varphi]$, in the usual manner (notation: $\text{ind}_\varphi z$). If M is a connected subset of $S - [\varphi]$, then ind_φ is constant in M; this constant will be denoted by $\text{ind}_\varphi M$.

By the Jordan curve theorem, for any Jordan curve φ there is $S - [\varphi] = \text{Int}\,\varphi \cup \cup \text{Ext}\,\varphi$ with $\text{Ext}\,\varphi$, $\text{Int}\,\varphi$ disjoint regions with a common boundary $[\varphi]$. Furthermore, $\text{ind}_\varphi \text{Ext}\,\varphi = 0$ and $\text{ind}_\varphi \text{Int}\,\varphi = \pm 1$ (depending on whether φ is positively or negatively oriented).

Two Jordan curves φ, ψ will be said *to intersect essentially* if $\text{Int}\,\varphi \cap \text{Int}\,\psi \neq \neq \emptyset \neq \text{Ext}\,\varphi \cap \text{Int}\,\psi$ (this is equivalent with $\text{Int}\,\varphi \cap \text{Int}\,\psi \neq \emptyset \neq \text{Int}\,\varphi \cap \text{Ext}\,\psi$).

Let φ be a closed curve defined on $\langle\alpha, \beta\rangle$, and set

$$T = \{t \in \langle\alpha, \beta\rangle;\ \varphi(t') = \varphi(t) \text{ for some } t' \neq t,\ t' \in \langle\alpha, \beta\rangle\}\,.$$

The curve φ will be called *elementary* if the set T is finite. In this case, if T consists of the points $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \beta$, then each of the curves $\varphi_k = \varphi \mid \langle t_{k-1}, t_k\rangle$ is a simple or a Jordan curve.

The main result of this paper is the following theorem: *With the above notation, to any elementary curve* φ *there exists a system* J *of Jordan curves such that*:

1. *Each* $\chi \in J$ *is of the form* $\chi = \varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_n}$ $(n \geq 1, 1 \leq i_k \leq N)$.
2. *Each* φ_k *is a part of precisely one curve* $\chi \in J$.
3. *No two curves* $\chi_1, \chi_2 \in J$ *intersect essentially.*

If the third property is not required, the theorem is proved very easily (e.g. by induction on the number of elements of the set T). In the paper, the system J, associated with any elementary curve φ, is constructed effectively. Some further notions are needed to describe this construction.

Let M be a *topological circle* (i.e. the homeomorphic image of a circle), and let $\{z_1, \ldots, z_q\}$ be an ordered q-tuple of points on M. The q-tuple will be said to be *naturally ordered on M* if there exists a positively oriented Jordan curve μ such that $[\mu] = M$, $z_j = \mu(\delta_j)$, $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_q$.

Let ω_j be simple curves defined on $\langle\alpha_j, \beta_j\rangle$ $(j = 1, \ldots, q)$ such that $\omega_j(\alpha_j) = z_j$ for all j, and that the sets $\omega_j((\alpha_j, \beta_j\rangle)$ are disjoint. It is shown (lemma 9) that to any $\varepsilon > 0$ there is a positively oriented Jordan curve μ, defined, say, on $\langle 0, 2\pi\rangle$ such that

1. $[\omega_j] \cap [\mu] = \{z_j\}$, where $z_j = \omega_j(\gamma_j)$, $\gamma_j \in (\alpha_j, \beta_j)$ and
2. $\omega_j(\langle\alpha_j, \gamma_j)) \subset \text{Int}\,\mu$, $\omega_j((\gamma_j, \beta_j\rangle) \subset \text{Ext}\,\mu$,
3. the diameter of $[\mu]$ is less than ε,
4. $\mu(0) = \mu(2\pi) = z_q$.

With the ω_j as above, we will say that the q-tuple of arcs $\{[\omega_1], \ldots, [\omega_q]\}$ is *naturally ordered* if there exists a positively oriented Jordan curve μ with properties 1, 2, 4 such that the q-tuple of points $\{z_1, \ldots, z_q\}$ is naturally ordered on μ. (It is shown that the property described in the definition is independent of the choise of the curve μ with the required properties.)

Let φ be a given elementary curve, and use the notation introduced above. In each interval $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ choose arbitrarily two points τ_{2k-1}, τ_{2k} such that $t_{k-1} < \tau_{2k-1} < < \tau_{2k} < t_k$; set

$$\lambda_{2k-1} = \varphi \mid \langle t_{k-1}, \tau_{2k-1} \rangle, \quad \lambda_{2k} = \varphi \mid \langle \tau_{2k}, t_k \rangle, \quad \Lambda_n = [\lambda_n]$$
$$(\text{for } n = 1, \ldots, 2N).$$

Then the λ_n are simple curves, and each two arcs Λ_n have at most one common point (an end point of the corresponding curves λ_n).

Take $z \in \varphi(T)$; let $\lambda_{n_i} = \lambda^i$ $(i = 1, \ldots, q)$ be all those curves λ_n which have z as end point. Set $\Lambda^i = [\lambda^i]$, $\lambda^0 \equiv \lambda^q$, $\Lambda^0 \equiv \Lambda^q$. Let the domain of definition of λ^i be $\langle \alpha^i, \beta^i \rangle$. Re-number the curves Λ^i in such a manner that the q-tuple of arcs $\{\Lambda^1, \ldots, \Lambda^q\}$ is naturally ordered (obviously this is always possible). Therefore, if μ is any positively oriented Jordan curve defined on $\langle 0, 2\pi \rangle$ and such that

1. $[\mu] \cap \Lambda^i = \{z^i\}$,
2. $z^i = \lambda^i(\gamma^i)$, where $\gamma^i \in (\alpha^i, \beta^i)$, $\lambda^i(\langle \alpha^i, \gamma^i)) \subset \operatorname{Int} \mu$, $\lambda^i((\gamma^i, \beta^i \rangle) \subset \operatorname{Ext} \mu$,
3. $[\mu] \cap ([\varphi] - \bigcup_{i=1}^{q} \Lambda^i) = \emptyset$,
4. $z^i = \mu(\delta^i)$, where $\delta^q = 2\pi$,

then $\delta^1 < \ldots < \delta^q$.

It is then obvious that

$$\operatorname{Int} \mu - [\varphi] = \operatorname{Int} \mu - \bigcup_{i=1}^{q} \Lambda^i = \bigcup_{i=1}^{q} G^i$$

where the G^i are disjoint regions, and whose indices may be chosen in such a manner that $(\Lambda^{i-1} \cup \Lambda^i) \cap \operatorname{Int} \mu$ is a subset of the boundary of G^i for $i = 1, \ldots, q$ (cf. fig. 3).

For every positive integer s, let W_s be the set-join of all $\overline{\Omega}_j$ such that Ω_j is a component of $S - [\varphi]$ with $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j \geqq s$. It is proved (lemma 11) that every $L_k = [\varphi_k]$ is a subset of the boundary of precisely two components Ω_i Ω_j of $S - [\varphi]$, whereupon

$$|\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i - \operatorname{ind}_\varphi \Omega_j| = 1 .$$

From lemma 19 the boundary $H(W_s)$ of W_s is also the boundary $H(W_s^0)$ of the interior W_s^0 of W_s; from lemma 17 it is also the set-joint of all L_k such that there exist components Ω_i Ω_j of $S - [\varphi]$ with $L_k \subset H(\Omega_i) \cap H(\Omega_j)$ and with $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_i = s - 1$, $\operatorname{ind}_\varphi \Omega_j = s$.

According to lemma 23 the boundary $H(K)$ of every component K of W_s^0 consists of all L_k with $(\varphi_k) \cap H(K) \neq \emptyset$.

Let K be any component of any W_s^0; let $[\varphi_k] \subset H(K)$ and $z = \text{t. p. } \varphi_k$. We may assume that λ^1 is a part of φ_k. It is shown (cf. section 8) that then $G^q \subset K$ and that there exists an index j $(1 < j \leqq q)$ such that

$$(G^1 \cup \ldots \cup G^{j-1}) \cap K = \emptyset \qquad G^j \subset K .$$

That curve φ_l of which λ^j is a part will be termed K-neighbouring to the curve φ_k. It is shown that $z = \text{i. p. } \varphi_l$ and that $[\varphi_l] \subset H(K)$. Curves K-neighbouring to distinct φ_j, φ_k are also distinct.

Let K be a component of some W_s^0; let $\mathfrak{M}(K)$ be the system of all φ_k with $[\varphi_k] \subset \subset H(K)$. This system $\mathfrak{M}(K)$ may be decomposed into disjoint non-empty sets $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$ as follows: Take any $\varphi_1^1 \in \mathfrak{M}(K)$. Assume there have already been constructed curves $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_i^1$ such that φ_j^1 is K-neighbouring to φ_{j-1}^1, and that $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_i^1$ is either a Jordan curve or a simple curve. In the former case set $i = p_1$, in the latter let φ_{i+1}^1 be a curve K-neighbouring to φ_i^1. It is then shown (section 9) that $\varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \dotplus \varphi_i^1 \dotplus \varphi_{i+1}^1$ is again a Jordan or simple curve. Necessarily, the construction terminates after a finite number p_1 of steps. Let $\mathfrak{M}^1(K)$ consist of the curves $\varphi_1^1, \ldots, \varphi_{p_1}^1$; set $\chi^1 = \varphi_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \varphi_{p_1}^1$, so that χ^1 is a Jordan curve. The curve φ_1^1 is K-neighbouring to $\varphi_{p_1}^1$; hence, the same system $\mathfrak{M}^1(K)$ would have been obtained starting with any $\varphi_k \in \mathfrak{M}^1(K)$.

If $\mathfrak{M}^1(K) \neq \mathfrak{M}(K)$, then take any $\varphi_1^2 \in \mathfrak{M}(K) - \mathfrak{M}^1(K)$ and obtain $\mathfrak{M}^2(K)$, χ^2 by an analogous procedure. The process then may be continued until the set $\mathfrak{M}(K)$ is exhausted. There results a decomposition of $\mathfrak{M}(K)$ into $\mathfrak{M}^1(K), \ldots, \mathfrak{M}^r(K)$; with each $\mathfrak{M}^j(K)$ there is associated a Jordan curve χ^j. The set of these χ^j $(j = 1, \ldots, r)$ will be denoted by $J(K; \varphi)$.

Let $J^+(\varphi)$ be the set-join of all $J(K; \varphi)$, summing over all components K of all W_s^0, $s = 1, 2, \ldots$ Let $J^-(\varphi)$ consist of all $\dot{-}\chi$ with $\chi \in J^+(\dot{-}\varphi)$. It is shown that the system $J = J^+(\varphi) \cup J^-(\varphi)$ then has the properties required in the main theorem.