Ilja Černý

Nové důkazy některých vět z topologie roviny

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 2, 219--235

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108448`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

NOVÉ DŮKAZY NĚKTERÝCH VĚT Z TOPOLOGIE ROVINY

ILJA ČERNÝ, Praha

(Došlo dne 23. ledna 1963)

Přístupným způsobem se dokazují některé hlubší věty z topologie roviny, potřebné např. v teorii konformního zobrazení, jako je věta o dosažitelnosti bodu na hranici Jordanovy oblasti.

1. Je-li $T \subset E$, kde E je otevřená Gaussova rovina, homeomorfním obrazem jednotkové kružnice, nazveme T topologickou kružnicí. Uzavřenou Gaussovu rovinu označíme písmenem S. Je-li T topologická kružnice, je podle Jordanovy věty (viz např. [1], str. 358)

$$S - T = \text{Int}\, T \cup \text{Ext}\, T, \tag{1}$$

kde Int T (vnitřek T) a Ext T (vnějšek T) jsou disjunktní oblasti,[1]) jejichž společnou hranicí je T; oblast Int T je přitom omezená, oblast Ext T neomezená (obsahuje bod ∞).

Budeme říkat, že oblast Ω je Jordanova, je-li $H(\Omega)$ topologická kružnice. Tvrdíme, že pak je buď $\Omega = \text{Int}\, H(\Omega)$ nebo $\Omega = \text{Ext}\, H(\Omega)$. To plyne zřejmě z trochu obecnějšího tvrzení (které budeme v dalším potřebovat):

Lemma 1. *Je-li T topologická kružnice, Ω otevřená množina, pro niž je $H(\Omega) = T$, je Ω jednou z těchto tří množin*: Int T, Ext T, Int $T \cup$ Ext T.

Důkaz. Nechť $\Omega \cap \text{Int}\, T \neq \emptyset$; kdyby nebylo Int $T \subset \Omega$, mohli bychom najít oblouk $L \subset \text{Int}\, T$, jehož počáteční bod a leží v $\Omega \cap \text{Int}\, T$, kdežto koncový bod b v Int $T - \Omega$.

Množina $L - \Omega$ je uzavřená a neprázdná; existuje tedy první bod na L, který neleží v Ω. Snadno nahlédneme, že tento bod leží na $H(\Omega)$; vzhledem k tomu, že tento bod leží také v Int T, není $H(\Omega) = T$.

Platí tedy implikace: Je-li Ω otevřená množina, pro niž je $H(\Omega) = T$, $\Omega \cap \text{Int}\, T \neq \emptyset$, je Int $T \subset \Omega$.

Podobně se dokáže platnost analogické implikace, kde na místě Int T je Ext T.

[1]) Oblastí rozumíme souvislou otevřenou množinu.

Uvážíme-li ještě, že Ω jakožto (neprázdná) otevřená množina, mající hranici T, je s T disjunktní, tedy protíná buď Int T nebo Ext T, vidíme, že naše tvrzení platí.

Z Jordanovy a Janiszewského věty plyne snadno toto tvrzení (viz [1], str. 359):

Lemma 2. *Jsou-li L_j ($j = 1, 2, 3$) oblouky v E, mající společné právě své krajní body, a označíme-li $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, je*

$$S - L = G_{12} \cup G_{13} \cup G_{23}\,, \tag{2}$$

kde G_{jk} ($1 \leqq j < k \leqq 3$) jsou disjunktní Jordanovy oblasti, pro něž je

$$H(G_{jk}) = L_j \cup L_k\,. \tag{3}$$

Poznámka 1. Důkaz lemmatu 2 nebudeme podrobně provádět; všimněme si však myšlenky tohoto důkazu, tak jak je podán v [1]: Každá z množin $L_{jk} = L_j \cup L_k$ ($1 \leqq j < k \leqq 3$) je topologickou kružnicí, takže podle Jordanovy věty

$$S - L_{jk} = \operatorname{Int} L_{jk} \cup \operatorname{Ext} L_{jk}\,. \tag{4}$$

Buďte a, b společné krajní body všech oblouků L_j; je-li $j \neq i \neq k$ (a $1 \leqq j < k \leqq 3$) je souvislá množina $\tilde{L}_i = L_i - \{a, b\}$ disjunktní s L_{jk}, takže je částí právě jedné z oddělených[2]) množin Int L_{jk}, Ext L_{jk} (přičemž L_i je s druhou z těchto množin disjunktní).

V [1] se dokazuje, že za G_{jk} je třeba vzít tu z oblastí Int L_{jk}, Ext L_{jk}, která je disjunktní s L_i.

Z toho lze odvodit ještě další dvě tvrzení, která budeme v dalším potřebovat:

Lemma 3. Užíváme-li téhož označení jako v lemmatu 2 a poznámce 1, platí:

Jsou-li Ω_1, Ω_2 disjunktní omezené Jordanovy oblasti, pro něž je

$$H(\Omega_1) = L_{23}\,, \quad H(\Omega_2) = L_{13}\,, \tag{5}$$

je

$$\Omega_1 = \operatorname{Int} L_{23} = G_{23}\,, \quad \Omega_2 = \operatorname{Int} L_{13} = G_{13} \tag{6}$$

(takže Ω_j jsou komponentami množiny $S - L$). Třetí komponentou této množiny je neomezená Jordanova oblast $G_{12} = \operatorname{Ext} L_{12}$ (mající hranici L_{12}). Kromě toho je

$$\operatorname{Int} L_{12} - L_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2\,. \tag{7}$$

Lemma 4. *Je-li G Jordanova oblast, M oblouk, který až na své krajní body a, b leží v G, je $G - M = G_1 \cup G_2$, kde G_j jsou disjunktní Jordanovy oblasti. Jsou-li N_1, N_2 oblouky s krajními body a, b, pro něž je $N_1 \cup N_2 = H(G)$, je při vhodném očíslování $H(G_j) = N_j \cup M$ pro $j = 1, 2$.*

Důkaz lemmatu 3. Podle lemmatu 1 jsou Ω_1, Ω_2 nutně vnitřky topologických kružnic L_{23}, L_{13}; vzhledem k tomu, že $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, jsou všechny tři množiny

[2]) Říkáme, že množiny X, Y jsou oddělené, je-li $\bar{X} \cap Y = \emptyset = X \cap \bar{Y}$.

$\Omega_1 \cap \operatorname{Ext} L_{13}$, $\Omega_2 \cap \operatorname{Ext} L_{23}$, $\operatorname{Ext} L_{23} \cap \operatorname{Ext} L_{13}$ (jak snadno nahlédneme) neprázdné. Z toho, co jsme v poznámce 1 řekli o tom, jak je třeba volit množiny G_{jk}, aby byla splněna tvrzení lemmatu 2 (buď jako $\operatorname{Int} L_{jk}$ nebo $\operatorname{Ext} L_{jk}$), a z toho že, G_{jk} jsou disjunktní množiny, plyne platnost (6).

Vzhledem k tomu, že jedna z komponent množiny $S - L$ musí být neomezená, zbývá pro třetí komponentu této množiny jen volba $G_{12} = \operatorname{Ext} L_{12}$. Protože (podle toho, co jsme řekli o volbě množin G_{jk} nahoře) je $G_{12} \cap L_3 = \operatorname{Ext} L_{12} \cap L_3 = \emptyset$, je nutně $\tilde{L}_3 \subset \operatorname{Int} L_{12}$. Odtud plyne (vzhledem k disjunktnosti oblastí G_{jk} a vzhledem k rovnosti (2)), že $\operatorname{Int} L_{12} = S - \bar{G}_{12} = G_{13} \cup G_{23} \cup \tilde{L}_3$. Rovnost (7) je snadným důsledkem tohoto vztahu.

Důkaz lemmatu 4. Buď G nejdříve omezená Jordanova oblast, tedy $G = \operatorname{Int} H(G)$. Položme $L_1 = N_1$, $L_2 = N_2$, $L_3 = M$. Pak jsou splněny podmínky z lemmatu 2 a platí tedy i tvrzení lemmatu 3, speciálně vztah (7) a (3).

Vzhledem k tomu, že existuje homeomorfní zobrazení S na S (např. transformace typu $F(z) = 1 : (z - z_0)$), které danou neomezenou Jordanovu oblast převádí v omezenou oblast, a vzhledem k tomu, že naše tvrzení má topologický charakter, je tím lemma dokázáno i v případě, že G je neomezená.

2. Křivkou nazveme jakékoliv spojité zobrazení φ jakéhokoliv intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ do E. Jejím geometrickým obrazem nazýváme množinu $[\varphi] = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$. Body $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ nazveme krajními body křivky φ ($\varphi(\alpha)$ je počáteční bod křivky φ, krátce p. b. φ, $\varphi(\beta)$ je její koncový bod, k. b. φ).

Je-li $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ a jsou-li parciální zobrazení $\varphi \mid \langle\alpha, \beta)$ a $\varphi \mid (\alpha, \beta\rangle$ prostá, říkáme, že φ je Jordanova křivka. Geometrickým obrazem Jordanovy křivky je ovšem topologická kružnice; obráceně, ke každé topologické kružnici T existuje Jordanova křivka φ tak, že $[\varphi] = T$.

V teorii konformního zobrazení se potřebují některé hlubší věty z topologie roviny, jejichž přímý důkaz lze v literatuře velmi těžko najít. Např. k důkazu tvrzení, že konformní zobrazení Jordanovy oblasti G na jednotkový kruh U lze rozšířit na homeomorfní zobrazení $\bar{G}$ na $\bar{U}$, jsou potřebné tyto tři věty (srv. např. s [2], str. 317):

Věta 1. *Je-li G Jordanova oblast, existuje ke každému bodu $a \in H(G)$ křivka φ tak, že $a =$ k. b. φ a že $[\varphi] - \{a\} \subset G$.*

Věta 2. *Jsou-li L_1, L_2 dva oblouky, jejichž společným koncovým bodem je bod a, ležící na hranici Jordanovy oblasti G, a je-li $L_1 \cup L_2 - \{a\} \subset G$, existuje pro každé okolí $U(a)$[3]) bodu a křivka φ tak, že*

$$\text{p. b. } \varphi \in L_1\,, \quad \text{k. b. } \varphi \in L_2\,, \quad [\varphi] \subset U(a) \cap G\,.$$

Věta 3. *Je-li G Jordanova oblast a má-li posloupnost bodů $a_m \in G \cap E$ limitu $a \in H(G)$, existuje křivka φ tak, že $a =$ k. b. φ, $a_m \in [\varphi]$ pro všechna m a $[\varphi] - \{a\} \subset G$.*

---

[3]) Okolím bodu rozumíme vždy otevřený kruh o středu v tomto bodě.

Naším cílem je provést důkaz těchto vět; z hlubších tvrzení topologie roviny budeme přitom užívat pouze vět, shrnutých v odst. 1. Důkazy jsou založeny na lemmatu 6, k jehož důkazu potřebujeme lemma 5.

3. **Lemma 5.** *Buďte Γ^1, Γ^2 oblouky, mající společné právě své krajní body; položme $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Buďte L_n (kde $n = 1, 2, \ldots$ — konečná nebo nekonečná posloupnost) oblouky, splňující tyto podmínky:*

1) *Krajní body a_n, b_n oblouku L_n leží na Γ^1.*

2) *Žádné dva z oblouků L_m, L_n $(m \neq n)$ nemají oba krajní body společné a označíme-li $\tilde{L}_n = L_n - \{a_n, b_n\}$, je $\tilde{L}_n$ disjunktní s L_m.*

3) $\tilde{L}_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$.

4) *Pokud je oblouků L_n nekonečně mnoho, jejich průměr $d(L_n)$ konverguje k nule.*

Označme ještě C_n oblouk, obsažený v Γ^1, který má krajní body a_n, b_n; buď konečně $T_n = C_n \cup L_n$:

Pak jsou T_n topologické kružnice, pro něž je $\operatorname{Int} T_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$, *a množina*

$$\Omega = \operatorname{Int} \Gamma - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n} \tag{8}$$

je Jordanovou oblastí, jejíž hranice obsahuje oblouk Γ^2. Množina

$$R = \Gamma^1 \cup \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n} \tag{9}$$

je uzavřená. Konečně je

$$H(\Omega) \subset (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) \cup \Gamma^2 \cup \bigcup_n L_n\,, \tag{10}$$

přičemž rovnost nastane tehdy, když množiny $\tilde{C}_n = C_n - \{a_n, b_n\}$ jsou disjunktní.

D ů k a z rozdělíme na několik částí. a) Je patrné, že T_n je topologická kružnice, pro niž podle lemmatu 4 platí vztah $\operatorname{Int} T_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$. Uvážíme-li, že oblouky C_n, L_n a $\overline{\Gamma - C_n}$ mají společné právě své krajní body a_n, b_n, vidíme, že podle lemmatu 3 je

$$S - (\Gamma \cup L_n) = \operatorname{Int} T_n \cup \operatorname{Int} (L_n \cup (\Gamma - C_n)) \cup \operatorname{Ext} \Gamma \tag{11}$$

(při čemž Jordanovy oblasti vpravo jsou disjunktní).

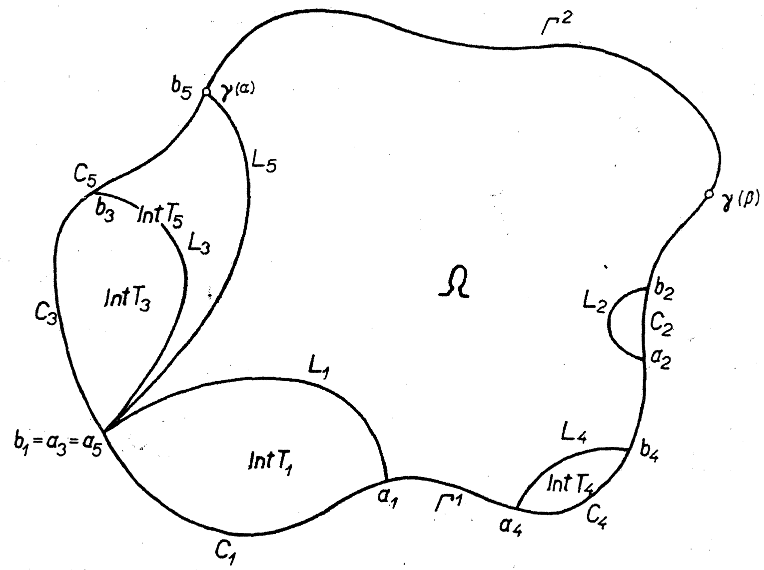
b) Nechť oblouků L_n je nekonečně mnoho, takže podle předpokladu 4 je $d(L_n) \to 0$. Je-li γ prostá křivka, definovaná v $\langle \alpha, \beta \rangle$, pro niž je $[\gamma] = \Gamma^1$, je γ homeomorfním zobrazením. Ze stejnoměrné spojitosti zobrazení γ_{-1}[4]) na Γ^1 a z podmínky $a_n - b_n \to 0$ (která plyne ze vztahu $d(L_n) \to 0$) vyplývá, že $\gamma_{-1}(a_n) - \gamma_{-1}(b_n) \to 0$. Ze stejnoměrné spojitosti γ plyne tedy dále, že i průměr obrazu (při zobrazení γ) intervalu s krajními body $\gamma_{-1}(a_n)$, $\gamma_{-1}(b_n)$, tj. průměr oblouku C_n, konverguje k nule.

Protože $d(T_n) \leqq d(L_n) + d(C_n)$, je i $d(T_n) \to 0$. Ze vztahu $d(\overline{\operatorname{Int} T_n}) = d(T_n)$ vyplývá konečně, že i $d(\operatorname{Int} T_n) \to 0$.

---

[4]) γ_{-1} je zobrazení inversní ke γ.

c) Dokažme, že množina (9) je uzavřená. Buďte tedy $z_n \in R$ libovolné body, mající limitu z; máme dokázat, že $z \in R$. Jsou dvě možnosti: A) existuje (konečné) p tak, že všechna z_n leží v (uzavřené) množině $\Gamma^1 \cup \bigcup_{n=1}^{p} \overline{\operatorname{Int} T_n}$ – pak v této množině (a tím spíše i v R) leží ovšem i bod z; B) neplatí A, takže existují prosté posloupnosti indexů n_k a m_k tak, že $z_{n_k} \in \overline{\operatorname{Int} T_{m_k}}$. Vzhledem k tomu, že podle b) je $d(\overline{\operatorname{Int} T_{m_k}}) \to 0$ a že každá z množin $\overline{\operatorname{Int} T_m}$ protíná uzavřenou množinu Γ^1, je pak zřejmě $z = \lim z_{n_k} \in \Gamma^1$.



Obr. 1.

d) Z c) ihned plyne, že množina $\Omega = \operatorname{Int} \Gamma - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n} = \operatorname{Int} \Gamma - (\Gamma^1 \cup \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n})$ je otevřená.

e) Předpokladem 2 je vyloučen případ, že dva oblouky L_m, L_n, kde $m \neq n$, mají oba krajní body společné, tedy případ, že $C_m = C_n$. Zbývají tedy tyto tři možnosti: A) Jeden z oblouků C_m, C_n je pravou částí druhého; B) množiny $\tilde{C}_m$, $\tilde{C}_n$ jsou disjunktní; C) neplatí ani A, ani B, takže jeden z krajních bodů oblouku C_m leží v $\tilde{C}_n$, druhý v $\Gamma - C_n$ (a platí ovšem také podmínka, která vznikne, zaměníme-li m s n). Rozeberme podrobněji jednotlivé případy:

Ad A): Buď např. $C_m \subsetneqq C_n$; pak leží jeden z krajních bodů oblouku C_m, např. bod a_m, na $\tilde{C}_n$. Podle předpokladu 2) je $\tilde{L}_m \subset \operatorname{Int} \Gamma - L_n$ a podle lemmatu 4 je přitom

$$\operatorname{Int} \Gamma - L_n = \operatorname{Int} T_n \cup \operatorname{Int} (L_n \cup (\Gamma - C_n)),$$

kde množiny vpravo jsou oddělené. Souvislá množina $\tilde{L}_m$ je tedy nutně částí právě jedné z nich, a to té, jejíž uzávěr obsahuje celý oblouk L_m. Protože však bod a_m nepatří do $\overline{\text{Int}\,(L_n - (\Gamma - C_n))} = \text{Int}\,(L_n - (\Gamma - C_n)) \cup \tilde{L}_n \cup \overline{\Gamma - C_n}$, je nutně $\tilde{L}_m \subset \subset \text{Int}\, T_n$.

Krajní body oblouku L_m leží přitom na T_n, takže podle lemmatu 4 je

$$\text{Int}\, T_n - L_m = \text{Int}\, T_m \cup \text{Int}\,(L_n \cup L_m \cup (C_n - C_m)),$$

odkud plyne inkluse $\text{Int}\, T_m \subset \text{Int}\, T_n$.

Ad B): Nyní je $C_m \subset \Gamma - \tilde{C}_n$ a protože C_m, C_n nemají společné oba krajní body, leží jeden z krajních bodů oblouku C_m – např. a_m – dokonce v $\Gamma - C_n$. Analogicky jako v případě A lze na základě toho ukázat, že $\text{Int}\, T_m \subset \text{Int}\,(L_n \cup (\Gamma - C_n))$, takže $\text{Int}\, T_m$ a $\text{Int}\, T_n$ jsou disjunktní.

Ad C): Nyní zřejmě leží jeden z krajních bodů oblouku C_m na $\tilde{C}_n$, z čehož jako v případě A plyne, že $\text{Int}\, T_m \subset \text{Int}\, T_n$, kdežto druhý krajní bod patří do $\Gamma - C_n$, odkud lze jako v případě B odvodit, že $\text{Int}\, T_m$ a $\text{Int}\, T_n$ jsou disjunktní. To je zřejmě spor, který ukazuje, že případ C nemůže nastat.

Máme tedy tento úhrnný výsledek: Pro každé dva indexy $m \neq n$ je buď jedna z množin $\text{Int}\, T_m$, $\text{Int}\, T_n$ částí druhé (to nastane v tom případě, že jeden z oblouků C_m, C_n je částí druhého), nebo obě množiny jsou disjunktní (jsou-li $\tilde{C}_m$, $\tilde{C}_n$ disjunktní).

f) Je-li oblouků L_n nekonečně mnoho, je $\text{d}(\text{Int}\, T_n) \to 0$, takže ke každému m existuje jen konečně mnoho indexů n, pro něž je $\text{Int}\, T_n \supset \text{Int}\, T_m$; to je ovšem triviálně pravda i pro případ, kdy oblouků L_n je jen konečně mnoho.

Z toho plyne, že ke každému m existuje index $n(m)$ tak, že $\text{Int}\, T_{n(m)} \supset \text{Int}\, T_m$ a že $\text{Int}\, T_k \supset \text{Int}\, T_{n(m)}$ jen pro $k = n(m)$. Platí-li pro některý index n implikace

$$\text{Int}\, T_k \supset \text{Int}\, T_n \Rightarrow k = n,$$

budeme psát: $n \in \mathfrak{N}$.

Jsou-li $n_1, n_2 \in \mathfrak{N}$ dva navzájem různé indexy, nemůže být žádná z množin $\text{Int}\, T_{n_1}$, $\text{Int}\, T_{n_2}$ částí druhé, takže (podle toho, co jsme dokázali v bodě e) tyto množiny jsou disjunktní. Množiny $\tilde{C}_{n_1}$, $\tilde{C}_{n_2}$ jsou v tom případě také disjunktní.

Dále je patrné, že $\Omega = \text{Int}\, \Gamma - \bigcup_m \overline{\text{Int}\, T_m} = \text{Int}\, \Gamma - \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} \overline{\text{Int}\, T_n}$ (neboť každá z množin $\overline{\text{Int}\, T_m}$ je obsažena v některé z množin $\overline{\text{Int}\, T_n}$, kde $n \in \mathfrak{N}$).

Naším cílem je dokázat, že Ω je Jordanova oblast; zatím jsme ukázali, že Ω je otevřená množina. Vzhledem k tomu, co jsme nyní řekli, lze zřejmě bez újmy obecnosti předpokládat, že

(12) $\qquad$ pro každé dva indexy $m \neq n$ je $\tilde{C}_n \cap \tilde{C}_m = \emptyset$.

Jinak totiž můžeme přejít od množiny všech původních indexů k množině $\mathfrak{N}$.

Uvažme ještě, že pro každé m existuje $n \in \mathfrak{N}$ tak, že $C_m \subset C_n$. Odtud plyne, že $\Gamma^1 - \bigcup_m C_m = \Gamma^1 - \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} C_n$. Dokážeme-li tedy rovnost

$$H(\Omega) = (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) \cup \Gamma^2 \cup \bigcup_n L_n$$

za předpokladu (12), bude tím dokázána také inkluse (10) v obecném případě.

V dalším tedy činíme předpoklad (12):

g) V části b) tohoto důkazu jsme zavedli křivku γ, definovanou v $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro niž je $[\gamma] = \Gamma^1$. Buďte $\varphi(\alpha_n)$, $\varphi(\beta_n)$, kde $\alpha \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq \beta$, krajní body oblouku C_n; bez újmy obecnosti lze předpokládat, že $a_n = \varphi(\alpha_n)$, $b_n = \varphi(\beta_n)$. Intervaly (α_n, β_n) jsou vzhledem k tomu, že $\tilde{C}_n = \gamma((\alpha_n, \beta_n))$, podle (12) disjunktní.

Buď λ_n prostá křivka, definovaná v $\langle\alpha_n, \beta_n\rangle$, pro niž je

$$\lambda_n(\alpha_n) = a_n\,, \quad \lambda_n(\beta_n) = b_n\,, \quad [\lambda_n] = L_n\,.$$

Tvrdíme, že funkce ω, definovaná v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ podmínkami

$$\omega(t) = \begin{cases} \lambda_n(t) & \text{pro } t \in (\alpha_n, \beta_n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \\ \gamma(t) & \text{pro } t \in \langle\alpha, \beta\rangle - \bigcup_n(\alpha_n, \beta_n) \end{cases} \tag{13}$$

je spojitá a prostá.

Dokažme nejdříve spojitost funkce ω. Je-li $t_0 \in \langle\alpha_n, \beta_n)$ pro některé n, plyne spojitost ω v bodě t_0 zprava ze spojitosti λ_n v bodě t_0 zprava. Je-li $t_0 \in \langle\alpha, \beta) - \bigcup_n\langle\alpha_n, \beta_n)$, jsou dvě možnosti: A) existuje $\Delta > 0$ tak, že interval $\langle t_0, t_0 + \Delta)$ je disjunktní s $\bigcup_n(\alpha_n, \beta_n)$; pak je $\omega(t) = \gamma(t)$ v $\langle t_0, t_0 + \Delta)$ a spojitost ω v bodě t_0 zprava plyne ze spojitosti γ. B) Žádný interval tvaru $\langle t_0, t_0 + \Delta)$ není disjunktní s $\bigcup_n(\alpha_n, \beta_n)$; protože zároveň t_0 není počátečním bodem žádného z intervalů (α_n, β_n), leží v každém intervalu $\langle t_0, t_0 + \Delta)$ nekonečně mnoho intervalů (α_n, β_n). Buď $\varepsilon > 0$; pak existuje $\Delta > 0$ tak, že platí:

$$t \in \langle t_0, t_0 + \Delta) \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{14'}$$

$$\beta_n - \alpha_n < \Delta \Rightarrow d(L_n) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{14''}$$

(poslední implikace plyne z toho, že $\beta_n - \alpha_n \to 0$ a $d(L_n) \to 0$).

Zvolme p tak, aby $(\alpha_p, \beta_p) \subset (t_0, t_0 + \Delta)$. Je-li $t \in \langle t_0, \beta_p)$, je buď $t \notin \bigcup_n(\alpha_n, \beta_n)$, takže podle (14)′ je

$$|\omega(t) - \omega(t_0)| = |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{15}$$

nebo je $t \in (\alpha_n, \beta_n)$, načež nutně $\beta_n - \alpha_n < \beta_p - t_0 < \Delta$, takže podle (14)″ a (15) máme

$$\begin{aligned} |\omega(t) - \omega(t_0)| &= |\lambda_n(t) - \gamma(t_0)| \leqq \\ &\leqq |\lambda_n(t) - \gamma(\alpha_n)| + |\gamma(\alpha_n) - \gamma(t_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Tím je dokázána spojitost funkce ω v každém bodě $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$ zprava; podobně se dokáže spojitost ω v bodech $t_0 \in (\alpha, \beta\rangle$ zleva.

Dokažme, že ω je prostá. Buď $\alpha \leqq t' < t'' \leqq \beta$; pak je buď $t', t'' \in (\alpha_n, \beta_n)$ pro vhodné n, nebo $t' \in (\alpha_m, \beta_m)$, $t'' \in (\alpha_n, \beta_n)$, kde $m \neq n$ jsou vhodné indexy, nebo jeden z bodů t', t'' patří do některého z intervalů (α_n, β_n), kdežto druhý leží v množině $\langle\alpha, \beta\rangle - \bigcup_n(\alpha_n, \beta_n)$, nebo konečně žádný z bodů t', t'' nepatří do $\bigcup_n(\alpha_n, \beta_n)$.

Podmínka $\omega(t') \neq \omega(t'')$ plyne v prvním případě z toho, že λ_n je prostá funkce, ve druhém případě z toho, že $\omega(t') = \lambda_m(t') \in \tilde{L}_m$, $\omega(t'') = \lambda_n(t'') \in \tilde{L}_n$ a že $\tilde{L}_m \cap \tilde{L}_n = \emptyset$, ve třetím případě z podmínky $\Gamma^1 \cap \tilde{L}_n = \emptyset$, ve čtvrtém případě z toho, že γ je prostá funkce.

h) V předcházejícím bodě jsme dokázali, že křivka ω (definovaná v (13)) je prostá; je zřejmé, že tato křivka má tytéž krajní body jako oblouk Γ^1. Vzhledem k tomu, že $[\omega] \subset \Gamma^1 \cup \bigcup_n \tilde{L}_n$, že Γ^1 má s Γ^2 společné jen krajní body a že $\Gamma^2 \cap \bigcup_n \tilde{L}_n = \emptyset$, je $[\omega]$ oblouk, mající společné právě své krajní body s obloukem Γ^2. Množina $[\omega] \cup \Gamma^2$ je tedy topologickou kružnicí.

Jak snadno nahlédneme, je

$$[\omega] = (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) \cup \bigcup_n L_n . \tag{17}$$

Z toho plyne, že k dokončení důkazu lemmatu 5 stačí jen ukázat, že

$$H(\Omega) = [\omega] \cup \Gamma^2 , \tag{18}$$

neboť podle lemmatu 1 z této podmínky a z omezenosti a otevřenosti množiny Ω vyplývá rovnost $\Omega = \operatorname{Int}([\omega] \cup \Gamma^2)$, takže Ω je Jordanovou oblastí.

i) Než přikročíme k důkazu (18), ukažme, že je-li oblouků L_n nekonečně mnoho, je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} \operatorname{Int} T_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} C_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} L_k} . \tag{19}$$

Abychom to nahlédli, uvažme především, že z inkluse $L_k \cup C_k \subset \overline{\operatorname{Int} T_k}$ plyne podmínka

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} C_k} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} L_k} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} \overline{\operatorname{Int} T_k}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} \operatorname{Int} T_k} . \tag{20}$$

Je-li obráceně $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} \operatorname{Int} T_k}$, protíná okolí $U(z, \frac{1}{3}\delta)$ pro každé $\delta > 0$ všechny množiny $\bigcup_{k \geqq n} \operatorname{Int} T_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $d(\operatorname{Int} T_k) \to 0$, existuje p tak, že pro $k > p$ je $d(\operatorname{Int} T_k) < \frac{1}{3}\delta$. Je-li $q > p$ libovolné číslo, plyne z podmínky $U(z, \frac{1}{3}\delta) \cap \bigcup_{k \geqq n} \operatorname{Int} T_k \neq \emptyset$ existence indexu $k \geqq q$, pro který je $U(z, \frac{1}{3}\delta) \cap \operatorname{Int} T_k \neq \emptyset$. Protože $d(\operatorname{Int} T_k) < \frac{1}{3}\delta$ pro toto $k \geqq q > p$, je $\operatorname{Int} T_k \subset U(z, \frac{2}{3}\delta)$, takže

$$C_k \cup L_k \subset \overline{\operatorname{Int} T_k} \subset \overline{U(z, \tfrac{2}{3}\delta)} \subset U(z, \delta) .$$

Každé okolí bodu z tedy protíná (dokonce obsahuje) nekonečně mnoho množin C_k resp. L_k; odtud plyne, že

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} C_k} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geqq n} L_k} .$$

Tím je (vzhledem k (20)) rovnost (19) dokázána.

Jak snadno nahlédneme, je

$$\Gamma^1 - \bigcup_n C_n = [\omega] - \bigcup_n L_n . \tag{21}$$

Uvážíme-li, že pro každou posloupnost množin je

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geqq n} M_k} \tag{22}$$

(viz např. [3], str. 21), vidíme, že

$$\Gamma^1 - \overline{\bigcup_n C_n} = (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) - \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geqq n} C_k} = \tag{23}$$

$$= ([\omega] - \bigcup_n L_n) - \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k\geqq n} L_k} = [\omega] - \overline{\bigcup_n L_n} .$$

Poznamenejme konečně, že (19) i (23) platí i v případě, kdy oblouků L_n je jen konečně mnoho; k tomu stačí doplnit posloupnosti množin L_n, C_n, atd. prázdnými množinami na posloupnosti nekonečné a užít odvozených výsledků.

j) Obraťme se nyní k důkazu (18). Množina $\overline{\Omega}$ je částí $\overline{\mathrm{Int}\, \Gamma}$; přitom je

$$\overline{\mathrm{Int}\, \Gamma} = \Omega \cup (\Gamma - \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n}) \cup \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n} , \tag{24}$$

kde množiny vpravo jsou disjunktní. Poslední sčítanec lze napsat ve tvaru

$$\overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n} = \bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n \cup \bigcup_n \tilde{C}_n \cup \overline{\bigcup_n L_n} , \tag{25}$$

kde množiny vpravo jsou opět disjunktní.

Uvažme, které množiny rozkladů (24) a (25) jsou obsaženy v $\overline{\Omega}$. Jistě je $\Omega \subset \overline{\Omega}$; je-li $z \in \Gamma - \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n}$, má bod z okolí disjunktní s $\overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n}$, takže pro všechna dost malá $U(z)$ je $U(z) \cap \Omega = U(z) \cap (\mathrm{Int}\, \Gamma - \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n}) = U(z) \cap \mathrm{Int}\, \Gamma \neq \emptyset$, neboť $z \in \Gamma = H(\mathrm{Int}\, \Gamma)$. Tedy $\Gamma - \overline{\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n} \subset \overline{\Omega}$.

Je-li $z \in \bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n$, existuje $U(z)$ obsažené ve vhodném $\mathrm{Int}\, T_n \subset S - \overline{\Omega}$, takže $\bigcup_n \mathrm{Int}\, T_n \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Protože každý bod $z \in \tilde{C}_n$ má okolí

$$U(z) \subset \mathrm{Int}\, T_n \cup C_n \cup \mathrm{Ext}\, \Gamma \subset S - \Omega ,$$

je též $\bigcup_n \tilde{C}_n \cap \overline{\Omega} = \emptyset$.

Zbývá vyšetřit $\overline{\bigcup_n L_n}$; je-li $z \in \tilde{L}_n \subset \mathrm{Int}\, \Gamma$, jsou všechna dost malá $U(z)$ obsažena v $\mathrm{Int}\, \Gamma$. Protože $\overline{\bigcup_{m\neq n} L_m} \subset \bigcup_{m\neq n} \tilde{L}_m \cup \Gamma^1$, je každé dost malé okolí $U(z)$ disjunktní s $\overline{\bigcup_{m\neq n} L_m}$. Je-li $U(z) \cap \overline{\bigcup_{m\neq n} \mathrm{Int}\, T_m} \neq \emptyset$ (pro určité okolí bodu z), je $U(z) \cap \mathrm{Int}\, T_m \neq \emptyset$ pro vhodné $m \neq n$; souvislá množina $U(z)$ obsahuje tedy body z $\mathrm{Int}\, T_m$ i body z Ext T_m (např. bod z). Odtud plyne, že nutně $U(z) \cap T_m \neq \emptyset$; volíme-li $U(z)$ tak malé, že $U(z) \cap \Gamma^1 = \emptyset$, je nutně $U(z) \cap \tilde{L}_m \neq \emptyset$, což není pravda pro dost malá $U(z)$.

Všechna dost malá $U(z)$ jsou tedy disjunktní s $\overline{\bigcup_{m \neq n} \operatorname{Int} T_m}$ a platí tedy pro ně vztahy

$$U(z) \cap \Omega = U(z) \cap (\operatorname{Int} \Gamma - (\overline{\bigcup_{m \neq n} \operatorname{Int} T_m} \cup \overline{\operatorname{Int} T_n}) =$$
$$= U(z) - \overline{\operatorname{Int} T_n} = U(z) \cap \operatorname{Ext} T_n \neq \emptyset\,,$$

neboť $z \in \tilde{L}_n \subset H(\operatorname{Ext} T_n)$. Tím je dokázáno, že $\bigcup \tilde{L}_n \subset \overline{\Omega}$.

Vzhledem k uzavřenosti množiny $\overline{\Omega}$ odtud plyne, že také $\overline{\bigcup_n L_n} = \overline{\bigcup_n \tilde{L}_n} \subset \overline{\Omega}$. Celkem tedy máme: $\overline{\Omega} = \Omega \cup (\Gamma - \overline{\bigcup_n \operatorname{Int} T_n}) \cup \overline{\bigcup_n L_n}$, přičemž množiny vpravo jsou disjunktní. Z toho plyne, že

$$H(\Omega) = \overline{\Omega} - \Omega \doteq (\Gamma - \overline{\bigcup_n \operatorname{Int} T_n}) \cup \overline{\bigcup_n L_n} =$$
$$= \Gamma^2 \cup [\Gamma^1 - (\bigcup_n \operatorname{Int} T_n \cup \bigcup_n \tilde{L}_n \cup \overline{\bigcup_n C_n})] \cup \overline{\bigcup_n L_n} =$$
$$= \Gamma^2 \cup (\Gamma^1 - \overline{\bigcup_n C_n}) \cup \overline{\bigcup_n L_n} = \Gamma^2 \cup ([\omega] - \overline{\bigcup_n L_n}) \cup \overline{\bigcup_n L_n} = \Gamma^2 \cup [\omega]$$

(užili jsme při tom vztahů (19) a (23)). Tím je lemma 5 dokázáno.

4. Lemma 6. *Buď G Jordanova oblast a nechť $U(a)$ je okolí bodu $a \in T = H(G)$, pro něž je $T - \overline{U(a)} \neq \emptyset$. Pak existuje právě jedna komponenta Ω množiny $G \cap U(a)$, na jejíž hranici leží bod a. Ω je Jordanova oblast, jejíž hranice obsahuje celou komponentu množiny $T \cap U(a)$, v níž leží bod a.*

Důkaz. Buď M komponenta množiny $T \cap U(a)$, obsahující bod a. Jak snadno nahlédneme, je $T_1 = \overline{M}$ oblouk, jehož krajní body b, c leží na hranici C okolí $U(a)$; přitom $T_1 - \{b, c\} = M \subset U(a)$. Označme T_2, C_1, C_2 oblouky s krajními body b, c, pro něž platí: $T = T_1 \cup T_2$, $C = C_1 \cup C_2$.

Podle lemmatu 4 je

$$U(a) - T_1 = G_1 \cup G_2\,, \tag{26}$$

kde G_j jsou disjunktní Jordanovy oblasti, jejichž hranicemi jsou topologické kružnice $C_j \cup T_1$.

Buď φ prostá křivka, definovaná v $\langle \alpha, \beta \rangle$, pro niž je $\varphi(\alpha) = b$, $[\varphi] = T_2$.

Buďte (α_n^j, β_n^j) komponenty množiny $\varphi_{-1}(G_j)$ (která, jak snadno nahlédneme, je otevřená v E_1); pak jsou $L_n^j = \varphi(\langle \alpha_n^j, \beta_n^j \rangle)$ oblouky, splňující tyto podmínky:

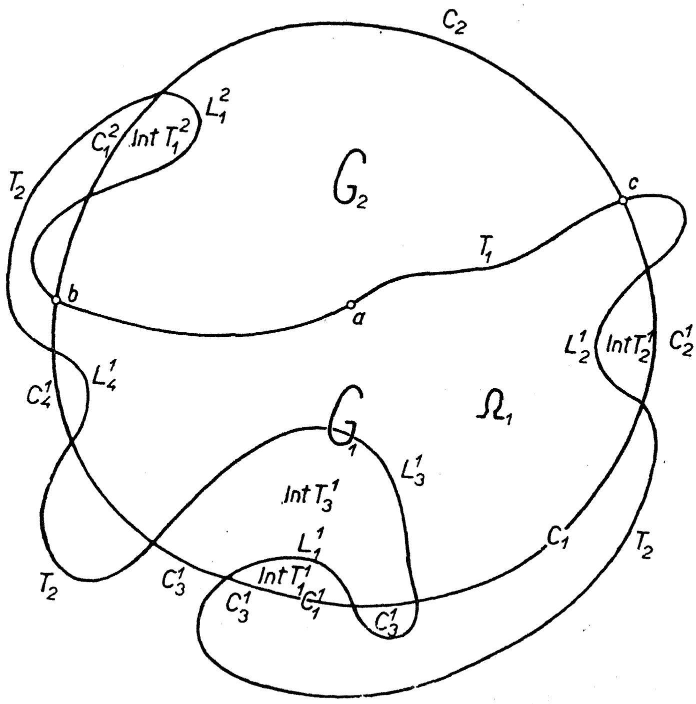
1) Krajní body $a_n^j = \varphi(\alpha_n^j)$, $b_n^j = \varphi(\beta_n^j)$ oblouku L_n^j leží na C_j.

2) Žádné dva z oblouků L_m^j, L_n^j, kde $m \neq n$, nemají oba krajní body společné (neboť to by odporovalo skutečnosti, že $L_n^j \cup L_m^j \subsetneqq T$ a že T je topologická kružnice). Označíme-li $\tilde{L}_n^j = \varphi((\alpha_n^j, \beta_n^j))$, je L_n^j disjunktní s každým L_m^j, kde $m \neq n$.

3) $\tilde{L}_n^j \subset G_j = \operatorname{Int}(C_j \cup T_1)$.

4) Pokud je oblouků L_n^j nekonečně mnoho, je $d(L_n^j) \to 0$. (To plyne ihned ze stejnoměrné spojitosti funkce φ, neboť je-li intervalů (α_n^j, β_n^j) nekonečně mnoho, je $\beta_n^j - \alpha_n^j \to 0$.)

Označme ještě C_n^j oblouk, obsažený v C_j, jehož krajní body jsou a_n^j, b_n^j; buď $T_n^j = C_n^j \cup L_n^j$.



Obr. 2.

Podle lemmatu 5 je tedy množina

$$\Omega_j = G_j - \overline{\bigcup \operatorname{Int} T_n^j} \quad (j = 1, 2) \tag{27}$$

Jordanovou oblastí, jejíž hranice obsahuje oblouk T_1.

Obě oblasti Ω_j jsou disjunktní s T, takže každá z nich leží buď v G nebo v $S - \bar{G}$; kromě toho je $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

$H(\Omega_j)$ jsou topologické kružnice; buď Z_j oblouk s krajními body b, c, pro nějž je $Z_j \cup T_1 = H(\Omega_j)$. Oblouky Z_1, Z_2, T_1 mají tedy společné právě své krajní body. Vzhledem k tomu, že Ω_j jsou disjunktní omezené oblasti s hranicemi $Z_j \cup T_1$, jsou to podle lemmatu 3 komponenty množiny $S - (Z_1 \cup Z_2 \cup T_1)$, přičemž třetí komponentou této množiny je neomezená oblast $\operatorname{Ext}(Z_1 \cup Z_2)$. Množina $T_1 - \{b, c\}$ je částí $\operatorname{Int}(Z_1 \cup Z_2)$.

Z toho plyne, že tím spíše $a \in \mathrm{Int}\,(Z_1 \cup Z_2)$, a protože $a \in H(G) \cap H(S - \bar{G})$, protíná $\mathrm{Int}\,(Z_1 \cup Z_2)$ nutně G i $S - \bar{G}$. Vzhledem k platnosti vztahu

$$\mathrm{Int}\,(Z_1 \cup Z_2) - T = \mathrm{Int}\,(Z_1 \cup Z_2) - T_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{28}$$

je jedna z oblastí Ω_j nutně částí G, druhá částí $S - \bar{G}$.

Podle lemmatu 5 je

$$H(\Omega_j) \subset (C_j - \bigcup_n C_n^j) \cup T_1 \cup \bigcup_n L_n^j\,; \tag{29}$$

vzhledem k tomu, že $C_j \cap U(a) = \emptyset$ a $T_1 \cup \bigcup_n L_n^j \subset T$, je $H(\Omega_j) \cap (U(a) - T) = \emptyset$, takže Ω_j je nejen oblast obsažená v $U(a) - T$, ale také množina uzavřená v $U(a) - T = (U(a) \cap G) \cup (U(a) - \bar{G})$, tedy komponenta této množiny. Protože jedna z množin Ω_j je částí $U(a) \cap G$, je komponentou $U(a) \cap G$.

Z rovnosti

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (T_1 - \{b, c\}) = \mathrm{Int}\,(Z_1 \cup Z_2) \tag{30}$$

plyne, že žádná komponenta K množiny $U(a) - T$, různá od Ω_1, Ω_2, tedy disjunktní s otevřenou množinou (30), nemůže obsahovat bod a na své hranici. Tím je lemma 6 dokázáno.

5. Důkaz věty 1. Buď G Jordanova oblast, $a \in H(G)$ libovolný bod. Jistě existuje $\delta > 0$ tak malé, že $H(G) - \overline{U(a, \delta)} \neq \emptyset$.

Podle lemmatu 6 tedy existuje právě jedna komponenta Ω_n množiny $U(a, \delta/n) \cap G$, na jejíž hranici leží bod a. Protože pro $m < n$ je Ω_n částí některé komponenty množiny $U(a, \delta/m) \cap G \supset U(a, \delta/n) \cap G$, protože $a \in \bar{\Omega}_m \cap \bar{\Omega}_n$ a protože žádná komponenta množiny $U(a, \delta/m) \cap G$, různá od Ω_m, neobsahuje bod a ve svém uzávěru, je nutně $\Omega_m \supset \Omega_n$. Tedy:

$$G \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_n \supset \ldots \tag{31}$$

Zvolme libovolně body $a_n \in \Omega_n$; pak existuje křivka φ_n, definovaná v intervalu $\langle (n-1)/n, n/(n+1) \rangle$ tak, že

$$\varphi_n((n-1)/n) = a_n\,, \quad \varphi_n(n/(n+1)) = a_{n+1}\,, \quad [\varphi_n] \subset \Omega_n\,.$$

Buď

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_n(t) & \text{pro } t \in \langle (n-1)/n, n/(n+1) \rangle \quad (n = 1, 2, \ldots)\,, \\ a & \text{pro } t = 1. \end{cases}$$

Je zřejmé, že φ je spojitá v intervalu $\langle 0, 1)$; protože $d(\bar{\Omega}_n) \to 0$ a $\varphi(\langle (n-1)/n, 1 \rangle) \subset \bar{\Omega}_n$, je φ spojitá i v bodě 1 zleva.

Tím je dokázáno, že φ je křivkou; tato křivka splňuje zřejmě žádané podmínky.

6. Důkaz věty 2. Buďte L_j $(j = 1, 2)$ oblouky, jejichž společným krajním bodem je bod $a \in H(G)$, kde G je Jordanova oblast; nechť přitom $L_1 \cup L_2 - \{a\} \subset G$.

Buď $L_j = [\lambda_j]$, kde λ_j je prostá křivka, definovaná v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, pro niž je $\lambda_j(1) = a$. Buď $U(a)$ libovolné okolí bodu a; zřejmě lze předpokládat, že $U(a)$ je tak malé, že $H(G) - \overline{U(a)} \neq \emptyset$. Pak lze užít lemmatu 6: Existuje právě jedna komponenta Ω množiny $U(a) \cap G$, která obsahuje bod a na své hranici.

Protože λ_j je spojitá, existuje $\delta > 0$ tak, že $\lambda_j(\langle 1 - \delta, 1 \rangle) \subset U(a)$ pro $j = 1, 2$. Odtud plyne, že souvislá množina $M_j = \lambda_j(\langle 1 - \delta, 1))$ je částí $U(a) \cap G$, tedy částí některé komponenty množiny $U(a) \cap G$. Vzhledem k tomu, že $a \in \overline{M}_j$, takže tento bod musí ležet také v uzávěru zmíněné komponenty, je touto komponentou nutně Ω. Máme tedy $M_j \subset \Omega$ (pro $j = 1, 2$).

Vzhledem k tomu, že Ω je oblast, obsahující body $\lambda_j(1 - \delta)$, existuje jistě křivka φ tak, že p. b. $\varphi = \lambda_1(1 - \delta)$, k. b. $\varphi = \lambda_2(1 - \delta)$, $[\varphi] \subset \Omega \subset U(a) \cap G$.

7. Důkaz věty 3. Buďte $a_m \in E$ body Jordanovy oblasti G a nechť $a_m \to a \in H(G)$. Sestrojme jako v důkazu věty 1 oblasti Ω_n a položme kromě toho $\Omega_0 = G$.

Vzhledem k tomu, že $a_m \to a$ a že $\Omega_n$je (pro $n \geqq 1$) jedinou komponentou množiny $U(a, \delta/n) \cap G$, která obsahuje bod a na hranici, existuje ke každému n index $p(n)$ tak, že pro $m \geqq p(n)$ je $a_m \in \Omega_n$. Položme ještě $p(0) = 1$, takže implikace: „$m \geqq p(0) \Rightarrow a_m \in \Omega_0$“ je též správná. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že indexy $p(n)$ tvoří rostoucí posloupnost.

Protože Ω_n je oblast a body $a_{p(n)}, \ldots, a_{p(n+1)}$ v ní leží, existuje křivka φ_n, definovaná v intervalu $\langle n/(n + 1), (n + 1)/(n + 2) \rangle$, pro niž platí:

$$a_{p(n)}, \ldots, a_{p(n+1)} \in [\varphi_n] \subset \Omega_n , \quad \varphi_n\left(\frac{n}{n + 1}\right) = a_{p(n)} , \quad \varphi_n\left(\frac{n + 1}{n + 2}\right) = a_{p(n+1)} .$$

Podobně jako v důkazu věty 1 snadno nahlédneme, že

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_n(t) & \text{pro } t \in \left\langle \dfrac{n}{n + 1}, \dfrac{n + 1}{n + 2} \right\rangle \quad (n = 0, 1, \ldots), \\ a & \text{pro } t = 1 \end{cases}$$

je hledaná křivka.

Literatura

[1] *K. Kuratowski*: Topologie II. Warszawa 1952.

[2] *F. Leja*: Teoria funkcji analitycznych. Warszawa 1957.

[3] *K. Kuratowski*: Topologie I. Warszawa-Wrocław 1948.

Резюме

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ТОПОЛОГИИ ПЛОСКОСТИ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ, (Ilja Černý), Прага

В статье доказываются наглядным способом три более глубокие теоремы по топологии плоскости, которые используются, например, в теории конформного отображения и доказательство которых, не опирающееся на целый ряд других теорем топологии, собственно говоря, в литературе не имеется. Для доказательства этих теорем в статье используется (из более важных теорем топологии плоскости) только теорема Жордана и несколько свойств т. наз. Θ-кривых.

Чтобы можно было дать формулировку упомянутых теорем, необходимо ввести некоторые понятия и обозначения:

Символом S (или же E) будем обозначать замкнутую (или же открытую) плоскость Гаусса. Каждое непрерывное отображение φ интервала $\langle\alpha, \beta\rangle \subset E_1$ в E мы назовем *кривой*; если будет $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ и если частичные отображения $\varphi|\langle\alpha, \beta)$, $\varphi|(\alpha, \beta\rangle$ будут простыми, то мы скажем, что φ — *жорданова кривая*. Если $T \subset E$ имеет вид $T = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$, где φ — жорданова кривая, то мы назовем T *топологической окружностью*. Область $\Omega \subset S$, границей которой служит топологическая окружность, мы назовем *жордановой областью*.

Если T — тополигическая окружность, то по теореме Жордана

$$S - T = \operatorname{Int} T \cup \operatorname{Ext} T,$$

где $\operatorname{Int} T$, $\operatorname{Ext} T$ — непересекающиеся области, общей границей которых является T; при этом $\operatorname{Int} T$ ограничена, $\operatorname{Ext} T$ неограничена.

Главной целью работы является доказательство следующих утверждений:

Теорема 1. *Если G — область Жордана, то к любой точке $a \in H(G)$ (граница G) существует кривая φ, определенная, например, в $\langle 0, 1\rangle$, для которой $\varphi(1) = a$, $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$.(„Достижимость точек на границе жордановой области".)*

Теорема 2. *Если L_1, L_2 — дуги (т. е. гомеоморфные образы интервала $\langle 0, 1\rangle$), общей концевой точкой которых является точка a лежащая на границе жордановой области G, и если $L_1 \cup L_2 - \{a\} \subset G$, то для каждой окрестности $U(a)$ точки a существует кривая φ, определенная, например, в $\langle 0, 1\rangle$, для которой: $\varphi(0) \in L_1$, $\varphi(1) \in L_2$, $\varphi(\langle 0, 1\rangle) \subset U(a) \cap G$.*

Теорема 3. *Если G — область Жордана и если $a_n \in G \cap E$ — произвольные точки, сходящиеся к точке $a \in H(G)$, существует кривая φ, определенная в $\langle 0, 1\rangle$ так, что $a = \varphi(1)$, $a_m \in \varphi(\langle 0, 1\rangle)$ для всех m, $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$.*

Доказательство этих теорем опирается на вспомогательную теорему, которая в работе названа **леммой 6**:

Если G — область Жордана, $U(a)$ — окрестность точки $a \in H(G)$, для которой $H(G) - \overline{U(a)} = \emptyset$, то существует ровно одна компонента Ω множества $G \cap U(a)$, на границе которой лежит точка a. (Эта компонента является жордановой областью.)

При доказательстве леммы 6 играет важную роль лемма 5, в которой описан принцип, на котором основано эффективное построение компоненты Ω, когда заданы $U(a)$ и $H(G)$.

Лемма 5. *Пусть Γ^1, Γ^2 — дуги, общими точками которых являются как раз их концевые точки; пусть $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Пусть дуги L_n ($n = 1, 2, \ldots,$ — конечная или бесконечная последовательность) удовлетворяют следующими условиями:*

1. *Крайние точки a_n, b_n дуги L_n лежат на Γ^1.*

2. *Никакие две из дуг $L_m, L_n (m \neq n)$ не имеют обе концевые точки общими, и если обозначить $\tilde{L}_n = L_n - \{a_n, b_n\}$, то $\tilde{L}_n$ не пересекается с L_m.*

3. $\tilde{L}_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$.

4. *Если дуг L_n бесконечно много, то их диаметр стремится к нулю.*

Обозначим еще через C_n дугу, содержащуюся в Γ^1, крайними точками которой являются точки a_n, b_n; пусть, наконец, $T_n = C_n \cup L_n$.

Тогда T_n суть топологические окружности, для которых $\operatorname{Int} T_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$, и множество $\Omega = \operatorname{Int} \Gamma - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n}$ является областью Жордана, граница которой удовлетворяет соотношению: $H(\Omega) \subset (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) \cup \Gamma^2 \cup \bigcup_n L_n$; при этом равенство имеет место тогда, когда $\tilde{C}_n = C_n - \{a_n, b_n\}$ не пересекаются.

От положения в лемме 6 перейдем к положению в лемме 5 следующим образом: Обозначим через T_1 замыкание компоненты множества $U(a) \cap H(G)$, содержащее точку a; концевые точки дуги T_1 обозначим через b, c. Пусть T_2, C_1, C_2 — дуги с концевыми точками b, c, для которых $H(G) = T_1 \cup T_2$, $H(U(a)) = C_1 \cup C_2$. Тогда $U(a) - T_1 = G_1 \cup G_2$, где G_j — непересекающиеся области Жордана, границами которых служат $C_j \cup T_1$.

Если $\tilde{L}_n^j$ — компоненты множества $G_j \cap T_2$, L_n^j — их зымыкания, $C_n^j \subset C_j$ — дуги с теми же конценвыми точками что L_n^j, $T_n^j = C_n^j \cup L_n^j$, то одно из множеств

$$\Omega_j = G_j - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n^j} \quad (j = 1, 2)$$

является искомой компонентой множества $G \cap U(a)$ (а второе является единственной компонентой множества $U(a) - \bar{G}$, на границе которого лежит точка a).

Summary

NEW PROOFS OF SOME THEOREMS IN THE TOPOLOGY OF PLANE SETS OF POINTS

ILJA ČERNÝ, Praha

In the paper there are given proofs of three theorems concerning the topology of plane sets of points, useful e.g. in the theory of conformal mapping; proofs of these theorems known in literature are preceded by series of other theorems. The present paper uses, of the deeper properties of plane topology, only the Jordan curve theorem and some properties of the so-called Θ-curves.

Some notation and terminology will precede the formulation of the theorems.

S will denote the closed, and E the open, Gauss plane. A continuous map φ of $\langle\alpha, \beta\rangle \subset E_1$ into E will be called a *curve*; if $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ and both partial mappings $\varphi \mid \langle\alpha, \beta)$, $\varphi \mid (\alpha, \beta\rangle$ are one-to-one, we will say that φ is a *Jordan curve.* A set $T \subset E$ of the form $T = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$ with φ a Jordan curve will be termed a topological circle. A region $\Omega \subset S$ will be called a *Jordan region* if its boundary is a topological circle.

If T is a topological circle, then the Jordan curve theorem states that

$$S - T = \operatorname{Int} T \cup \operatorname{Ext} T$$

where $\operatorname{Int} T$, $\operatorname{Ext} T$ are disjoint regions both with T as boundary; $\operatorname{Int} T$ is bounded and $\operatorname{Ext} T$ unbounded.

The main objective of the paper are the proofs of the following theorems:

Theorem 1. *If G is a Jordan region, then to each point $a \in H(G)$* (= boundary of G) *there is a curve φ defined, say, on $\langle 0, 1\rangle$, with $\varphi(1) = a$ and $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$ („accessibility of points on the boundary of a Jordan region").*

Theorem 2. *Let L_1, L_2 be arcs (i.e. homeomorphic images of $\langle 0, 1\rangle$) with a common end-point a on the boundary of a Jordan region G, and such that $L_1 \cup L_2 - \{a\} \subset G$. Then to each neighbourhood $U(a)$ of a there is a curve φ, say defined on $\langle 0, 1\rangle$, with $\varphi(0) \in L_1$, $\varphi(1) \in L_2$, $\varphi(\langle 0, 1\rangle) \subset U(a) \cap G$.*

Theorem 3. *If G is a Jordan region and $a_n \in G \cap E$ points converging to an $a \in H(G)$, then there is a curve φ on $\langle 0, 1\rangle$ with $a = \varphi(1)$, $a_m \in \varphi(\langle 0, 1\rangle)$ for all m, $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$.*

The proofs of these theorems are based on the following auxiliary theorem (lemma 6 in the text):

If G is a Jordan region and $U(a)$ a neighbourhood of $a \in H(G)$ with $H(G) - \overline{U(a)} \neq \emptyset$, then there is precisely one component Ω of $G \cap U(a)$ whose boundary contains a. (This component is a Jordan region.)

This latter theorem depends essentially on lemma 5, containing the principle which permits the effective construction of the component Ω if the $U(a)$ and $H(G)$ are given.

Lemma 5. *Let Γ^1, Γ^2 be arcs with only the end-points in common; set $\Gamma = \Gamma^1 \cup \cup \Gamma^2$. Assume that there is a (finite or infinite) sequence of arcs L_n with the following properties:*

1. *The end-points a_n, b_n of L_n are on Γ^1.*
2. *If $m \neq n$ then L_n, L_m do not have both end-points in common, and if $\tilde{L}_n = L_n - - \{a_n, b_n\}$ then $\tilde{L}_n$ is disjoint with L_m.*
3. $\tilde{L}_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$.
4. *If the sequence of L_n is infinite, then their diameters tend to* 0.

Finally let C_n be the subarc of Γ^1 with end-points a_n, b_n and set $T_n = C_n \cup L_n$. Then each T_n is a topological circle with $\operatorname{Int} T_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$; *the set*

$$\Omega = \operatorname{Int} \Gamma - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n}$$

is a Jordan region, and its boundary satisfies $H(\Omega) \subset (\Gamma^1 - \bigcup_n C_n) \cup \Gamma^2 \cup \bigcup_n L_n$, with equality if the sets $\tilde{C}_n = C_n - \{a_n, b_n\}$ are disjoint.

The situation described in lemma 5 may be obtained from that of lemma 6 as follows: Let T_1 be the closure of that component of $U(a) \cap H(G)$ which contains a; let b, c be the end-points of the arc T_1. Let T_2, C_1, C_2 be arcs with end-points b, c such that $H(G) = T_1 \cup T_2$, $H(U(a)) = C_1 \cup C_2$. Then $U(a) - T_1 = G_1 \cup G_2$ with the G_j disjoint Jordan regions whose boundaries are $C_j \cup T_1$.

If $\tilde{L}_n^j$ are all the components of $G_j \cap T_2$, L_j^n their closures, $C_n^j \subset C_j$ arcs with the same end-points as L_n^j, $T_n^j = C_n^j \cup L_n^j$ then one of the sets

$$\Omega_j = G_j - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n^j} \quad (j = 1, 2)$$

is the required component of $G \cap U(a)$ (and the other is the unique component of $U(a) - \bar{G}$ whose boundary contains a).